This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math. Per. 23.

Math. Per. 23.

Per. 1875 d. 341

Per. 1875 d 341

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXIII. Band.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Inhalt des dreiundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Cantor, in Halle. Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. (Fortsetzung des Artikels in Bd. XXI, pag. 545.) 453

Engel, in Leipzig. Zur Theorie der Berührungstransformationen. 1

Harnack, in Dresden. Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabeln mit ihren Ableitungen 244

—— Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige. 285

Hess, in München. Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, dessen eines Ende von einem Kräftepaar angegriffen wird. (Mit einer lithographirten Tafel.). 181

Klein, in Leipzig. Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form. 539

—— Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten (zusammen mit Lie in Christiania) . . . 579

—— Ueber gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung. 587

König, in Budapest. Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen 447

—— Ueber die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe 450

—— Ueber die Integration der Hamilton'schen Systeme und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung 504

—— Ueber die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen 520

Lie, in Christiania. Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten (zusammen mit Klein in Leipzig) 579

Lindemann, in Königsberg i. Pr. Ueber die Darstellung binärer Formen und ihrer Covarianten durch geometrische Gebilde im Raume. 111

Loria, à Mantoue. Sur les différentes espèces de complexes du 2e dégré de droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre (zusammen mit Segre in Turin) 213

Mehmke, in Darmstadt. Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methoden 143

Meissel, in Kiel. Ueber einige Fehler der Burckhardt'schen Factorentafeln 600

Noether, in Erlangen. Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen. 311

Seite

Pasch, in Giessen. Zur Theorie der Collineation und der Reciprocität . . 419
Raffy, à Paris. Détermination du genre d'une courbe algébrique. 527
Rohn, in Leipzig. Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche 82
Rosanes, in Breslau. Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen 412
—— Bemerkung zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung 416
Schur, in Leipzig. Ueber die Construction der Flächen $n$ter Ordnung. . . 437
Segre, à Turin. Sur les différentes espèces de complexes du 2e dégré de droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre (zusammen mit Loria in Mantua) 213
—— Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2e dégré double. 235
Stolz, in Innsbruck. Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth 152
Sturm, in Münster i./W. Ueber die 27 Geraden der cubischen Fläche . . 289
—— Note zu dem Verzeichnisse von Erzeugungsarten der cubischen Fläche (Math. Ann. Bd. XXIII, S. 308). 599
Thieme, in Posen. Ueber die Aufgabe, alle Elemente einer q-gliedrigen Gruppe binärer Formen zu construiren, wenn q dieser Formen gegeben sind 597
Voss, in Dresden. Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme. . . 45
—— Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades 157
—— Theorie der rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme. 359
Weber, in Berlin. Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen 489

RADCLIFFE LIBRARY UNIVERSITY MUSEUM OXFORD 23 JAN 84

Zur Theorie der Berührungstransformationen.

Von

FRIEDRICH ENGEL in Leipzig.

Ausser den gewöhnlichen Punkttransformationen giebt es noch andere ebenfalls eindeutig*) umkehrbare Umformungen der ebenen Curven und allgemeiner der Mannigfaltigkeiten n^{ter} Dimension im Raume von $n+1$ Dimensionen, es sind dies die sogenannten Berührungstransformationen, deren Wesen und deren Bedeutung für das Gebiet der Differentialgleichungen zuerst Sophus Lie in vollem Umfange erkannt und klargestellt hat (cf. Math. Ann. Bd. VIII, pag. 215 ff).

Diese Lie'schen Berührungstransformationen sind Umformungen zwischen Differentialquotienten erster Ordnung; A. V. Bäcklund zog zuerst auch Transformationen zwischen Differentialquotienten höherer Ordnung in Betracht und gelangte so zu unendlich vieldeutigen Transformationen (Ann. IX, 297—320; XI, 199 ff.).

Alle diese Untersuchungen lassen jedoch eins vermissen: nirgends wird die Frage nach einem innern Zusammenhang zwischen den verschiedenen Classen von Transformationen aufgeworfen. Wir wollen im Folgenden diese Frage aufnehmen und wenigstens für die Ebene vollständig erledigen, indem wir die erwähnten Transformationen sämmtlich auf die Punkttransformationen zurückführen.

§ 1.

Die Lie'schen Berührungstransformationen in der Ebene.

In den Gleichungen einer Punkttransformation zwischen den beiden Ebenen der (xy) und der $(x'y')$ denken wir uns einen Parameter λ enthalten etwa:

$$x' = X(x, y, \lambda), \quad y' = Y(x, y, \lambda); \tag{1}$$

ausgeschlossen seien dabei die blossen Punktconstructionen, für welche $\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} \equiv 0$ ist, auch möge λ weder in X noch in Y fehlen.

Den Parameter λ lassen wir alle möglichen Werthe durchlaufen und bekommen so ∞^1 aufeinanderfolgende Punkttransformationen, deren Gesammtheit als eine einzige Abbildung der (xy) Ebene auf

*) „eindeutig" im Gegensatze zu „unendlich vieldeutig", also nicht etwa im algebraischen Sinne.

die $(x'y')$ Ebene angesehen werden kann. Bei dieser Auffassung gehören vermöge der Gleichungen (1) zu jeder Curve C oder $y = y(x)$ der (xy) Ebene ∞^1 Curven C' der andern Ebene, doch kommen hierbei zwei verschiedene Systeme von je $\infty^1 C'$ in Betracht. Fassen wir nämlich einerseits jede der ∞^1 Punkttransformationen für sich ins Auge, so liefert uns jede eine besondere C' als Bild der Curve C, im Ganzen erhalten wir also $\infty^1 C'$, deren Gleichung $y' = y'(x', \lambda)$ sich durch Elimination von x aus (1), worin $y = y(x)$ zu setzen ist, ergiebt, wir nennen diese Curven einfach die Curven $\lambda = \text{const.}$

Betrachten wir andererseits alle ∞^1 Punkttransformationen gleichzeitig, so bekommen wir zu jedem Punkt der Curve $y = y(x)$ ∞^1 Punkte $(x'y')$ oder eine C' zugeordnet, insgesammt also wieder $\infty^1 C'$; die Gleichung $y' = y'(x', x)$ dieses zweiten Curvensystems, welches das der Curven $x = \text{const.}$ heissen möge, entsteht durch Elimination von λ aus den Gleichungen (1). Unsere ∞^1 Punkttransformationen begründen mithin zwei verschiedene Zuordnungen von je $\infty^1 C'$ zu den einzelnen Curven der (xy) Ebene; indem wir nun zu diesen $\infty^1 C'$ immer die Enveloppe suchen, kommen wir auf zwei neue Zuordnungen, welche beide jeder Curve C nur eine Curve C' entsprechen lassen. Die Entstehung dieser neuen Curventransformationen aus den ∞^1 Punkttransformationen rechtfertigt es, wenn wir sie als „Umhüllungstransformationen" der letzteren bezeichnen. Um diese Umhüllungstransformationen von (1) wirklich zu bestimmen, haben wir in (1) $y = y(x)$, die Gleichung der Curve C einzusetzen und dann die Enveloppen der Curven $\lambda = \text{const.}$ und der Curven $x = \text{const.}$ aufzusuchen, für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx'}$ schreiben wir dabei bezüglich p und p'.

A) *Die Curven $\lambda = const.$* x ist die unabhängige Variable also:

$$p' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial X}{\partial y}}. \tag{2a}$$

Um die Enveloppe zu erhalten, hat man λ derart als Function von x zu bestimmen, dass (1) eine Curve $x' = \overline{X}(x)$, $y' = \overline{Y}(x)$ liefert, welche in jedem ihrer Punkte eine der Curven $\lambda = \text{const.}$ berührt, d. h. welche für jeden Werth von x und den zugehörigen Werth von λ ergiebt:

$$\frac{\frac{d\overline{Y}}{dx}}{\frac{d\overline{X}}{dx}} = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}},$$ es muss daher die Gleichung:

$$\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{dY}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}{\frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}} \tag{3a}$$

identisch erfüllt werden, ohne dass $\frac{d\lambda}{dx} = 0$ ist und daraus bekommt man für λ die Gleichung:

$$\frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0. \tag{4}$$

Ergiebt (4) einen Werth von λ, welcher (3a) befriedigt, so bedarf es zur Herstellung der gesuchten Umhüllungscurve nur noch der Elimination von x aus (1), worin die betreffende Wurzel λ der Gleichung (4) einzusetzen ist.

B.) *Die Curven $x = const.$* λ ist die unabhängige Variable, daher:

$$p' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}. \tag{2b}$$

Die Enveloppe wird erhalten, wenn man für x in (1) eine solche Function von λ einsetzt, dass eine Curve $x' = \overline{X}(\lambda)$, $y' = \overline{Y}(\lambda)$ entsteht, welche die Gleichung $\frac{\frac{d\overline{Y}}{d\lambda}}{\frac{d\overline{X}}{d\lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}$ zur Identität macht, das führt auf die Bedingung:

$$\frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}} \tag{3b}$$

und so kommt man, da $\frac{dx}{d\lambda} \neq 0$ sein soll, wieder auf die Gleichung (4).

Ob man daraus x als Function von λ oder λ als Function von x bestimmt, ist gleichgültig, nur muss der gefundene Werth die Gleichung (3b) befriedigen; die Umhüllungscurve aber ist offenbar mit der schon bei A) gefundenen identisch. Die beiden Systeme von $\infty^1 C'$, welche sich bei ∞^1 Punkttransformationen zu jeder (xy) Curve ergeben, besitzen somit ein und dieselbe Enveloppe, ein Ergebniss, welches sich einfach so aussprechen lässt:

Satz I. *„Die Curven $u = const.$ und die Curven $v = const.$ der (xy) Ebene, welche durch die Gleichungen $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$ dargestellt werden, haben die Enveloppe gemein.“*

Nach dem, was wir bei A) und bei B) gefunden haben, liefern unsere ∞^1 Punkttransformationen (1) nur eine Umhüllungstransformation, welche durch die Gleichung (4) bestimmt ist.

Um (4) auf eine einfachere Form zu bringen, denken wir uns aus der Gleichung $X = X(x, y, \lambda)$ λ als Function von x, y, X dargestellt und erhalten so an Stelle von (1) die Gleichungen: $x' = X(x, y, \lambda)$, $y' = \overline{Y}(x, y, X)$; die Gleichung (4) aber geht über in:

$$\frac{dX}{dx}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial \lambda}-\left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X}\cdot\frac{dX}{dx}\right)\cdot\frac{\partial X}{\partial \lambda}=0$$

oder in: $\left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial X}{\partial \lambda}=0$. Die Möglichkeit $\frac{\partial X}{\partial \lambda}=0$ kann nicht in Betracht kommen, denn weder (3a) noch (3b) würde dabei befriedigt werden, dagegen bestimmt die Gleichung $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}=0$ im Allgemeinen λ als Function von p. Durch die Substitution dieses Werthes können nun $\frac{\partial X}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial Y}{\partial \lambda}$, die ja an und für sich p nicht enthalten, offenbar nicht $\equiv 0$ werden, ebensowenig $\frac{dX}{dx}$ und $\frac{dY}{dx}$, denn diese müssten wegen (4) gleichzeitig verschwinden, was doch ausgeschlossen ist, da $\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial y}$ nicht null werden kann. Somit dürfen wir setzen:

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda}=M.\frac{\partial X}{\partial \lambda},\quad \frac{dY}{dx}=M.\frac{dX}{dx}$$

und keine der hierbei vorkommenden Grössen verschwindet bei der Substitution des Werthes von λ. Daraus erhellt denn sofort, dass die Wurzel λ der Gleichung $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}=0$, wenn sie wirklich p enthält, auch (3a) und (3b) identisch befriedigt.

$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}=0$ wird aber immer für λ eine Function von p ergeben, ausgenommen wenn $\frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}}{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}}$ frei von λ oder also frei von X ist, d. h. wenn:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X}-\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X}\equiv 0.$$

In diesem Falle hat man: $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X}=f(\overline{Y},X)$ also $\overline{Y}=F(X,c)$, wo x und y nur in c vorkommen können. Wir sehen demnach: bei allen Transformationen (1) mit Ausnahme allein derjenigen, welche die Form haben: $x'=X(x,y,\lambda)$, $y'=\overline{Y}(X,\varphi(x,y))$ oder also auf eine Gleichung $F(x',y',\varphi(x,y))=0$ führen, bestimmt die Gleichung (4) λ als Function von x,y und p. Durch Einsetzen dieses Werthes in die Gleichungen (1) und in die Gleichung (2a) oder (2b) erhalten wir die Umhüllungstransformation von (1) in folgender Gestalt:

$$(5)\qquad x'=\Xi(x,y,p),\quad y'=\mathsf{H}(x,y,p),\quad p'=\Pi(x,y,p)$$

und zwar genügen Ξ, H, Π den Bedingungen:

$$(6)\qquad |\Xi\Pi|=\frac{d\Xi}{dx}\cdot\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p}-\frac{d\mathsf{H}}{dx}\cdot\frac{\partial \Xi}{\partial p}\equiv 0,\quad \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p}-\Pi\cdot\frac{\partial \Xi}{\partial p}\equiv 0.$$

Es ist nämlich $\frac{d\Xi}{dx} = \frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{\partial \Xi}{\partial p} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p}$ u. s. w., beachtet man hierzu ausser der Gleichung (4) noch, dass $\frac{d\mathsf{H}}{dx} - \Pi \cdot \frac{d\Xi}{dx} \equiv 0$ werden muss, so kommt man auf die Gleichungen (6) sehr leicht. Wie wir sehen ist die Umhüllungstransformation von (1) eine Lie'sche Berührungstransformation und da sie sich sowol bei A) als bei B) ergeben hat, wollen wir sie als „vollständige" Umhüllungstransformation bezeichnen im Gegensatz zu den „unvollständigen", welche nur auf einem der beiden Wege erhalten werden. So können wir denn unsere Resultate zusammenfassen wie folgt:

Satz II. „∞^1 *Punkttransformationen von der Form (1), welche keine blossen Punktconstructionen sind, haben immer eine Lie'sche Berührungstransformation zur vollständigen Umhüllungstransformation, wofern sie nicht bei der Elimination von λ auf eine Gleichung $F(x', y', \varphi(x, y)) = 0$ führen*".

Dazu, dass ∞^1 Punkttransformationen (1), welche nach x und y auflösbar sind, eine vollständige Umhüllungstransformation besitzen, reicht es offenbar hin, wenn die Gleichung (4) wirklich λ als Function von p bestimmt; nebenbei sei noch bemerkt, dass in dem gedachten Ausnahmefall, wo eine Gleichung $F(x', y', \varphi(x, y)) = 0$ auftritt, die Umhüllungstransformation, wenn überhaupt eine existirt, nur eine unvollständige und zwar eine Punkttransformation sein kann.

Stellen die Gleichungen (1) blosse Punktconstructionen dar, ist also $\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} \equiv 0$, so lassen sie sich schreiben:

$$(1') \quad x' = X(x, y, \lambda), \; y' = \overline{Y}(X, \lambda).$$

Hier giebt es nur ein einziges System von Curven $\lambda = \text{const.}$, in welches alle Curven der (x, y) Ebene verwandelt werden, eine Umhüllungstransformation im Sinne von A) kann es daher nicht geben; anders bei B), denn die Gleichungen $\frac{dX}{dx} = 0$ und $\frac{d\overline{Y}}{dx} = 0$ sind ja in unserem Falle vereinbar und bestimmen, falls nicht X die Form hat: $X(\psi(x, y), \lambda)$, immer λ als Function von p, die Bedingung (3b) wird identisch erfüllt und so ist denn eine Lie'sche Berührungstransformation unvollständige Umhüllungstransformation der Transformationen (1'). Wir können das auch so aussprechen:

Satz III. „*Ergiebt die Gleichung $\frac{\partial X}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial X}{\partial y} = 0$ für λ eine Function von x, y und p, so verwandeln sich durch Substitution dieses Werthes die Gleichungen*:

$$1') \; x' = X(x, y, \lambda), \; y' = Y(X, \lambda),$$

in denen $\overline{Y}$ eine von λ nicht freie, sonst aber willkürliche Function bedeutet, immer in eine Lie'sche Berührungstransformation."

Betrachten wir nun (5) und (6) als die allgemeinen Definitionsgleichungen der Lie'schen Berührungstransformationen in der Ebene und verlangen nur, dass die Functionen Ξ und H von einander unabhängig sind und dass sie beide p wirklich enthalten, so können wir leicht umgekehrt ∞^1 Punkttransformationen angeben, welche die Lie'sche Berührungstransformation (5) zur Umhüllungstransformation haben. Setzen wir nämlich in (5) für p eine beliebige Function φ von x, y, λ, so erhalten wir die ∞^1 Punkttransformationen:

$$(7) \qquad x' = \Xi(x, y, \varphi(x, y, \lambda)), \quad y' = \mathsf{H}(x, y, \varphi(x, y, \lambda))$$

und da Ξ und H von einander unabhängige Functionen sind, können wir auch φ immer so wählen, dass die Gleichungen (7) nach x und y auflösbar sind. Die Umhüllungstransformation zu (7) bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial \Xi}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \varphi} - \left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} = 0,$$

denn der Factor $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ darf natürlich nicht verschwinden; diese Gleichung aber wird erfüllt durch die Substitution $\varphi = p$, welche (7) wieder in (5) verwandelt und für λ wirklich eine Function p ergiebt; aus alledem folgern wir, dass (5) vollständige Umhüllungstransformation von (7) ist.

Satz IV. „*Jede Lie'sche Berührungstransformation der ebenen Curven lässt sich auf unbegränzt viele Weisen als vollständige Umhüllungstransformation von ∞^1 Punkttransformationen darstellen*".

Wir ersehen hieraus, dass die in den Gleichungen (5), (6) enthaltene Definition der Lie'schen Berührungstransformationen sich mit der unsrigen, wie sie Satz IV ausspricht, vollkommen deckt.

Die bekannte Eigenschaft der Lie'schen Berührungstransformationen (5), (6), eindeutig umkehrbar zu sein, geht nun auch aus unserer Art diese Transformationen abzuleiten leicht hervor. Die ∞^1 Punkttransformationen $x' = X(x, y, \lambda)$, $y' = \overline{Y}(x, y, X)$ mögen eine Lie'sche Berührungstransformation als vollständige Umhüllungstransformation besitzen, so dass also $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \neq 0$ ist; wir haben:

$$p' = \frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{d\overline{Y}}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$$

oder: $$p = -\frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} - p' \cdot \frac{\partial \overline{X}}{\partial x}}{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} - p' \cdot \frac{\partial X}{\partial y}},$$ ist es daher möglich x, y und λ

aus den Gleichungen:

$$x' = X,\ y' = \overline{Y},\ p' = \frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\partial Y}{\partial X}$$

als Functionen von x', y', p' darzustellen, so ist dasselbe mit x, y, p der Fall.

Die Functionaldeterminante der genannten Gleichungen:

$$\sum \pm \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}$$

wird

$$= \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \left\{ \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right\}, \text{ sie ist } \neq 0,$$

und damit ist unsere Frage erledigt; jede vollständige Umhüllungstransformation von ∞^1 Punkttransformationen ist eindeutig umkehrbar oder also:

Satz V. *„Die Lie'schen Berührungstransformationen der ebenen Curven sind nach x, y, p auflösbar, also eindeutig umkehrbar."*

Eine Frage bleibt nunmehr noch, ob nämlich die Auflösungen der Gleichungen (1) nach x und y:

8) $$x = X'(x', y', \lambda),\ y = Y'(x', y', \lambda)$$

als Umhüllungstransformation die Auflösungen der Gleichungen (5) nach x, y, p besitzen.

Die Umhüllungstransformation von (8) erhält man, indem man λ durch den aus:

9) $$\frac{dX'}{dx'} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial \lambda} - \frac{dY'}{dx'} \cdot \frac{\partial X'}{\partial \lambda} = 0$$

folgenden Werth ersetzt; andererseits findet man die Auflösungen der Gleichungen (5), wenn man die Gleichungen:

10) $$x' = X(x, y, \lambda),\ y' = Y(x, y, \lambda),\ p' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}$$

nach x, y, λ auflöst.

Aus den Beziehungen der Gleichungen (1) und (8) zu einander ergeben sich weiter folgende Identitäten:

11) $$\begin{cases} x' \equiv X(X', Y', \lambda), & y' \equiv Y(X', Y', \lambda), \\ x \equiv X'(X, Y, \lambda), & y \equiv Y'(X, Y, \lambda), \end{cases}$$

und daraus leiten wir leicht ab:

$$\frac{\partial X}{\partial X'} \cdot \frac{\partial X'}{\partial \lambda} + \frac{\partial X}{\partial \overline{Y}'} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial \lambda} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}+\frac{\partial Y}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}+\frac{\partial Y}{\partial \lambda}=0.$$

Diese Gleichungen gestatten das Resultat der Elimination von x und y aus (10) in der Form darzustellen:

$$p'=\frac{\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}+\frac{\partial Y}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}+\frac{\partial X}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}}. \tag{12}$$

Bestimmt man hieraus λ und setzt seinen Werth in (8) ein, so erhält man die Auflösungen der Gleichungen (10) oder (5), welche offenbar mit der Umhüllungstransformation von (8) übereinstimmen werden, sobald die Gleichungen (9) und (12) gleiche Werthe von λ oder, was dasselbe ist, gleiche Werthe von p' liefern. Dies ist der Fall sobald:

$$\frac{\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}+\frac{\partial Y}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}+\frac{\partial X}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}}+\frac{\frac{\partial X'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}-\frac{\partial Y'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}-\frac{\partial Y'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}}=0$$

ist. Verbindet man hiermit die aus (11) folgenden Identitäten:

$$\frac{\partial X}{\partial Y'}=-\frac{\frac{\partial X}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial y'}}{\frac{\partial Y'}{\partial y'}},\qquad \frac{\partial Y}{\partial Y'}=-\frac{\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial x'}}{\frac{\partial Y'}{\partial x'}},$$

so folgt, dass:

$$\frac{\frac{\partial X'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}-\frac{\partial Y'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial \lambda}-\frac{\partial Y'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial \lambda}}\cdot\left\{1+\frac{\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial y'}}{\frac{\partial X}{\partial X'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial x'}}\right\}\equiv 0$$

sein muss. Das ist auch wirklich der Fall, denn es ist:

$$\frac{\partial Y'}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y'}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}\equiv 0$$

und macht man hierin die Substitution (8), so zeigt sich, dass wirklich

$$\frac{\partial Y'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial X}{\partial X'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X'}\equiv 0 \text{ ist.}$$

Damit ist bewiesen, dass die Auflösungen der Gleichungen (10), bezüglich (5), mit der Umhüllungstransformation von (8) identisch sind.

Satz VI. *„Die ∞^1 Punkttransformationen (1) besitzen nur eine vollständige Umhüllungstransformation und es ist bei Bestimmung derselben gleichgültig, ob man von der (xy) Ebene oder von der (x'y') Ebene ausgeht."*

Damit ist in der Ebene die Zurückführung der Lie'schen Berührungstransformationen auf die Punkttransformationen vollständig abgeschlossen und zugleich die Methode klargelegt, deren wir uns im Folgenden immer bedienen werden, um aus bekannten Arten von Trans-

formationen neue zu gewinnen, es ist die Methode des Aufsuchens von Umhüllungstransformationen.

Vor der gewöhnlichen Ableitung der Lie'schen Berührungstransformationen aus Gleichungen von der Form:

$$f(x, y, x', y') = 0, \quad f'(x) + p \cdot f'(y) = 0, \quad f'(x') + p' \cdot f'(y') = 0$$

hat unsere Ableitung den Vorzug, dass bei ihr blos eine Unbekannte nämlich λ zu bestimmen ist, während dort x' und y', also zwei Unbekannte zu berechnen sind.

In den Lie'schen Berührungstransformationen haben wir schon eine specielle Art von Transformationen erster Ordnung, welche x' und y' als Functionen von x, y, p darstellen, kennen gelernt, allgemein wollen wir unter „Transformationen n^{ter} Ordnung" solche verstehen, welche x' und y' als Functionen von $x, y, p_1 \ldots p_n$ darstellen, wo $p_s = \frac{d^s y}{dx^s}$ ist.

Bei der Betrachtung der Transformationen höherer Ordnung, zu welcher wir jetzt übergehen, wollen wir uns folgender Abkürzungen bedienen:

$$\frac{d}{dx} f(x, y, p_1 \ldots p_m) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^m{}^x \frac{\partial f}{\partial p_x} \cdot p_{x+1} \qquad (p_0 = y),$$

$$\frac{d'}{dx} f(x, y, p_1 \ldots p_m) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^{m-1}{}^x \frac{\partial f}{\partial p_x} \cdot p_{x+1}.$$

Bedeutet φ eine zweite Function von $x, y, p_1 \ldots p_m$, so setzen wir noch:

$$\frac{d'f}{dx} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{d'\varphi}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_m} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_m} = |f\varphi|.$$

§ 2.

Die Berührungstransformationen höherer Ordnung in der Ebene.

Es liegt nahe, dasselbe Verfahren, welches uns in § 1 von den Punkttransformationen zu den Lie'schen Berührungstransformationen geführt hat, nun auf diese anzuwenden und also von ∞^1 Lie'schen Berührungstransformationen die Umhüllungstransformation aufzusuchen. In der That würde sich als unvollständige Umhüllungstransformation eine Berührungstransformation 2. O. ergeben, von solchen Transformationen aus würden wir zu Berührungstransformationen 3. O. gelangen u. s. w. bis zur n. O. Allein bei diesem Gange würden Wiederholungen unvermeidlich sein, deshalb ziehen wir es vor, gleich von den einfachsten Transformationen höherer Ordnung auszugehen. Wir verstehen unter „gewöhnlichen Transformationen n. O." solche von der

Form: $x' = X(x, y, p_1 \ldots p_n)$, $y' = Y(x, y, p_1 \ldots p_n)$, wobei X und Y zwei willkürlich gewählte Functionen sind, dergestalt jedoch, dass $p_1' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$ nicht frei von p_{n+1} wird, dass also:

$$|XY| = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{dp_n} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \neq 0$$

ist; nach dieser Bezeichnung sind offenbar die Punkttransformationen gewöhnliche Transformationen nullter Ordnung.

∞^1 gewöhnliche Transformationen n — 1. O. von der Form:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \lambda), \quad y' = Y(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \lambda), \\ |XY| = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \neq 0 \end{cases}$$

liefern, wie in § 1 für den speciellen Fall der Punkttransformationen ($n = 1$) näher auseinandergesetzt ist, zu jeder Curve $y = y(x)$ zwei verschiedene Systeme von je ∞^1 C', nämlich die Curven $\lambda = \text{const.}$ und die Curven $x = \text{const.}$ Um besondere Fälle auszuschliessen, setzen wir voraus, dass $\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} \neq 0$ ist und dass λ in X sowohl als in Y wirklich vorkommt: nunmehr suchen wir nach Anleitung des § 1 zu (1) die Umhüllungstransformationen.

A) Die Curven $\lambda = \text{const.}$ λ muss eine solche Function von x werden, dass die Gleichung:

$$(2a) \quad \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{dY}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}{\frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}$$

befriedigt wird.

B) Die Curven $x = \text{const.}$ x ist derart als Function von λ zu bestimmen, dass:

$$(2b) \quad \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}$$

wird.

Beide Male erhalten wir dieselbe Bedingung:

$$(3) \quad \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$$

und sehen somit, dass ∞^1 gewöhnliche Transformationen n — 1 . 0. nur eine, aber eine vollständige Umhüllungstransformation besitzen.

Um die Gleichung (3) auf eine einfachere Form zu bringen, ersetzen wir die Gleichungen (1) durch:

$$x' = X(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda), \quad y' = \overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, X),$$

wobei (3) übergeht in: $\frac{d\overline{Y}}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$.

Von dem Falle $\frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$ sehen wir natürlich ab und finden so, dass λ sich aus (3) immer als Function von p_n bestimmt, so lange nicht $-p_n = \frac{\frac{d\overline{Y}}{dx}}{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-1}}}$ von λ oder also von X frei wird, d. h. so lange nicht $\left| \overline{Y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right| \equiv 0$ ist.

Wie man sich leicht überzeugt, ist $\left| \overline{Y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right| \equiv 0$, wenn $\overline{Y}$ die Form hat: $(\overline{Y}\, \varphi_1 \dots \varphi_n, X)$, worin $\varphi_1 \dots \varphi_n$ n unabhängige Functionen von $x, y, p_1 \dots p_{n-1}$ sind, welche paarweise ergeben $|\varphi_i \varphi_k| \equiv 0$; es lässt sich auch zeigen, dass nur in diesem Falle $\left| \overline{Y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right| \equiv 0$ ist, was wir jedoch hier nicht näher auseinandersetzen wollen. Sowie also:

$$\left| \overline{Y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right| \neq 0$$

ist, erhalten wir durch Substitution des Werthes von λ aus (3) in (1) als vollständige Umhüllungstransformation von (1):

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \Xi(x, y, p_1 \dots p_n), \quad y' = \mathsf{H}(x, y, p_1 \dots p_n), \quad p_1' = \Pi_1(x, y, p_1 \dots p_n), \\ |\, \Xi \mathsf{H} \,| = \frac{d'\Xi}{dx} \cdot \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_n} - \frac{d'\mathsf{H}}{dx} \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial p_n} \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_n} - \Pi_1 \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial p_n} \equiv 0. \end{cases}$$

Die Relationen zwischen Ξ, H, Π_1 ergeben sich leicht, wenn man zu der Gleichung (3) hinzunimmt, dass

$$\frac{d'\Xi}{dx} = \frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d'\lambda}{dx}, \quad \frac{\partial \Xi}{\partial p_n} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n}$$

u. s. w. ist und endlich noch beachtet, dass $\frac{d\mathsf{H}}{dx} - \Pi_1 \cdot \frac{d\Xi}{dx} \equiv 0$ werden muss.

(4) ist eine Transformation n. O., welche Berührung n. O. von Curven der (xy) Ebene in Berührung wenigstens erster Ordnung auf der $(x'y')$ Ebene verwandelt, wir nennen daher (4) eine „Berührungstransformation $n$ter Ordnung" im Gegensatze zu den gewöhnlichen Transformationen n. O., welche Berührung n. O. von (xy) Curven zerstören. Also:

Satz I. „∞^1 *gewöhnliche Transformationen* $n-1$. *O. besitzen im allgemeinen eine Berührungstransformation n. O. als vollständige Umhüllungstransformation.*"

Fassen wir nun (4) als die allgemeinen Definitionsgleichungen der Berührungstransformationen n. O. auf, so können wir leicht ∞^1 ge-

wöhnliche Transformationen $n-1$. O. angeben, welche (4) zur vollständigen Umhüllungstransformation haben, es sind dies die Transformationen:

$$x' = \Xi(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \varphi), \quad y' = \mathsf{H}(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \varphi),$$

wo φ eine willkürliche Function von $x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda$ ist. Denn beim Aufsuchen der Umhüllungstransformation erhalten wir für λ die Gleichung:

$$\frac{d'\Xi}{dx} \cdot \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \varphi} - \frac{d'\mathsf{H}}{dx} \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} = 0,$$

da $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ natürlich $\neq 0$ sein muss, die Substitution $\varphi = p_n$ verwandelt aber die Gleichung in die Identität $|\, \Xi \mathsf{H} \,| \equiv 0$, bestimmt λ als Function von p_n und führt von den ∞^1 gewöhnlichen Transformationen $n-1$. O. zur Berührungstransformation n. O. (4) zurück.

Satz II. *„Jede Berührungstransformation n. O. lässt sich auf unbegränzt viele Weisen als vollständige Umhüllungstransformation von ∞^1 gewöhnlichen Transformationen $(n-1)$. O. darstellen."*

Wesentlich anders als bei ∞^1 gewöhnlichen Transformationen $n-1$. O. verhält es sich mit den Umhüllungstransformationen von ∞^1 Berührungstransformationen $(n-1)$. O.:

$$(5) \qquad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda), \quad y' = Y(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda), \\ |\, XY \,| = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \equiv 0. \end{cases}$$

A) *Die Curven $\lambda = const.$* Es muss werden:

$$p_1' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}}}{\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}}} = \frac{\frac{dY}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}{\frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}},$$

also bekommt man für λ die Gleichung:

$$(6a) \qquad \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0.$$

B) *Die Curven $x = const.$* Man hat die Gleichung:

$$p_1' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}$$

zu befriedigen und erhält daraus die Bedingung:

$$\frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0;$$

nimmt man hinzu, dass

$$|\, XY \,| = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \neq 0$$

ist, so zeigt sich, dass man entweder auch hier auf die Gleichung (6a) kommt oder auf die beiden Gleichungen:

(6b) $$\frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{dY}{dx} = 0,$$

welche nicht von einander unabhängig sind, da ja $| X Y | \equiv 0$ ist.

Die Curven $\lambda =$ const. und die Curven $x =$ const. besitzen also auch hier eine gemeinsame Enveloppe bestimmt durch die Gleichung (6a) und dieser entsprechend besitzen die Transformationen (5) eine vollständige Umhüllungstransformation; diese ist, da die Gleichung (6a) im allgemeinen für λ eine Function von $x, y, p_1 \dots p_{n-1}$ ergiebt, eine Berührungstransformation n — 1. O.

Aber die Curven $x =$ const. haben noch eine besondere Enveloppe, welche von den Curven $\lambda =$ const. nicht eingehüllt wird, dieselbe bestimmt sich aus (6b) und da hieraus für λ im allgemeinen eine Function von p_n folgt, erhalten wir zu (5) noch eine Berührungstransformation n. O. als unvollständige Umhüllungstransformation.

Satz III. „∞^1 *Berührungstransformationen n — 1. O. besitzen im allgemeinen eine vollständige und eine unvollständige Umhüllungstransformation, jene ist eine Berührungstransformation n — 1. O., diese eine solche von der n. O.*“

Die Gleichung (6a) geht, wenn man Y auf die Form:

$$\overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, X)$$

bringt, über in: $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-1}} = 0$, denn der Fall $\frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$ kann nicht in Betracht kommen; sie bestimmt daher λ immer, falls nicht $\frac{\partial}{\partial p_{n-1}} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} = 0$ ist.

Die Gleichungen (6b) bestimmen λ nur dann nicht als Function von p_n, wenn $- p_n = \frac{\frac{d'X}{dx}}{\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}}}$ von λ frei ist oder also, wenn $\left| X \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right| \equiv 0$ ist. In diesem Falle ist wegen

$$\frac{\frac{d'Y}{dx}}{\frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}}} = \frac{\frac{d'X}{dx}}{\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}}}$$

auch $\left| Y \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right| \equiv 0$ und es lässt sich zeigen, dass dann X und Y die Form haben:

$$X = \overline{X}(\varphi_1 \dots \varphi_n, \lambda), \quad Y = \overline{Y}(\varphi_1 \dots \varphi_n, \lambda),$$

wo $\varphi_1 \dots \varphi_n$ n unabhängige Functionen von $x, y, p_1 \dots p_{n-1}$ sind, welche paarweise $|\varphi_i \varphi_x| \equiv 0$ ergeben.

Noch wollen wir eine wichtige Eigenschaft der unvollständigen Umhüllungstransformation von (5) erwähnen. Dieselbe sei:

$$(7)\quad \begin{cases} x' = \Xi(x, y, p_1 \dots p_n),\ y' = \mathsf{H}(x, y, p_1 \dots p_n),\ p_1' = \Pi_1(x, y, p_1 \dots p_n), \\ |\Xi \mathsf{H}| \equiv 0,\ \dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_n} - \Pi_1 \cdot \dfrac{\partial \Xi}{\partial p_n} \equiv 0, \end{cases}$$

wir haben dann:

$$\frac{d'\Xi}{dx} \equiv \frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d'\lambda}{dx} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d'\lambda}{dx},$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial p_n} \equiv \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n},$$

vorausgesetzt, dass für λ der aus (6b) folgende Werth substituirt wird.

Hieraus finden sich die später zu benutzenden Gleichungen:

$$(8)\qquad |\Xi\, \lambda| \equiv 0,\quad |\mathsf{H}\, \lambda = 0.$$

Wir stellen nun noch verschiedene Eigenschaften der Berührungstransformationen höherer Ordnung in einer Reihe von Sätzen zusammen.

Satz IV. *„In einer Berührungstransformation n. O.:*

$$(9)\quad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_n),\quad y' = Y(x, y, p_1 \dots p_n). \\ |X\, Y| = \dfrac{d'X}{dx} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial p_n} - \dfrac{d'Y}{dx} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0 \end{cases}$$

sind die Functionen X und Y immer in Bezug auf p_{n-1} und p_n unabhängig oder es ist:

$$\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \not\equiv 0.“$$

Beweis. Verschwände der eben genannte Ausdruck, so müsste Y die Form haben:

$$Y = \overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-2}, X),$$

also wäre:

$$\frac{d'Y}{dx} = \frac{d\overline{Y}}{dX} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} \cdot \frac{d'X}{dx},\quad \frac{\partial Y}{\partial p_n} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n};$$

die Identität $|X\, Y| \equiv 0$ nähme mithin die Gestalt an: $\dfrac{d\overline{Y}}{dx} \equiv 0$, denn $\dfrac{\partial X}{\partial p_n}$ ist nothwendig $\not\equiv 0$. Differentiirt man die letzte Gleichung einmal nach p_{n-1} und dann nach p_n, so kommt:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p} \equiv 0,\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-2}} \equiv 0,$$

woraus $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-2}} \equiv 0$ folgt; ebenso würde sich $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-3}} \equiv 0$ ergeben u. s. w., so dass man schliesslich für Y die Form $Y = \overline{Y}(X)$ erhielte, welche natürlich ausgeschlossen ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz V. *„In ∞^1 Berührungstransformationen $n - 1$. O. $(n > 1)$:*

$$(10)\qquad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda),\ y' = Y(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda), \\ |XY| = \dfrac{dX}{dx} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - \dfrac{dY}{dx} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \equiv 0 \end{cases}$$

sind die Functionen X und Y, wenn sie beide λ wirklich enthalten, stets unabhängig i. B. auf p_{n-1} und λ d. h. es ist:

$$\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} \not\equiv 0.\text{“}$$

Beweis. Wäre die angeführte Determinante wirklich $\equiv 0$, so müsste $Y = \overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-2}, X)$ sein, also:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d\overline{Y}}{dx} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dx}, \quad \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}};$$

aus $|XY| \equiv 0$ würde $\dfrac{d\overline{Y}}{dx} \equiv 0$ werden, denn $\dfrac{\partial X}{\partial p_{n-1}}$ ist ja $\not\equiv 0$. Differentiirt man die letzte Identität nach p_{n-1} und nach λ, so überzeugt man sich leicht, dass $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-2}} \equiv 0$ sein würde u. s. w., kurz es müsste $Y = \overline{Y}(X)$ sein, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz VI. *„Jede Berührungstransformation n. O.:*

$$(11)\qquad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_n),\ y' = Y(x, y, p_1 \dots p_n), \\ |XY| = \dfrac{dX}{dx} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial p_n} - \dfrac{dY}{dx} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0. \end{cases}$$

lässt sich als unvollständige Umhüllungstransformation von ∞^1 Berührungstransformationen $n-1$. O. darstellen.“

Beweis. Wir ersetzen in (3), p_n durch eine noch zu bestimmende Function φ von $x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda$ und erhalten so die ∞^1 Transformationen n. O.:

$$(12)\qquad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \varphi) = \overline{X}(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda), \\ y' = X(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \varphi) = \overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda). \end{cases}$$

Nehmen wir an (12) stellt ∞^1 Berührungstransformationen $n-1$. O. dar, welche (11) zur Umhüllungstransformation haben, so muss (cf. die Gleichungen (8) und das Vorhergehende) aus $p_n = \varphi$ sich für λ eine Function von $x, y, p_1 \dots p_n$ ergeben, welche $|X\lambda| \equiv 0$ und $|Y\lambda| \equiv 0$ macht. Bestimmen wir nun λ aus den nicht von einander unabhängigen Gleichungen:

$$(13)\qquad |X\lambda| = 0, \quad |Y\lambda| = 0,$$

so erhalten wir als allgemeinste Lösung: $\lambda = F(x, y, \Psi_1 \dots \Psi_{n-1})$ {wenn $|X\Psi_\varkappa| \equiv 0$ ($\varkappa = 1, \dots n-1$), woraus dann von selbst folgt, dass auch $|Y\Psi_\varkappa| \equiv 0$ und $|\Psi_i \Psi_\varkappa| \equiv 0$ ist}; berechnen wir hieraus $p_n = \varphi(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda)$, so stellt, wie wir behaupten, für diesen Werth von φ, (12) wirklich Berührungstransformationen $n-1$. O.

dar und besitzt wirklich (11) als Umhüllungstransformation. Es ist nämlich bei Substitution des betreffenden Werthes von λ:

$$\frac{d'X}{dx} \equiv \frac{d\overline{X}}{dx} + \frac{\partial \overline{X}}{\partial \lambda} \cdot \frac{d'\lambda}{dx}, \quad \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv \frac{\partial \overline{X}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n},$$

also:

$$|X\lambda| \equiv \frac{d\overline{X}}{dx} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} = 0$$

und:

$$|Y\lambda| \equiv \frac{d\overline{Y}}{dx} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} \equiv 0,$$

d. h. λ genügt gleichzeitig den beiden Gleichungen:

$$\frac{d\overline{X}}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d\overline{Y}}{dx} = 0,$$

denn $\frac{\partial \lambda}{\partial p_n}$ ist sicher $\neq 0$.

Weiter ist auch $|\overline{X}\,\overline{Y}| \equiv 0$, denn diese Gl. wird identisch erfüllt, wenn man darin für λ seinen Werth setzt, p_n kommt aber in dem Ausdruck $|\overline{X}\,\overline{Y}|$ gar nicht vor, wohl aber in dem Werthe von λ; wir schliessen daraus, dass $|\overline{X}\,\overline{Y}|$ schon vor jener Substitution, dass es an und für sich $= 0$ ist. Damit ist unsere letzte Behauptung und der ganze Satz erwiesen.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes VI kommt man leicht auf den folgenden:

Satz VII. *„Jede Berührungstransformation n. O. lässt sich darstellen als eine $n-1^{te}$ Umhüllungstransformation von ∞^{n-1} Lie'schen Berührungstransformationen oder als eine n^{te} Umhüllungstransformation von ∞^n Punkttransformationen."*

Wir haben bislang im Gebiete der $(x'y')$ nur den ersten Differentialquotienten p'_1 von y' in Betracht gezogen und gefunden, dass eine Berührungstransformation n. O. für x', y', p'_1 Functionen von $x, y, p_1 \ldots p_n$ ergiebt; es bleibt noch zu untersuchen, wie sich die Differentialquotienten höherer Ordnung, zunächst p'_2 darstellen.

Gegeben sei die Berührungstransformation n. O.:

$$(15) \quad \begin{cases} x' = X(x,y,p_1 \ldots p_n),\ y' = Y(x,y,p_1 \ldots p_n),\ p'_1 = P_1(x,y,p_1 \ldots p_n), \\ |XY| = \frac{d'X}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{d'Y}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial p_n} - P_1 \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0. \end{cases}$$

Setzen wir:

$$(16) \qquad \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - P_1 \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \equiv \varrho, \text{ so ist } \varrho \neq 0,$$

weil nach Satz IV: $\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \neq 0$ ist.

Aus $|XY| \equiv 0$ ergiebt sich leicht:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \sum_0^{n-2} \frac{\partial Y}{\partial p_x} \cdot p_{x+1} - P_1 \cdot \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + \sum_0^{n-2} \frac{\partial X}{\partial p_x} \cdot p_{x+1} \right\} \equiv - \varrho \cdot p_n .$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach p_n und subtrahiren sie dann von der Identität:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^{n-2} \frac{\partial f}{\partial p_x} \cdot p_{x+1} \equiv 0 \left(f = \frac{\partial Y}{\partial p_n} - P_1 \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0 \right),$$

so kommt:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \sum_0^{n-2} \frac{\partial X}{\partial p_x} \cdot p_{x+1} \right) \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} - \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \sum_0^{n-2} \frac{\partial P_1}{\partial p_x} \cdot p_{x+1} \right) \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv \varrho + p_n \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial p_n} .$$

Ausserdem folgt aus der Definitionsgleichung von ϱ und aus:

$$\frac{\partial Y}{\partial p_n} - P_1 \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0$$

leicht:

$$\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} - \frac{\partial P_1}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv - \frac{\partial \varrho}{\partial p_n},$$

also geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{d X}{d x} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} - \frac{d P_1}{d x} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv \varrho,$$

und analog wegen $|XY| \equiv 0$:

$$\frac{d Y}{d x} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} - \frac{d P_1}{d x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} \equiv \varrho \cdot \frac{\frac{\partial Y}{\partial p_n}}{\frac{\partial X}{\partial p_n}} \equiv \varrho \cdot P_1 .$$

Es ist demnach:

17) $$|XP_1| \equiv \varrho, \quad |YP_1| \equiv \varrho \cdot P_1 .$$

Soll nun die Transformation (15) die Eigenschaft haben, auch für $p_n = \frac{\frac{d P_1}{d x}}{\frac{d X}{d x}}$ einen von p_{n+1} freien Werth P_2 zu ergeben, so muss $\frac{\frac{d P_1}{d x}}{\frac{d X}{d x}} \equiv \frac{\frac{\partial P_1}{\partial p_n}}{\frac{\partial X}{\partial p_n}}$ oder $XP_1 \equiv 0$ sein, das ist aber nach dem Vorhergehenden unmöglich, so lange nicht $\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0$ ist und also nach Satz IV die Transformation (13) die Gestalt hat:

$$x' = X(x, y, p_1 \dots p_n), \quad y' = \overline{Y}(X).$$

Damit ist bewiesen, dass in keiner Transformation n. O. p_2' eine Function allein der Differentialquotienten, welche X und Y enthalten, sein kann.

Satz VIII. *„Es giebt keine Transformation n. O., welche Berührung n. O. von Curven der (xy) Ebene in Berührung von höherer als der ersten Ordnung auf der $(x'y')$ Ebene verwandelte."*

Zugleich giebt der eben ausgesprochene Satz die Antwort auf die Frage, welche Bäcklund in den Annalen Bd. IX, 297 ff. behandelt und erledigt hat, ob es Transformationen der ebenen Curven giebt, welche Berührung n. O. wieder in Berührung n. O. überführen, Berührung niederer Ordnung aber zerstören; wir finden mit Bäcklund, dass es solche Transformationen nicht giebt. Noch eine Folgerung können wir aus den Gleichungen (17) ziehen:

Satz IX. *„Jede Berührungstransformation n. O. ist nach p_{n-1}, p_n und einer von den übrigen Variablen $x, y, p_1 \dots p_{n-2}$ auflösbar."*

Beweis. Im entgegengesetzten Falle müssten alle Determinanten von der Form $\sum \pm \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \equiv 0$ sein $(t = x, y, p_1 \dots p_{n-1})$. Diese Gleichungen bezüglich mit $1, p_1 \dots p_n$ multiplicirt und addirt würden $\sum \pm \frac{d'X}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \equiv 0$ ergeben oder:

$$\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot |YP_1| - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot |XP_1| + \frac{\partial P_1}{\partial p_{n-1}} \cdot |XY| \equiv 0;$$

daraus würde

$$\frac{\varrho}{\frac{\partial X}{\partial p_n}} \cdot \left\{ \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \right\} \equiv 0$$

folgen, was ausgeschlossen ist.

Wir verlassen nun die Transformationen der ebenen Curven und wenden uns dazu, die Entwickelungen des § 1 auf die Räume höherer Dimensionen auszudehnen.

§ 3.

Die Lie'schen Berührungstransformationen im Raume von $n + 1$ Dimensionen.

Im Raume von $n + 1$ Dimensionen d. h. im Gebiete von $n + 1$ Variablen $(x_1 \dots x_n, z)$ sondert jede Gleichung $z = z(x_1 \dots x_n)$ ∞^n Punkte ab, sie stellt also eine Punktmannigfaltigkeit von n Dimensionen, eine M_n dar. Mit den Transformationen solcher M_n werden wir

uns hier beschäftigen und gehen zu diesem Behufe von ∞^m Punkttransformationen zwischen den Räumen:

$$R_{n+1} : (x_1 \ldots x_n, z) \text{ und } R'_{n+1} : (x_1' \ldots x_n', z')$$

aus; dieselben seien:

$$(1) \qquad \begin{cases} z' = Z(x_1 \ldots x_n, z, \lambda_1 \ldots \lambda_m), \\ x_i' = X_i(x_1 \ldots x_n, z, \lambda_1 \ldots \lambda_m) \\ \qquad (i = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Dabei sehen wir von den blossen Punktconstructionen vollständig ab, nehmen also $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \neq 0$ an, ausserdem mögen, wenn $f_1 \ldots f_m$ irgend m von den Functionen $X_1 \ldots X_n, Z$ bedeuten, nicht alle Determinanten von der Form $\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_m} \equiv 0$ sein und zwar wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \neq 0$ ist.

Wie in § 1 betrachten wir die Gesammtheit der Transformationen (1) als eine Abbildung des Raumes R_{n+1} auf R'_{n+1} und bemerken wieder, dass das Punktgebilde des R'_{n+1}, welches einer M_n des R_{n+1} entspricht, zwei verschiedene Auffassungen zulässt. Einmal nämlich ergiebt unter den gemachten Voraussetzungen jede einzelne der Transformationen (1) zu der $M_n : z = z(x_1 \ldots x_n)$ eine M_n' des R'_{n+1}, im Ganzen also liefern uns die ∞^m Punkttransformationen auch ∞^m verschiedene M_n', welche wir als die $M_n' : \lambda = \text{const.}$ bezeichnen können, ihre Gleichung $z' = z'(x_1' \ldots x_n', \lambda_1 \ldots \lambda_m)$ ergiebt sich durch Elimination von $x_1 \ldots x_n$ aus den Gleichungen (1), in denen $z = z(x_1 \ldots x_n)$ zu setzen ist.

Dagegen erhalten wir bei (1) zu jedem Punkte des R_{n+1} ∞^m Punkte des R'_{n+1} oder eine Mannigfaltigkeit von m Dimensionen, eine M'_m, so dass also auf diese Weise unserer M_n, die ja ∞^n Punkte enthält, ∞^n verschiedene M'_m entsprechen, welche die $M'_m : x = \text{const.}$ heissen mögen. In den Coordinaten $(x' z')$ werden diese M'_m durch die $n - m + 1$ Gleichungen: $f_\varrho(x_1' \ldots x_n', z', x_1 \ldots x_n, z(x_1 \ldots x_n)) = 0$ $(\varrho = 1 \ldots n - m + 1)$ dargestellt, welche sich bei den von uns gemachten Annahmen aus (1) durch Elimination von $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ ergeben. Hier stehen uns also wieder zwei Wege offen, um zu einer Umhüllungstransformation von (1) zu gelangen, indem wir einmal zu den $M_n' : \lambda = \text{const.}$, dann zu den $M'_m : x = \text{const.}$ die Umhüllungsgebilde aufsuchen und der betreffenden M_n des R_{n+1} zuordnen; beide Wege wollen wir einschlagen.

A) *Die $M_n' : \lambda = const.$* Fasst man $x_1 \ldots x_n$ als unabhängige Va-

riable auf, so bestimmen sich die $\frac{\partial z'}{\partial x_i'} = p_i'$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$ aus den Gleichungen:

$$\text{(2a)} \qquad \frac{dZ}{dx_\alpha} - \sum_1^n{}^i p_i' \cdot \frac{dX_i}{dx_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots n),$$

in welche die Bedingung $dz' - \sum_1^n{}^i p_i' \cdot dx_i' = 0$ nach Einführung der Gleichungen (1) zerfällt; unter $\frac{d}{dx_\alpha} f(x_1 \ldots x_n, z)$ wird dabei der Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$ verstanden. Um die Enveloppe der ∞^m M_n' herzustellen, haben wir in (1) für $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ derartige Functionen von $x_1 \ldots x_n$ einzusetzen, dass die so erhaltene M_n' alle die ∞^m M_n' und zwar jede derselben längs einer M_{n-m}' berührt oder, dass die neuen p_i' aus den alten hervorgehen, wenn man in diesen für $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ ihre Werthe setzt.

Sollen nun die Gleichungen für die neuen p_i':

$$\frac{dZ}{dx_\varkappa} - \sum_1^n{}^i p_i' \cdot \frac{dX_i}{dx_\varkappa} + \sum_1^m{}^\varrho \left\{ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_\varrho} - \sum_1^n{}^i p_i' \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varrho} \right\} \cdot \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial x_\varkappa} = 0$$

mit den Gleichungen (2a) verträglich sein, so muss werden:

$$\text{(3a)} \qquad \sum_1^m{}^\varrho \left\{ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_\varrho} - \sum_1^n{}^i p_i' \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varrho} \right\} \cdot \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial x_\varkappa} = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

Wären ferner $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$ nicht von einander unabhängig, so würde es Werthsysteme $(\lambda_1 \ldots \lambda_m)$ geben, zu welchen kein Werthsystem $(x_1 \ldots x_n)$ gehörte, d. h. es würden unter den ∞^m M_n' solche existiren, welche die gesuchte Umhüllungs-M_n' nicht berührten. Das geht nicht an, also können nicht alle Determinanten von der Form: $\sum \pm \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial \lambda_m}{\partial \xi_m} \equiv 0$ sein, wenn $\xi_1 \ldots \xi_m$ irgend m von den Variablen $x_1 \ldots x_n$ bedeuten. In Folge dessen reduciren sich die Gleichungen (3a) auf:

$$\text{(4a)} \qquad \frac{\partial Z}{\partial \lambda_\varrho} - \sum_1^n{}^i p_i' \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varrho} = 0 \quad (\varrho = 1 \ldots m).$$

Die zur gegebenen M_n gehörige M_n' ergiebt sich durch Elimination der x, λ, p' aus (1), (2a) und (4a) oder durch Elimination der x und der λ aus (1) und:

$$(5) \qquad \sum \pm \frac{dX_1}{dx_1} \cdots \frac{dX_n}{dx_n} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0 \quad (\varepsilon = 1 \ldots m),$$

überall ist natürlich $z = z(x_1 \ldots x_n)$ zu setzen.

B) ***Die*** $M'_m : x = const.$ Unser Bestreben wird selbstverständlich dahin gehen, auch hier zu einer solchen Umhüllungstransformation von (1) zu gelangen, welche jeder M_n des R_{n+1} wieder eine M'_n des R'_{n+1} zuordnet. Es handelt sich daher darum, ob die $M'_m : x = \text{const.}$ von einer M'_n eingehüllt werden und da es gerade ∞^n M'_m sind, liegt es nahe zu vermuthen, dass es eine M'_n giebt, die in jedem ihrer ∞^n Punkte eine der ∞^n M'_m berührt.

Was zunächst die M'_m betrifft, so sehen wir $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ und von den Variablen (x', z') etwa $x'_1 \ldots x'_m$ als die unabhängigen Variablen an; setzen wir dann: $\frac{\partial z'}{\partial x'_i} = q_i^0$, $\frac{\partial x'_\varkappa}{\partial x'_i} = q_i^\varkappa (i = 1 \ldots m,\ \varkappa = m+1 \ldots n)$ und verstehen ausserdem der Kürze wegen unter x'_0, X_0 bezüglich z', Z, so erhalten wir aus den Bedingungen:

$$dx'_\varkappa - \sum_1^m{}_i q_i^\varkappa \cdot dx_i = 0 \quad (\varkappa = 0, m+1 \ldots n)$$

die folgenden Gleichungen:

$$(2b) \qquad \frac{\partial X_\varkappa}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^m{}_i q_i^\varkappa \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0 \quad (\varepsilon = 1 \ldots m,\ \varkappa = 0, m+1 \ldots n)$$

woraus sich die $q_i^\varkappa$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$, $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ bestimmen, immer vorausgesetzt, dass $z = z(x_1 \ldots x_n)$ gesetzt wird.

Um andererseits aus den Gleichungen (1) eine M'_n der verlangten Art zu erhalten, werden wir $x_1 \ldots x_n$ als unabhängige Variable betrachten können und müssen dann $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ in passender Weise als ihre Functionen bestimmen, nämlich derart, dass in jedem Punkte $(x_1 \ldots x_n)$ der gesuchten M'_n eine auf derselben liegende M'_m vorhanden ist, welche die bei (1) zu $(x_1 \ldots x_n)$ gehörige M'_m in dem entsprechenden Punkte $(\lambda_1 \ldots \lambda_m)$ berührt. In der Hauptsache lassen sich alle M'_m, welche auf der gesuchten M'_n liegen, dadurch darstellen, dass für $x_{m+1} \ldots x_n$ Functionen von $x_1 \ldots x_m$ gesetzt werden, daher ergeben sich die Werthsysteme der $q_i^\varkappa$, welche zu diesen M'_m gehören aus den Gleichungen:

$$\sum_1^m{}_\varepsilon \left\{ \frac{\partial X_\varkappa}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^m{}_i q_i^\varkappa \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{d\lambda_\varepsilon}{dx_\alpha} + \frac{dX_\varkappa}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^n{}_\beta \frac{dX_\varkappa}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} -$$

$$- \sum_1^m{}_i q_i^\varkappa \cdot \left\{ \frac{dX_i}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^n{}_\beta \frac{dX_i}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \right\} = 0$$

$$(\alpha = 1 \ldots m, \quad \varkappa = 0, m+1 \ldots n).$$

Diese Gleichungen, in denen die λ als noch zu bestimmende Functionen von $x_1 \ldots x_n$ zu denken sind, liefern zu jedem Werthcomplex $\left(x_\alpha, x_\beta, \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}, \alpha = 1 \ldots m, \beta = m+1 \ldots n\right)$ Werthe der $q_i^\varkappa$. Eine M'_m, welche auf der zu findenden M'_n liegt, durch den Punkt $(x_1 \ldots x_n)$ geht und dort gewisse Werthe $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$ ergiebt, wird die zu $(x_1 \ldots x_n)$ gehörige von den ∞^n M'_m berühren, wenn für sie die letzten Gleichungen dieselben Werthe der $q_i^\varkappa$ liefern wie die Gleichungen (2b). Soll dies der Fall sein, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(3b)\quad \frac{dX_\varkappa}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^{n}{}_\beta \frac{dX_\varkappa}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} - \sum_{1}^{m}{}_i q_i^\varkappa \cdot \left\{ \frac{dX_i}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^{n}{}_\beta \frac{dX_i}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \right\} = 0$$

$$(\alpha = 1 \ldots m, \quad \varkappa = 0, m+1 \ldots n).$$

Unsere Aufgabe ist nunmehr die λ, $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$ und $q_i^\varkappa$ derart als Functionen von $x_1 \ldots x_n$ zu bestimmen, dass die Gleichungen (2b) und (3b) identisch erfüllt werden; dann nämlich erhalten wir aus (1) eine M'_n und in jedem Punkte derselben (etwa in $(x_1^0 \ldots x_n^0)$) giebt es M'_m, welche die $M'_m : (x_1^0 \ldots x_n^0)$ der $n$fachen Schaar von M'_m berühren d. h. mit ihr gleiche Werthe $(q_i^\varkappa)^0$ ergeben. Es ist sehr leicht eine solche M'_m anzugeben; denn gehören zu $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ die Werthe $\left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^0$, so genügt die M'_m:

$$x_\beta = x_\beta^0 + \sum_{1}^{m}{}_\alpha (x_\alpha - x_\alpha^0) \cdot \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^0 \quad (\beta = m+1 \ldots n)$$

allen Anforderungen, da sie mit der $M'_m : (x_1^0 \ldots x_n^0)$ in dem Punkte $(\lambda_1^0 \ldots \lambda_m^0)$ gleiche Werthe $(q_i^\varkappa)^0$ besitzt.

Die Zahl der Unbekannten λ, $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$, $q_i^\varkappa$ ist:

$$m + m(n-m) + m(n-m+1) = 2m \,.\, (n-m+1);$$

um dieselben zu finden, reichen die Gleichungen (2b) und (3b), ebenfalls $2m \,.\, (n-m+1)$ an der Zahl, gerade aus und wir wollen nun vor allen Dingen die λ als Functionen der $x_1 \ldots x_n$ bestimmen, denn das genügt, um die verlangte M'_n darzustellen. Schaffen wir aus (2b) und (3b) zunächst die $q_i^\varkappa$ fort, so kommen wir auf die Gleichungen:

$$\sum \pm \left(\frac{dX_\varkappa}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^{n}{}_\beta \frac{dX_\varkappa}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} = 0,$$

welche sich schreiben lassen:

$$(4b)\quad \begin{cases} \sum \pm \frac{dX_\varkappa}{dx_\alpha} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} + \sum_{m+1}^{n} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot \sum \pm \frac{dX_\varkappa}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} = 0 \\ (\alpha = 1 \ldots m, \quad \varkappa = 0, \quad m+1 \ldots n). \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen die λ und die $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$ und zwar erhalten wir für die λ allein folgende Gleichungen:

$$\Delta_\alpha = \sum \pm \left[\sum \pm \frac{dX_0}{dx_\alpha} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m}\right] \cdot \left[\sum \pm \frac{dX_{m+1}}{dx_{m+1}} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m}\right] \cdots$$

$$\cdots \left[\sum \pm \frac{dX_n}{dx_n} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m}\right] = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots m).$$

Vergleicht man mit Δ_α die Determinante:

$$D_\alpha = \sum \pm \frac{dZ}{dx_\alpha} \cdot \frac{dX_{m+1}}{dx_{m+1}} \cdots \frac{dX_n}{dx_n} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m},$$

so zeigt sich, dass:

$$\Delta_\alpha \cdot \sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \equiv D_\alpha \cdot \left[\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m}\right]^{n-m+1}$$

ist, wie sich leicht ergiebt, wenn man in D_α die $n - m + 1$ ersten Reihen Glied für Glied mit:

$$\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m}$$

multiplicirt und zu jeder dieser Reihen die m letzten Reihen addirt, nachdem man dieselben mit geeigneten Unterdeterminanten von bezüglich:

$$\sum \pm \frac{dX_\varkappa}{dx_i} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \quad (\varkappa = 0, m+1 \ldots n, \; i = \alpha, m+1 \ldots n)$$

multiplicirt hat.

Da nun $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \neq 0$ ist, gehen die Gleichungen $\Delta_\alpha = 0$ über in die Gleichungen $D_\alpha = 0$ $(\alpha = 1 \ldots m)$, welche ihrerseits wiederum den Gleichungen (2a) und (4a) zusammengenommen; also auch den Gleichungen (5) aequivalent sind. Wir können daher sagen: $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ bestimmen sich aus den Gleichungen (5), ausserdem ergeben noch die Gleichungen (4b) die Werthe der $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$, die Gleichungen (2b) die Werthe der $q_i^\varkappa$.

Da man für die λ bei A) und bei B) ein und dieselben Functionen von $x_1 \ldots x_n$ erhält, ist es klar, dass man hier wie dort zu derselben Umhüllungs-M_n', also auch zu derselben Umhüllungstransformation gelangt.

Die gefundene M_n' hüllt, wie wir wissen die ∞^n $M_m' : x = \text{const.}$ ein, aber sie besteht im allgemeinen keineswegs aus Systemen von M_m', welche in jedem ihrer Punkte eine der ∞^n $M_m' : x = \text{const.}$ berühren; soll dies der Fall sein, so müssen die aus (4b) folgenden Gleichungen $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = F_\alpha^\beta(x_1 \ldots x_n)$, als Differentialgleichungen angesehen, $x_{m+1} \ldots x_n$ als Functionen von $x_1 \ldots x_m$ bestimmen, das tritt nur dann ein, wenn $m \cdot (n - m)$, die Zahl dieser Differentialgleichungen $= n - m$ ist d. h. $=$ der Anzahl der unbekannten Functionen x_β. Beide Zahlen werden nur für $m = n$ und für $m = 1$ einander gleich, sonst ist immer die Anzahl der Gleichungen die grössere. Bei $m = n$ treten die $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$ gar nicht auf, die ∞^n $M_m' : x = \text{const.}$ sind ebensoviele M_n', welche offenbar eine Umhüllungs M_m' (M_n') besitzen; ist dagegen $m = 1$, so hat man $n - 1$ gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_\beta}{dx_1} = F_1^\beta(x_1 \ldots x_n) \quad (\beta = 2 \ldots n),$$

welche $x_2 \ldots x_n$ als Functionen von x_1 und $n - 1$ willkürlichen Constanten bestimmen, hier setzt sich daher unsere Umhüllungs M_n' aus den ∞^{n-1} Umhüllungs-M_1' der ∞^n $M_1' : x = \text{const.}$ zusammen.

Die gewonnenen Resultate können wir in folgender Verallgemeinerung des Satzes I, § 1 zusammenfassen:

Satz I. „*Die* ∞^m $M_n : v = \text{const.}$ *und die* ∞^n $M_m : u = \text{const.}$ *des Raumes* $x_1 \ldots x_{n+1}$, *welche durch* $n + 1$ *Gleichungen von der Form:*

$$x_i = X_i(u_1 \ldots u_n, v_1 \ldots v_m) \quad (i = 1 \ldots n + 1)$$

bestimmt sind, werden von ein und derselben M_n *eingehüllt.*“

Die wichtigste Frage ist nun offenbar die, ob $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p_1' \ldots p_n'$ sich aus den Gleichungen (2a) und (4a) wirklich als Functionen von $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ bestimmen.

Um dies zu entscheiden, stellen wir, da ja

$$\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \not\equiv 0$$

ist, aus den Gleichungen $X_\alpha = X_\alpha(x_1 \ldots x_n, z, \lambda_1 \ldots \lambda_m)$ $(\alpha = 1 \ldots m)$ die λ als Functionen von $x_1 \ldots x_n, z, X_1 \ldots X_m$ dar; dabei gehen die Gleichungen (1) über in:

$$(6)\qquad \begin{cases} x'_\alpha = X_\alpha(x_1 \cdots x_n, z, \lambda_1 \cdots \lambda_m), \\ x'_\beta = \overline{X}_\beta(x_1 \cdots x_n, z, X_1 \cdots X_m), \\ z' = \overline{Z}\ (x_1 \cdots x_n, z, X_1 \cdots X_m), \\ (\alpha = 1 \cdots m, \beta = m+1 \ldots n). \end{cases}$$

Statt der Gleichungen (4a) erhalten wir:

$$\sum_1^\alpha \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}_\alpha} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^\alpha p'_\alpha \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_{m+1}^\beta p'_\beta \cdot \sum_1^\alpha \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial \overline{X}_\alpha} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0$$

oder:

$$\sum_1^\alpha \left\{ \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}_\alpha} - p'_\alpha - \sum_{m+1}^\beta p'_\beta \cdot \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial \overline{X}_\alpha} \right\} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0 \quad (\varepsilon = 1 \ldots m)$$

und da $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \neq 0$ ist, folgt daraus:

$$(7)\qquad p'_\alpha = \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}_\alpha} - \sum_{m+1}^\beta p'_\beta \cdot \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial \overline{X}_\alpha} \quad (\alpha = 1 \ldots m).$$

Aus den Gleichungen (2a) aber wird:

$$\frac{d\overline{Z}}{dx_i} + \sum_1^\alpha \frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}_\alpha} \cdot \frac{dX_\alpha}{dx_i} - \sum_1^\alpha p'_\alpha \cdot \frac{dX_\alpha}{dx_i} - \sum_{m+1}^\beta p'_\beta \cdot \left\{ \frac{d\overline{X}_\beta}{dx_i} + \sum_1^\alpha \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial \overline{X}_\alpha} \cdot \frac{dX_\alpha}{dx_i} \right\} = 0,$$

mithin wegen (7):

$$(8)\qquad \frac{d\overline{Z}}{dx_i} - \sum_{m+1}^\beta p'_\beta \cdot \frac{d\overline{X}_\beta}{dx_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots n).$$

Da die Gleichungen (7), $p_1' \cdots p_m'$ als Functionen von $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p'_{m+1} \ldots p'_n$ darstellen, ist die Beantwortung unserer Frage auf die Untersuchung zurückgeführt, ob die Gleichungen (8), $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p'_{m+1} \ldots p'_n$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$, z, $p_1 \ldots p_n$ bestimmen oder was dasselbe ist, ob die Gleichungen:

$$-p_i = \frac{\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_i} - \sum_{m+1}^\beta p'_\beta \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial z} - \sum_{m+1}^\beta p'_\beta \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial z}} = \frac{M_i}{M} \quad (i = 1 \ldots n)$$

nach $X_1 \ldots X_m, p'_{m+1} \ldots p'_n$ auflösbar sind; dabei kann offenbar keiner der Ausdrücke $M, M_1 \ldots M_n \equiv 0$ sein, sonst würden ja die p_i gar nicht in den Gleichungen (8) vorkommen. Die Gleichungen $M_i + p_i \cdot M = 0$ sind nicht auflösbar, wenn:

$$\sum \pm \begin{vmatrix} M & M_1 \\ \frac{\partial M}{\partial X_1} & \frac{\partial M_1}{\partial X_1} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} M & M_m \\ \frac{\partial M}{\partial X_m} & \frac{\partial M_m}{\partial X_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M & M_{m+1} \\ \frac{\partial M}{\partial p'_{m+1}} & \frac{\partial M_{m+1}}{\partial p'_{m+1}} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} M & M_n \\ \frac{\partial M}{\partial p'_n} & \frac{\partial M_n}{\partial p'_n} \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist oder da $M \neq 0$ ist, wenn:

$$\Sigma \pm M \cdot \frac{\partial M_1}{\partial X_1} \cdots \frac{\partial M_m}{\partial X_m} \cdot \frac{\partial M_{m+1}}{\partial p'_{m+1}} \cdots \frac{\partial M_n}{\partial p'_n} \equiv 0.$$

Diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial M_n}{\partial X_1} & \frac{\partial M}{\partial X_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial M_1}{\partial X_m} & \cdots & \frac{\partial M_n}{\partial X_m} & \frac{\partial M}{\partial X_m} \\ \frac{\partial \overline{X}_{m+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \overline{X}_{m+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \overline{X}_{m+1}}{\partial z} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \overline{X}_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \overline{X}_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \overline{X}_n}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{Z}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \overline{Z}}{\partial x_n} & \frac{\partial \overline{Z}}{\partial z} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Setzt man:

$$\frac{\partial \overline{Z}}{\partial X_\alpha} - \sum_{m+1}^{n} p'_\beta \cdot \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial X_\alpha} = N_\alpha \ (\alpha = 1 \ldots m),$$

so wird:

$$\frac{\partial M}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial z}, \quad \frac{\partial M_i}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i}$$

und man erhält aus der letzten Gleichung:

$$(9) \qquad \sum \pm \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial N_m}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \overline{X}_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial \overline{X}_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \overline{Z}}{\partial z} \equiv 0$$

als Bedingung dafür, dass sich $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p_1' \ldots p_n'$ nicht als Functionen von (x, z, p) bestimmen.

Die Gleichung (9) sagt aus, dass sich $x_1 \ldots x_n, z$ aus $N_1 \ldots N_m$, $\overline{X}_{m+1} \cdots \overline{X}_n$, $\overline{Z}$ eliminiren lassen, dabei bleibt es jedoch unentschieden, ob diese Elimination sich erst bei Hinzuziehung aller $n+1$ Functionen oder schon mit einer geringeren Zahl dieser Functionen ausführen lässt; da es aber kein Interesse hat, alle die speciellen Fälle, in denen (9) besteht, wirklich aufzusuchen, wollen wir uns damit begnügen einen sehr allgemeinen Fall anzugeben.

(9) besteht nämlich offenbar immer, wenn sich $N_1 \cdots N_m$, $\overline{X}_{m+1} \cdots \overline{X}_n$, $\overline{Z}$ als Functionen von $X_1 \ldots X_m$ und $\varrho < n+1$ Functionen

$\varphi_1 \ldots \varphi_\varrho$ von $x_1 \ldots x_n, z$ darstellen lassen, dies tritt aber ein, wenn die Gleichungen (1) bei der Elimination von $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ auf $n - m + 1$ Gleichungen von der Form:

$$F_\gamma (x_1' \ldots x_n', z', \varphi_1 \ldots \varphi_\varrho) = 0 \quad (\gamma = 1 \ldots n - m + 1)$$

führen.

Abgesehen von diesen Ausnahmefällen erhalten wir daher, indem wir aus den $n + m$ Gleichungen (2a) und (4a), $\lambda_1 \ldots \lambda_m, p_1' \ldots p_n'$ bestimmen und ihre Werthe in (1) einsetzen, zu unsern ∞^m Punkttransformationen (1) als vollständige Umhüllungstransformation die nachstehende Lie'sche Berührungstransformation:

$$(11) \qquad \begin{cases} x_i' = \Xi_i (x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n), \\ z' = Z \ (x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n), \\ p_i' = \Pi_i (x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n), \\ \qquad (i = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Dabei ergeben die $n + 1$ ersten Gleichungen (11) bei der Elimination von $p_1 \ldots p_n$ gerade $n - m + 1$ Gleichungen zwischen (x, z, x', z').

Für $f = X_1 \ldots X_n', Z$ und entsprechend $\varphi = \Xi_1 \ldots \Xi_n, Z$ haben wir nun:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^m \frac{\partial f}{\partial \lambda_\varrho} \cdot \left\{ \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial z} \right\},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \sum_1^m \frac{\partial f}{\partial \lambda_\varrho} \cdot \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial p_i},$$

und hieraus finden wir bei Berücksichtigung der Gleichungen (2a) und (4a):

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \dfrac{\partial Z}{\partial z} - \sum_1^n \Pi_i \cdot \left\{ \dfrac{\partial \Xi_i}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \dfrac{\partial \Xi_i}{\partial z} \right\} = 0, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial p_\varkappa} - \sum_1^n \Pi_i \cdot \dfrac{\partial \Xi_i}{\partial p_\varkappa} = 0 \\ \qquad (\varkappa = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Das sind aber (cf. Ann. VIII p. 306) die Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (11) eine Lie'sche Berührungstransformation bilden. Also:

Satz II. „∞_m *Punkttransformationen des Raumes* R_{n+1}, *die keine blossen Punktconstructionen sind, besitzen immer eine Lie'sche Berührungstransformation als vollständige Umhüllungstransformation, wenn m von den Functionen* $X_1 \ldots X_n$ *i. B. auf die* λ *unabhängig sind und die Gleichung* (9) *nicht identisch erfüllt wird.*"

Wir betrachten nunmehr die Gleichungen (11) und (12) als allgemeine Definitionsgleichungen der Lie'schen Berührungstransformationen im Raume von $n+1$ Dimensionen und verlangen nur, dass die Elimination der p_i gerade $n-m+1$ Gleichungen zwischen (x, z, x', z') ergiebt und dass keine der Functionen $\Xi_1 \ldots \Xi_n$, Z sich durch die übrigen allein ausdrücken lässt. Unter diesen Voraussetzungen können wir (11) auf die Form bringen:

$$(11') \qquad \begin{cases} x_\alpha = \Xi_\alpha (x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n), \\ x'_\beta = \Xi'_\beta (x_1 \ldots x_n z, \Xi_1 \ldots \Xi_m), \\ z' = Z' (x_1 \ldots x_n, z, \Xi_1 \ldots \Xi_m) \\ (\alpha = 1 \ldots m, \quad \beta = m+1 \ldots n) \end{cases}$$

und es verschwinden dabei nicht alle Determinanten von der Form:

$$\sum \pm \frac{\partial \Xi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Xi_m}{\partial x_m},$$

wenn $x_1 \ldots x_m$ irgend m von den p_i bedeuten.

An Stelle der Gleichungen (12) erhalten wir, ähnlich wie die Gleichungen (7) und (8) aus (2a) und (4a) folgten:

$$(12') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z'}{\partial \Xi_\alpha} - \Pi_\alpha - \sum_{m+1}^{n_\beta} \Pi_\beta \cdot \dfrac{\partial \Xi'_\beta}{\partial \Xi_\alpha} \equiv 0, \\ \dfrac{\partial Z'}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \dfrac{\partial Z'}{\partial z} - \sum_{m+1}^{n_\beta} \Pi_\beta \cdot \left\{ \dfrac{\partial \Xi'_\beta}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \dfrac{\partial \Xi'_\beta}{\partial z} \right\} \equiv 0 \\ (\alpha = 1 \ldots m, \quad \varkappa = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Es ist nun sehr leicht (11') als eine vollständige Umhüllungstransformation darzustellen, man braucht nur:

$$\Xi_\alpha = \Phi_\alpha (x_1 \ldots x_n, z, \lambda_1 \ldots \lambda_m)$$

zu setzen $(\alpha = 1 \ldots m)$, wo die Φ_α willkürlich wählbare Functionen bedeuten, deren Wahl nur dadurch beschränkt wird, dass sie nach $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ auflösbar und mit $\Xi'_{m+1} \ldots \Xi'_n$, Z' zusammengenommen i. B. auf $x_1 \ldots x_n, z$ unabhängig sein müssen. Dann hat man die ∞^m Punkttransformationen:

$$(13) \qquad \begin{cases} x'_\alpha = \Phi_\alpha (x_1 \ldots x_n, z, \lambda_1 \ldots \lambda_m), \\ x'_\beta = \Xi'_\beta (x_1 \ldots x_n, z, \Phi_1 \ldots \Phi_m), \\ z' = Z' (x_1 \ldots x_n, z, \Phi_1 \ldots \Phi_m) \\ (\alpha = 1 \ldots m, \quad \beta = m+1 \ldots n) \end{cases}$$

und die Gleichungen zur Bestimmung der Umhüllungstransformation von (13) werden:

$$\frac{\partial Z'}{\partial \Phi_\alpha} - p'_\alpha - \sum_{m+1}^{n} p'_\beta \cdot \frac{\partial \Xi'_\beta}{\partial \Phi_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots m),$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial Z'}{\partial z} - \sum_{m+1}^{n} p'_\beta \cdot \left\{ \frac{\partial \Xi'_\beta}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial \Xi'_\beta}{\partial z} \right\} = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

Diese Gleichungen werden identisch erfüllt durch die Substitutionen: $\Phi_\alpha = \Xi_\alpha$, $p'_i = \Pi_i$, welche die Transformationen (13) wieder in die Lie'sche Berührungstransformation (11′) verwandeln und $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p'_1 \ldots p'_n$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n$ bestimmen; da ausserdem die Gleichungen (13) keine blossen Punktconstructionen darstellen, ist (11′) offenbar vollständige Umhüllungstransformation von (13) und damit ist der Satz gewonnen:

Satz III. *„Jede Lie'sche Berührungstransformation der M_n des R_{n+1} lässt sich auf unbegränzt viele Weisen als vollständige Umhüllungstransformation von ∞^m Punkttransformationen darstellen, wenn m eine von der Beschaffenheit der Berührungstransformation abhängige ganze Zahl $< n + 1$ bedeutet; von den $n + 1$ Gleichungen der ∞^m Punkttransformationen sind m fast unbeschränkt willkürlich wählbar.“*

Wir folgern hieraus wie in § 1., dass der Begriff „vollständige Umhüllungstransformation von ∞^m Punkttransformationen“ sich mit dem in (11) und (12) definirten Begriffe der Lie'schen Berührungstransformation vollkommen deckt. Wollen wir daher den bekannten Satz, dass die Lie'schen Berührungstransformationen eindeutig umkehrbar sind, auch von unserer Ableitung dieser Transformationen ausgehend nachweisen, so brauchen wir blos zu zeigen, dass die vollständige Umhüllungstransformation von ∞^m Punkttransformationen immer auflösbar und also eindeutig umkehrbar ist. Wir gehen dazu aus von der Form (6) der ∞^m Punkttransformationen und bemerken sofort, dass die Gleichungen (8) gestatten $p_1 \ldots p_n$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n, z, X_1 \ldots X_m, p'_{m+1} \ldots p'_n$ darzustellen:

$$(14) \qquad p_i = - \frac{\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_i} - \sum_{m+1}^{n} p'_\beta \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial z} - \sum_{m+1}^{n} p'_\beta \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial z}} \quad (i = 1 \ldots n).$$

Daraus geht hervor, dass die p_i sich auch als Functionen von:

$$x_1' \ldots x_n', z', p_1' \ldots p_n'$$

ausdrücken lassen, sobald dies nur mit $x_1 \ldots x_n, z, X_1 \ldots X_m$ der Fall ist. Nun ist aber $X_\alpha = x_\alpha$ $(\alpha = 1 \ldots m)$, also brauchen wir blos zu beweisen, dass die Gleichungen $x'_\beta = \overline{X}_\beta$, $z' = \overline{Z}$ $(\beta = m + 1 \ldots n)$ zusammen mit den Gleichungen (7) nach $x_1 \ldots x_n, z$ auflösbar sind. Die

Gleichungen (7) können wir nach der bei (9) angewandten Bezeichnung schreiben: $p'_\alpha = N_\alpha (\alpha = 1 \ldots m)$ und wir sehen daraus, dass sich $x_1 \ldots x_n, z$ immer bestimmen, wofern nicht (9) besteht d. h. also immer, wenn (6) eine vollständige Umhüllungstransformation besitzt.

Auch die Werthe der p_i in (14) können durch die Substitutionen: $X_\alpha = x'_\alpha (\alpha = 1 \ldots m)$, $x_1 \ldots x_n$, z Functionen von (x', z', p') offenbar nicht auf Constanten sich reduciren oder unbestimmt werden, da sie an und für sich weder constant noch unbestimmt sind.

Wir sehen also, dass die vollständige Umhüllungstransformation von ∞^m Punkttransformationen immer eindeutig umkehrbar ist oder:

Satz IV. „*Jede Lie'sche Berührungstransformation der M_n des R_{n+1} ist nach $x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n$ auflösbar, also eindeutig umkehrbar.*"

Damit ist die Ableitung der Lie'schen Berührungstransformationen aus den Punkttransformationen auch im Raume R_{n+1} vollständig durchgeführt, höchstens bliebe noch zu untersuchen, ob auch wirklich die Auflösungen der Umhüllungstransformation von (1) und die Umhüllungstransformation der Auflösungen von (1) mit einander übereinstimmen, doch wollen wir nicht auf diese Frage eingehen, zumal da wir leicht einsehen können, dass dieselbe mit „ja" zu beantworten ist.

Nämlich gewöhnlich lässt man die Lie'schen Berührungstransformationen aus $n - m + 1$ Gleichungen:

$$f_\varkappa (x_1' \ldots x_n', z', x_1 \ldots x_n, z) = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots n - m + 1)$$

entstehen und bestimmt $x_1' \ldots x_n', z', p_1' \ldots p_n'$ oder $x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n$ aus diesen und aus den Gleichungen:

$$\sum_1^{n-m+1} \varrho_\varkappa \cdot \{f'_\varkappa(x'_i) + p'_i \cdot f'_\varkappa(z')\} = 0,$$

$$\sum_1^{n-m+1} \varrho_\varkappa \cdot \{f'_\varkappa(x_i) + p_i \cdot f'_\varkappa(z)\} = 0$$

$$(i = 1 \ldots n).$$

Dabei werden weder die (x, z) noch die (x', z') bevorzugt und es ist daher offenbar gleichgültig, ob man die Gleichungen $f_\varkappa = 0$ durch die ∞^m Punkttransformationen (1) oder durch deren Auflösungen ersetzt; beide Male erhält man ein und dieselbe Lie'sche Berührungstransformation als Umhüllungstransformation. Nur kurz sei noch bemerkt, dass man bei unserer Ableitung der Lie'schen Berührungstransformationen aus Punkttransformationen stets weniger Gleichungen aufzulösen hat, als nach der gewöhnlichen Methode.

Es ist mir zur Zeit noch nicht möglich, die eben durchgeführten Entwickelungen auch auf die Transformationen höherer Ordnung der M_n des R_{n+1} auszudehnen, ebensowenig kann ich auf verschieden

interessante Fragen, welche bei den Transformationen höherer Ordnung der ebenen Curven auftreten, eingehen und muss daher diese Untersuchungen auf spätere Zeit verschieben. Der nachfolgende, letzte § giebt noch einen mit dem Vorhergehenden allerdings nicht in direktem Zusammenhang stehenden Beitrag zur Theorie der Berührungstransformationen überhaupt. Zwar hat man schon die Berührungstransformationen 1. O. der gewöhnlichen Raumcurven und überhaupt der Curven (M_1) des Raumes von n Dimensionen bestimmt, aber so allgemein wie in § 4 scheint die Bestimmung von Berührungstransformationen noch nicht ausgeführt worden zu sein.

§ 4.

Bestimmung aller Berührungstransformationen 1. O. der M_n des Raumes R_{n+m}.

Die Berührungstransformationen 1. O. der M_n des R_{n+m} müssen die Form haben:

$$\begin{cases} x'_\alpha = X_\alpha(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, p_i^\varkappa), \\ z'_\varrho = Z_\varrho(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, p_i^\varkappa), \\ q_\alpha^\varrho = Q_\alpha^\varrho(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, p_i^\varkappa) \\ (\varrho, \varkappa = 1 \ldots m; \quad \alpha, i = 1 \ldots n), \end{cases} \tag{1}$$

wenn x, x' die unabhängigen, z, z' die abhängigen Variablen sind,

$$\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_i} = p_i^\varkappa, \quad \frac{\partial z'_\varkappa}{\partial x'_i} = q_i^\varkappa$$

gesetzt wird und endlich das $p_i^\varkappa$ in den Functionen X_α, Z_ϱ, Q_α^ϱ bedeutet, dass alle Differentialquotienten p_i^n darin vorkommen. Im Folgenden sind natürlich immer $z_1 \ldots z_m$ und $z_1' \ldots z_m'$ als Functionen von bezüglich $x_1 \ldots x_n$ und $x_1' \ldots x_n'$ zu betrachten.

Aus den Gleichungen:

$$dz'_\varrho - \sum_1^n{}_\alpha \, q_\alpha^\varrho \cdot dx'_\alpha = 0$$

ergeben sich für die Functionen X_α, Z_ϱ, Q_α^ϱ sofort die Bedingungen:

$$\frac{dZ_\varrho}{dx_i} - \sum_1^n{}_\alpha \, Q_\alpha^\varrho \cdot \frac{dX_\alpha}{dx_i} = 0,$$

welche wiederum, weil die Q_α^ϱ nur Differentialquotienten 1. O. der z_ϱ enthalten sollen, in die Gleichungen zerfallen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z_\varepsilon}{\partial p_i^\varkappa} - \sum_1^n{}_\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \dfrac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^\varkappa} = 0 \quad (\varepsilon, \varkappa = 1 \cdots m), \\ \dfrac{d' Z_\varepsilon}{dx_i} - \sum_1^n{}_\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \dfrac{d' X_\alpha}{dx_i} = 0 \quad (\alpha, i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

wobei kurz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\lambda q_i^\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z_\lambda} = \frac{d' f}{dx_i}$$

gesetzt ist.

Die Gleichungen (2) zeigen zunächst, dass, wenn unter $\varkappa, \varkappa_1 \cdots \varkappa_n$, wie im Folgenden immer, irgend welche von den $p_i^\varkappa$ verstanden werden, alle Determinanten von der Form:

$$\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \varkappa_1} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial \varkappa_n} = 0$$

sein müssen, dass also in den Z_ε die $p_i^\varkappa$ nur in den Verbindungen $X_1 \ldots X_n$ auftreten können:

$$Z_\varepsilon = \overline{Z}_\varepsilon (x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, X_1 \ldots X_n) \quad (\varepsilon = 1 \ldots m).$$

Deshalb ist:

$$\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial p_i^\varkappa} = \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial \overline{Z}_\varepsilon}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^\varkappa}, \quad \frac{d' Z_\varepsilon}{dx_i} = \frac{d \overline{Z}_\varepsilon}{dx_i} + \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial \overline{Z}_\varepsilon}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{d' X_\alpha}{dx_i}$$

und an Stelle der Gleichungen (2) erhalten wir damit:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_1^n{}_\alpha \left(Q_\alpha^\varepsilon - \dfrac{\partial \overline{Z}_\varepsilon}{\partial X_\alpha} \right) \cdot \dfrac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^\varkappa} = 0 \quad (\varepsilon, \varkappa = 1 \ldots m), \\ \dfrac{d' \overline{Z}_\varepsilon}{dx_i} - \sum_1^n{}_\alpha \left(Q_\alpha^\varepsilon - \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial X_\alpha} \right) \cdot \dfrac{d' X_\alpha}{dx_i} = 0 \quad (\alpha, i = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Wollen wir diese Gleichungen vereinfachen, so müssen wir über die Beschaffenheit der Determinanten $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \varkappa_1} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial \varkappa_n}$ bestimmte Voraussetzungen machen: die allgemeinste Voraussetzung ist die, dass bei allen Determinanten der genannten Form die Unterdeterminanten n^{ten}, $n - 1^{\text{ten}} \ldots n - \mu + 1^{\text{ten}}$ Grades ausnahmslos $\equiv 0$ sind, während die vom Grade $n - \mu$ nicht sämmtlich verschwinden; dabei wollen wir aber gleich von vornherein den Fall $\mu = n$ ausschliessen, denn für $\mu = n$ würden alle Functionen $X_1 \ldots X_n$ von den $p_i^\varkappa$ frei sein und wir hätten es mit blossen Punkttransformationen zu thun.

Bei den getroffenen Festsetzungen lassen sich μ und nicht mehr als μ von den X als Functionen der übrigen und der Variablen (x, z) darstellen, etwa:

$$X_\alpha = \overline{X}_\alpha(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n) \quad (\alpha = 1 \ldots \mu)$$

und zwar verschwinden dann sicher nicht alle Determinanten:

$$\sum \pm \frac{\partial X_{\mu+1}}{\partial \pi_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial \pi_n},$$

sonst wäre ja im Widerspruch mit dem eben gesagten auch noch $X_{\mu+1}$ eine Function von

$$x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+2} \ldots X_n.$$

Weiter ist:

$$\overline{Z}_\varrho = Z_\varrho(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n)$$

und verstehen wir im Folgenden unter:

$$\frac{d}{dx_i} f(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n)$$

den Ausdruck:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m p_i^\varrho \cdot \frac{\partial f}{\partial z_\varrho},$$

so ist für $\alpha = 1 \cdots \mu$:

$$\frac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^\varkappa} = \sum_{\mu+1}^n{}^\beta \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^\varkappa}, \qquad \frac{d' X_\alpha}{dx_i} = \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} + \sum_{\mu+1}^n{}^\beta \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i}$$

und ausserdem:

$$\sum_1^n{}^\alpha \frac{\partial \overline{Z}_\varrho}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^\varkappa} = \sum_{\mu+1}^n{}^\beta \frac{\partial Z_\varrho}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^\varkappa},$$

$$\frac{d' \overline{Z}_\varrho}{dx_i} + \sum_1^n{}^\alpha \frac{\partial \overline{Z}_\varrho}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{d' X_\alpha}{dx_i} = \frac{dZ_\varrho}{dx_i} + \sum_{\mu+1}^n{}^\beta \frac{\partial Z_\varrho}{\partial X_\beta} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i}.$$

Durch Einführung dieser Relationen nehmen die Gleichungen (3) die Gestalt an:

$$\sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varrho \cdot \sum_{\mu+1}^n{}^\beta \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^\varkappa} + \sum_{\mu+1}^n{}^\beta Q_\beta^\varrho \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^\varkappa} - \sum_{\mu+1}^n{}^\beta \frac{\partial Z_\varrho}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^\varkappa} = 0,$$

$$\frac{dZ_\varrho}{dx_i} + \sum_{\mu+1}^n{}^\beta \frac{\partial Z_\varrho}{\partial X_\beta} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varrho \cdot \left\{ \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} + \sum_{\mu+1}^n{}^\beta \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i} \right\} -$$

$$- \sum_{\mu+1}^n{}^\beta Q_\beta^\varrho \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i} = 0.$$

Dafür lässt sich übersichtlicher schreiben:

$$\sum_{\mu+1}^{n}{}_{\beta}\left\{Q_\beta^\varepsilon - \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial X_\beta} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta}\right\} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^\varkappa} = 0,$$

$$\frac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \sum_{1}^{\mu}{}_{\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} - \sum_{\mu+1}^{n}{}_{\beta}\left\{Q_\beta^\varepsilon - \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial X_\beta} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta}\right\} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i} = 0$$

$$(\varepsilon, \varkappa = 1 \ldots m,\ i = 1 \cdots n),$$

und erinnert man sich, dass nicht alle Determinanten:

$$\sum \pm \frac{\partial X_{\mu+1}}{\partial \pi_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial \pi_n}$$

identisch verschwinden, so kommt man sofort auf die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} Q_\beta^\varepsilon - \dfrac{\partial Z_\varepsilon}{\partial X_\beta} + \displaystyle\sum_{1}^{\mu}{}_{\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} = 0, \\ \dfrac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \displaystyle\sum_{1}^{\mu}{}_{\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0 \\ (\varepsilon = 1 \ldots m,\ i = 1 \ldots n,\ \beta = \mu+1 \ldots n). \end{cases}$$

Aus alledem sehen wir, dass die gesuchten Berührungstransformationen nur die Form haben können:

$$(5)\qquad \begin{cases} x'_\alpha = \overline{X}_\alpha(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n), \\ x'_\beta = X_\beta(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ p_i^\varkappa), \\ z'_\varepsilon = Z_\varepsilon(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n), \\ q_\alpha^\varepsilon = Q_\alpha^\varepsilon(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ p_i^\varkappa), \\ q_\beta^\varepsilon = \dfrac{\partial Z_\varepsilon}{\partial X_\beta} - \displaystyle\sum_{1}^{\mu}{}_{\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \\ (\alpha = 1 \ldots \mu,\ \beta = \mu+1 \ldots n,\ \varepsilon = 1 \ldots m), \end{cases}$$

worin die $\overline{X}_\alpha$, X_β, Z_ε und Q_α^ε noch derart zu bestimmen sind, dass die Gleichungen:

$$6)\qquad \frac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \sum_{1}^{\mu}{}_{\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots n,\ \varepsilon = 1 \ldots m)$$

befriedigt werden. Dabei kann μ einen der Werthe $0, 1 \ldots n-1$ haben und zwar sind für $\mu = 0$ die $\sum_{1}^{\mu}{}_{\alpha}$ bei (5) und bei (6) durch Null zu ersetzen.

Bei Elimination der Q_α^ε aus den Gleichungen (6) erhalten wir $n-\mu$ Gleichungen für jedes Z_ε und haben deren allgemeinste Lösung aufzusuchen, worauf dann die Gleichungen (6) sich für jedes ε auf μ Gleichungen reduciren, welche die $Q_\alpha^\varepsilon (\alpha = 1 \ldots \mu)$ bestimmen.

Wir können ohne Weiteres $n+\mu+1$ Functionen $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, $X_{\mu+1} \ldots X_n$, Z_1, $Q_1^1 \ldots Q_\mu^1$ angeben, welche den Gleichungen (6) für $\varepsilon = 1$ genügen, wir brauchen nur $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, Z_1 als willkürliche Functionen ihrer Argumente (x, z, X_β) anzusehen, aus den Gleichungen (6) $(\varepsilon = 1)$ die Q_α^1 zu eliminiren und nunmehr die X_β als Functionen von (x, z, p_i^x) zu bestimmen, worauf sich aus (6) die Werthe der Q_α^1 ergeben. Bei besonderer Beschaffenheit der Functionen $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, Z_1 kann es vorkommen, dass die Gleichungen (6) $(\varepsilon = 1)$ nicht alle Unbekannten Q_α^1, X_β bestimmen, es ist dann die Determinante:

$$\sum \pm \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} \cdot \frac{d}{dx_{\mu+1}} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \overline{X}_{\mu+1}} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial \overline{X}_{\mu+1}} \right) \cdots$$

$$\cdots \frac{d}{dx_n} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \overline{X}_n} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial \overline{X}_n} \right) = 0,$$

oder also $\overline{X}_1 \cdots \overline{X}_\mu$, $\frac{\partial Z_1}{\partial \overline{X}_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial Z_1}{\partial X_n}$ sind Functionen von $f_1(x, z) \ldots f_\nu(x, z)$, $X_{\mu+1} \ldots X_n$ allein, wo $\nu < n$ ist und wir natürlich voraussetzen dürfen, dass nicht alle Determinanten $\sum \pm \frac{df_1}{d\xi_1} \cdots \frac{df_\nu}{d\xi_\nu} \equiv 0$ sind $(\xi_1 \ldots \xi_\nu$ irgend ν der Variablen $x_1 \ldots x_n)$.

Für Z_1 selbst finden wir: $\chi(x, z) + F_1(f_1 \ldots f_\nu, X_{\mu+1} \ldots X_n)$ und erhalten aus den Gleichungen (6) $(\varepsilon = 1)$:

$$\frac{d\chi}{dx_i} + \sum_1^\nu{}^\gamma \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_\gamma} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} \right) \cdot \frac{df_\gamma}{dx_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots n),$$

woraus folgt:

$$\sum \pm \frac{d\chi}{dx_\delta} \cdot \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_\nu}{dx_\nu} = 0 \quad (\delta = \nu + 1 \ldots n).$$

Hieraus schliessen wir, dass χ auch eine Function von $f_1 \ldots f_\nu$ ist, also mit F_1 verschmolzen oder $= 0$ gesetzt werden kann. Wegen der Eigenschaften der Determinanten $\sum \pm \frac{df_1}{d\xi_1} \cdots \frac{df_\nu}{d\xi_\nu}$ kommen wir daher auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_\gamma} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1 \ldots \nu).$$

Wir bemerken zunächst, dass nur die Fälle $\nu \geq \mu$ in Betracht kommen können, denn wäre $\nu < \mu$, so bestände zwischen den Functionen $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, $X_{\mu+1} \ldots X_n$ allein wenigstens eine Relation, was damit unverträglich ist, dass $x_1' \ldots x_n'$ die unabhängigen Variablen sind.

Aus den letzten Gleichungen lassen sich, da $\nu \geq \mu$ ist, die Q_α^ε immer als Functionen von $f_1 \ldots f_\nu$, $X_{\mu+1} \ldots X_n$ darstellen und wir erhalten noch $\nu - \mu$ Gleichungen:

$$(A) \qquad \sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_\xi} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial f_\mu} = 0 \quad (\xi = \mu+1 \ldots \nu),$$

aus welchen sich noch etwa $X_{\mu+1} \ldots X_\nu$ als Functionen von $f_1 \ldots f_\nu$, $X_{\nu+1} \ldots X_\nu$ bestimmen, während $X_{\nu+1} \ldots X_n$ willkürliche Functionen ihrer Argumente (x, z, p_i^x) bleiben.

Aus (6) erhalten wir jetzt:

$$\frac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \sum_1^\nu \frac{df_\gamma}{dx_i} \cdot \sum_1^\mu Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} = 0 \quad (i = 1 \ldots n,\ \varepsilon = 2 \ldots m)$$

und somit:

$$\sum \pm \frac{dZ_\varepsilon}{dx_\delta} \cdot \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_\nu}{dx_\nu} = 0 \quad (\delta = \nu+1 \ldots n,\ \varepsilon = 2 \ldots m),$$

woraus folgt:

$$Z_\varepsilon = F_\varepsilon(f_1 \ldots f_\nu,\ X_{\mu+1} \ldots X_n).$$

Jetzt zeigt sich, dass ν jedenfalls $> \mu$ sein muss; denn wäre $\nu = \mu$, so liessen sich $Z_1 \ldots Z_m$ alle als Functionen von $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$ allein darstellen und von einer Transformation wäre gar nicht mehr die Rede.

Unsere letzten Gleichungen gehen nunmehr über in:

$$\sum_1^\nu \frac{df_\gamma}{dx_i} \cdot \left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial f_\gamma} - \sum_1^\mu Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} \right) = 0 \quad (\varepsilon = 2 \ldots m,\ i = 1 \ldots n),$$

woraus:

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial f_\gamma} - \sum_1^\mu Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} = 0 \quad (\varepsilon = 2 \ldots m,\ \gamma = 1 \ldots \nu).$$

Diese Gleichungen bestimmen alle Q_α^ε und ergeben ausserdem für jedes F_ε die $\nu - \mu$ Bedingungen:

$$\sum \pm \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial f_\xi} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial f_\mu} = 0 \quad (\xi = \mu+1 \ldots \nu).$$

Wir wollen uns nicht dabei aufhalten, die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen aufzusuchen und bemerken nur, dass dieselbe die Form hat:

$$F_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(Z_1, \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu, X_{\mu+1} \ldots X_n),$$

so dass wir als allgemeine Lösung der Gleichungen (6) erhalten:

$$(B) \quad \begin{cases} x_\alpha' = \overline{X}_\alpha(f_1 \ldots f_\nu, X_{\mu+1} \ldots X_n) & (\alpha = 1 \ldots \mu), \\ x_\xi' = X_\xi(f_1 \ldots f_\nu, X_{\nu+1} \ldots X_n) & (\xi = \mu+1 \ldots \nu), \\ x_\delta' = X_\delta(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, p_i^\varkappa) & (\delta = \nu+1 \ldots n), \\ z_1' = Z_1(f_1 \ldots f_\nu, X_{\mu+1} \ldots X_n), & \\ z_\varepsilon' = Z_\varepsilon(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu, Z_1) & (\varepsilon = 2 \ldots m), \end{cases}$$

wo die $\overline{X}_\alpha$, X_δ, Z_1, Z_ε willkürliche Functionen ihrer Argumente sind, während die X_ξ sich aus (A) bestimmen.

Wir schreiten jetzt zur Betrachtung des allgemeinen Falles, dass die Gleichungen (6) ($\varepsilon = 1$) die Q_α^1 und X_β alle bestimmen und schreiben die Gleichungen, aus welchen sich die X_β direct ergeben, etwa folgendermassen:

$$(7) \qquad \sum \pm \frac{dZ_1}{dx_\beta} \cdot \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} = 0 \quad \cdot (\beta = \mu+1 \ldots n).$$

Es leuchtet ein, dass unter diesen Voraussetzungen aus den Gleichungen: $X_{\mu+1} = c_{\mu+1} \ldots X_n = c_n$ sich $n - \mu$ $p_i^\varkappa$ mit lauter verschiedenen Indices i bestimmen lassen. Wäre dies nämlich nicht der Fall, gehörten $i = 1 \ldots \mu + 1$ nicht zu den Indices i der $n - \mu$ bestimmten $p_i^\varkappa$, so müsste die Gleichung:

$$\sum \pm \frac{dZ_1}{dx_{\mu+1}} \cdot \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} = 0$$

an und für sich identisch bestehen, denn dieselbe wird zur Identität für die gefundenen Werthe von $X_{\mu+1} \ldots X_n$, sie muss also identisch bleiben, wenn man für jene $n - \mu$ $p_i^\varkappa$ ihre Werthe setzt, wobei sich die Functionen X_β bezüglich auf c_β reduciren, während ausserhalb der X_β jene $p_i^\varkappa$ gar nicht in der Gleichung vorkommen.

Die Gleichung:

$$\sum \pm \frac{dZ_1}{dx_{\mu+1}} \cdot \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} = 0$$

kann aber gar nicht an und für sich identisch bestehen, wenn wirklich die Gleichungen (6) ($\varepsilon = 1$) alle Unbekannten Q_α^1, X_β bestimmen. Deshalb können wir also annehmen, aus den Gleichungen $X_\beta = c_\beta$ ($\beta = \mu+1 \ldots n$) ergebe sich $p_\beta^m = \varphi_\beta^m$ ($\beta = \mu + 1 \ldots n$), die Indices $\varkappa$ sind dabei der Einfachheit halber alle $= m$ gewählt; sollten sie nicht alle $= m$ sein, so ändert das an den folgenden Betrachtungen wenig, am Resultate gar nichts. Unsere Aufgabe ist jetzt die Z_ε als von den $p_i^\varkappa$ freie Functionen von (x, z, c) derart zu bestimmen, dass sie die Gleichungen:

$$\sum \pm \left\{ \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x_\beta} + \sum_1^{m-1} p_\beta^\lambda \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_\lambda} + \varphi_\beta^m \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \right\} \cdot \frac{dX_1}{dx_1} \cdots \frac{d\bar{X}_\mu}{dx_\mu} = 0$$

$$(\beta = \mu + 1 \ldots n)$$

befriedigen, Gleichungen, welche für $\varepsilon = 1$ schon identisch bestehen.

Wir schreiben diese Gleichungen folgendermassen:

$$(7') \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \pm \left[\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x_\beta} + \sum_1^{m-1} p_\beta^\lambda \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_\lambda} \right] \cdot \left[\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \sum_1^m p_1^\lambda \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial z_\lambda} \right] \cdots \\ &\qquad \cdots \left[\frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu} + \sum_1^m p_\mu^\lambda \cdot \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial z_\lambda} \right] + \\ &+ \varphi_\beta^m \cdot \sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \cdot \left[\frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} + \sum_1^m p_1^\lambda \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial z_\lambda} \right] \cdots \\ &\qquad \cdots \left[\frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu} + \sum_1^m p_\mu^\lambda \cdot \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial z_\lambda} \right] = 0 \\ &(\beta = \mu + 1 \ldots n); \end{aligned} \right.$$

setzen wir alle hierin vorkommenden $p_i^x = 0$, so kommt:

$$\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu} + (\varphi_\beta^m)^0 \cdot \sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Differentiiren wir (7) nach $p_\beta^\lambda (\lambda = 1 \ldots m-1)$ und setzen dann alle $p_i^x = 0$, so folgt:

$$\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu} + \left(\frac{\partial \varphi_\beta^m}{\partial p_\beta^\lambda} \right)^0 \cdot \sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Alle diese Gleichungen bestehen für $\varepsilon = 1$ schon identisch, wir erhalten daher für Z_ε folgende Gleichungen:

$$\frac{\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu}}{\sum \pm \frac{\partial Z_1}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu}} = \frac{\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu}}{\sum \pm \frac{\partial Z_1}{\partial z_\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu}} =$$

$$= \frac{\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu}}{\sum \pm \frac{\partial Z_1}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \bar{X}_\mu}{\partial x_\mu}}$$

$$(\beta = \mu + 1 \ldots n, \ \lambda = 1 \ldots m).$$

Das sind $m+n-\mu-1$ lineare, von einander unabhängige Differentialgleichungen für Z_ε, welche befriedigt sein müssen, wenn (7′) bestehen soll. Die Zahl der unabhängigen Variablen (x, z) ist $m+n$, also besitzen diese Gleichungen nicht mehr als $\mu+1$ unabhängige Lösungen, die wir wirklich angeben können: $Z_\varepsilon = Z_1$, $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$. Die allgemeine Lösung ist daher:

$$Z_\varepsilon = F(Z_1, \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu, c_{\mu+1} \ldots c_n),$$

eine Lösung, welche offenbar auch die Gleichungen (7) erfüllt. Wir ersehen daraus, dass die allgemeinste Lösung der Gleichungen (6) die Form hat:

$$Z_\varepsilon = Z'_\varepsilon(Z_1, \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu, X_{\mu+1} \ldots X_n).$$

Die Gleichungen (6) gehen dabei über in:

$$(8) \qquad \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{dZ_1}{dx_i} - \sum_1^\mu{}^\alpha \left\{ Q_\alpha^\varepsilon - \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} \right\} \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0 \quad (\varepsilon = 2 \ldots m),$$

und vergleicht man damit:

$$\frac{dZ_1}{dx_i} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0,$$

so folgt:

$$Q_\alpha^\varepsilon \equiv \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} + Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \quad (\varepsilon = 2 \ldots m,\ \alpha = 1 \ldots \mu).$$

Ausserdem wird aus (5):

$$q_\beta^1 = \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \quad (\beta = \mu+1 \ldots n),$$

$$(8') \qquad q_\beta^\varepsilon = \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} + \sum_1^\mu{}^\alpha \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta},$$

$$q_\beta^\varepsilon = \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} + \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial Z}{\partial Z_1},$$

$$q_\beta^\varepsilon = \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta} + Q_\beta^1 \cdot \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1}$$

$$(\varepsilon = 2 \ldots m).$$

Fassen wir mit dem eben Gefundenen das Resultat der Untersuchung des speciellen Falles, in welchem die Gleichungen (6) ($\varepsilon = 1$) nicht alle Unbekannten Q_α^1, X_β bestimmen, soweit als möglich zusammen, so finden wir, dass die allgemeinste Form der Berührungstransformationen der M_n des R_{n+m} die folgende ist:

$$(9)\quad \begin{cases} x'_\alpha = \overline{X}_\alpha(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n), \\ x'_\beta = X_\beta(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ p_i^x), \\ z'_1 = Z_1(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n), \\ z'_\varepsilon = Z'_\varepsilon(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu,\ X_{\mu+1} \ldots X_n,\ Z_1), \\ (\alpha = 1 \ldots \mu,\ \beta = \mu+1 \ldots n,\ \varepsilon = 2 \ldots m). \end{cases}$$

Hierbei ist μ irgend eine der Zahlen $0, 1 \ldots n-1$; $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, Z_1, $Z_2' \ldots Z_m$ sind willkürliche Functionen ihrer Argumente und $X_{\mu+1} \ldots X_n$, sowie auch $Q_1^1 \ldots Q_\mu^1$ bestimmen sich aus den Gleichungen (6) und (7) ($\varepsilon = 1$).

Ausserdem wird noch:

$$(10)\quad \left.\begin{cases} q_\alpha^1 = Q_\alpha^1(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ p_i^x), \\ q_\alpha^\varepsilon = \dfrac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} + Q_\alpha^1 \cdot \dfrac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1}, \\ q_\beta^1 = \dfrac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial \overline{X}_\beta}, \\ q_\beta^\varepsilon = \dfrac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta} + Q_\beta^1 \cdot \dfrac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1}, \end{cases}\right\} \frac{dZ_1}{dx_i} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0.$$

$$(\alpha = 1 \ldots \mu,\ \beta = \mu+1 \ldots n,\ \varepsilon = 2 \ldots m,\ i = 1 \ldots n).$$

Die Transformation (9) ergiebt die $m-1$ von den (x, z) freien Gleichungen: $z'_\varepsilon = Z'_\varepsilon(x_1' \ldots x_n', z_1')$ $(\varepsilon = 2 \ldots m)$ und diese Gleichungen stellen offenbar eine M'_{n+1} des R'_{n+m} dar. Wir sehen daher, dass alle Berührungstransformationen der M_n des R_{n+m} alle M_n des R_{n+m} in solche M'_n des R'_{n+m} verwandeln, die auf ein und derselben M'_{n+1} liegen, d. h. es giebt ausser den gewöhnlichen Punkttransformationen keine eindeutig umkehrbaren Berührungstransformationen, welche alle M_n des R_{n+m} in alle M'_n des R'_{n+m} und umgekehrt überführten. Will man eine eindeutig umkehrbare Transformation haben, so muss man zwischen den Variablen (x, z) allein noch $m-1$ Gleichungen festsetzen, d. h. es giebt nur solche eindeutig umkehrbare Berührungstransformationen der M_n des R_{n+m}, welche die M_n einer M_{n+1} des R_{n+m} in die M'_n einer M'_{n+1} des R'_{n+m} verwandeln, oder eindeutigumkehrbare Berührungstransformationen von M_n sind ausser den Punkttransformationen nur die Lie'schen Berührungstransformationen der M_n eines Raumes von $n+1$ Dimensionen.

Es ist nicht schwer die Gleichungen zur Bestimmung der Berührungstransformationen auf eine elegantere Form zu bringen. Diejenigen unter den Gleichungen (9) nämlich, welche von den p_i^x frei sind,

lassen sich offenbar ersetzen durch ein System Gleichungen von der Form:

$$(11)\quad \begin{cases} F_\gamma(x_1' \ldots x_n', z_1' \ldots z_m') = 0, \\ \Psi_\delta(x_1' \ldots x_n', z_1' \ldots z_m', x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m) = 0, \\ (\gamma = 1 \ldots m-1,\ \delta = 1 \ldots \mu+1), \end{cases}$$

woraus die betreffenden Gleichungen (9) sich durch Auflösung nach:

$$z_2' \ldots z_m' \quad \text{und} \quad x_1' \ldots x_\mu',\ z_1'$$

ergeben.

Die Gleichungen (10) bestimmen nun noch $x_{\mu+1}' \ldots x_n'$ und die $q_i^\varkappa$; wollen wir daher die Transformationen (9) aus Gleichungen von der Form (11) ableiten, so ist es nur nöthig die Gleichungen (10) so umzuformen, dass die Functionen X, Z nicht mehr darin vorkommen, dass vielmehr bloss F und Ψ noch auftreten. Eine Anzahl Gleichungen für die $q_i^\varkappa$ ergiebt sich sofort aus (11), nämlich:

$$\frac{dF_\gamma}{dx_i'} = 0 \quad (\gamma = 1 \ldots m-1,\ i = 1 \ldots n).$$

Weiter liefert das Verhältniss der Gleichungen (9) und (11) zu einander folgende Identitäten:

$$\Psi_\delta(\bar{X}_1 \ldots \bar{X}_\mu, X_{\mu+1} \ldots X_n, Z_1, Z_2' \ldots Z_m', x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m) \equiv 0$$
$$(\delta = 1 \ldots \mu+1),$$

welche für jeden Werth von:

$$X_{\mu+1} \ldots X_n,\ x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m$$

stattfinden.

Diese Gleichungen ergeben nach x_i und X_β differentiirt, wobei natürlich $z_1 \ldots z_m$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$ zu betrachten sind:

$$\frac{d\Psi_\delta}{dx_i} + \sum_1^\mu{}_\alpha \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \bar{X}_\alpha} + \sum_2^m{}_\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial \bar{X}} \right\} \cdot \frac{d\bar{X}_\alpha}{dx_i} +$$
$$+ \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_1} + \sum_2^m{}_\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial Z_1} \right\} \cdot \frac{dZ_1}{dx_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_\delta}{\partial X_\beta} + \sum_2^m{}_\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial X_\beta} + \sum_1^\mu{}_\alpha \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \bar{X}_\alpha} + \sum_2^m{}_\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial \bar{X}_\alpha} \right\} \cdot \frac{\partial \bar{X}_\alpha}{\partial X_\beta} +$$
$$+ \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_1} + \sum_2^m{}_\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial Z_1} \right\} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} = 0$$
$$(\delta = 1 \ldots \mu+1,\ \beta = \mu+1 \ldots n,\ i = 1 \ldots n).$$

Beachtet man nun, dass aus den Gleichungen (8) und (8′) folgt:

$$\sum_1^{\mu_\alpha} \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \bar{X}_\alpha} \cdot \frac{d\bar{X}_\alpha}{dx_i} + \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{dZ_1}{dx_i} = \sum_1^{\mu_\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{d\bar{X}_\alpha}{dx_i},$$

$$\sum_1^{\mu_\alpha} \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \bar{X}_\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{X}_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} \equiv Q_\beta^\varepsilon + \sum_1^{\mu_\alpha} Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \bar{X}_\alpha}{\partial X_\beta} - \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta}$$

$$(i = 1 \ldots n,\ \varepsilon = 2 \ldots m,\ \beta = \mu + 1 \ldots n),$$

so erhält man statt der letzten Gleichungen die folgenden:

$$\frac{d\Psi_\delta}{dx_i} + \sum_1^{\mu_\alpha} \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \bar{X}_\alpha} + \sum_2^m Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{d\bar{X}_\alpha}{dx_i} + \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_1} \cdot \frac{dZ_1}{dx_i} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_\delta}{\partial X_\beta} + \sum_2^m Q_\beta^\varepsilon \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} + \sum_1^{\mu_\alpha} \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \bar{X}_\alpha} + \sum_2^m Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{\partial \bar{X}_\alpha}{\partial X_\beta} +$$

$$+ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} \equiv 0.$$

Verbindet man damit die Relationen (cf. (10)):

$$\frac{dZ_1}{dx_i} \equiv \sum_1^{\mu_\alpha} Q_\alpha^1 \cdot \frac{d\bar{X}_\alpha}{dx_i},$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} \equiv Q_\beta^1 + \sum_1^{\mu_\alpha} Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \bar{X}_\alpha}{\partial X_\beta},$$

so bekommt man:

$$\frac{d\Psi_\delta}{dx_i} + \sum_1^{\mu_\alpha} \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \bar{X}_\alpha} + \sum_1^m Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{d\bar{X}_\alpha}{dx_i} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_\delta}{\partial X_\beta} + \sum_1^m Q_\beta^\varepsilon \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} + \sum_1^{\mu_\alpha} \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \bar{X}_\alpha} + \sum_1^m Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{\partial \bar{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \equiv 0,$$

wo $Z_1' = Z_1$ ist,

$$(\delta = 1 \ldots \mu + 1,\ \beta = \mu + 1 \ldots n,\ i = 1 \ldots n).$$

Um hieraus noch die Differentialquotienten der $\bar{X}_\alpha$ wegzuschaffen, brauchen wir blos die letzten Gleichungen bezüglich mit Factoren ϱ_δ zu multipliciren, nach δ von 1 bis $\mu + 1$ zu summiren und dann

die ϱ_ϑ so zu bestimmen, dass die μ verschiedenen Factoren der $\frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i}$ und der $\frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta}$ verschwinden. So kommen wir auf die Gleichungen:

$$\sum_1^{\mu+1}{}_\vartheta \varrho_\vartheta \cdot \left\{ \frac{\partial \Psi_\vartheta}{\partial \overline{X}_\alpha} + \sum_1^m{}_s \frac{\partial \Psi_\vartheta}{\partial \overline{Z}_s} \cdot Q_\alpha^s \right\} = 0,$$

$$\sum_1^{\mu+1}{}_\vartheta \varrho_\vartheta \cdot \left\{ \frac{\partial \Psi_\vartheta}{\partial X_\beta} + \sum_1^m{}_s \frac{\partial \Psi_\vartheta}{\partial \overline{Z}_s} \cdot Q_\beta^s \right\} = 0,$$

$$\sum_1^{\mu+1}{}_\vartheta \varrho_\vartheta \cdot \frac{d\Psi_\vartheta}{dx_i} = 0$$

$$(\alpha = 1 \ldots \mu,\ \beta = \mu+1 \ldots n,\ i = 1 \ldots n).$$

Nehmen wir hierzu noch die Gleichungen $\frac{dF_\gamma}{dx_i'} = 0$ und ersetzen ausserdem $\overline{X}_\alpha$, X_β, Q_α^s, Q_β^s durch x_α', x_β', q_α^s, q_β^s, so haben wir im Ganzen die Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{dF_\gamma}{dx_i} = 0, \\ \displaystyle\sum_1^{\mu+1}{}_\vartheta \varrho_\vartheta \cdot \frac{d\Psi_\vartheta}{dx_i'} = 0, \\ \displaystyle\sum_1^{\mu+1}{}_\vartheta \varrho_\vartheta \cdot \frac{d\Psi_\vartheta}{dx_i} = 0 \\ (\gamma = 1 \ldots m-1,\ i = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Die Gleichungen (11) und (12) zusammengenommen sind an der Zahl:

$$m - 1 + \mu + 1 + n \,.\, (m - 1 + 1 + 1) = m + n + \mu + m \,.\, n;$$

die Unbekannten sind x', s', $q_i^\varkappa$, ϱ_ϑ, ihre Anzahl beträgt, da die ϱ_ϑ nur für μ Unbekannte zu rechnen sind: $m + n + \mu + m \,.\, n$. Wir haben also ebensoviel Gleichungen als Unbekannte und es ist somit unsere Absicht, die Berührungstransformationen aus Gleichungen von der Form (11) abzuleiten, erreicht.

Wollen wir eindeutig umkehrbare Transformationen haben, so müssen wir noch $m - 1$ Gleichungen zwischen den (x, s) allein hinzufügen, wir können daher sagen:

Satz. *„Jede eindeutig umkehrbare Berührungstransformation der M_n des R_{n+m} wird erhalten durch Auflösung der Gleichungen:*

$$(13)\quad \begin{cases} F_\gamma(x_1'\dots x_n',\ z_1'\dots z_m') = 0, \quad \Phi_\gamma(x_1\dots x_n,\ z_1\dots z_m) = 0, \\ \Psi_\delta(x_1'\dots x_n',\ z_1'\dots z_m',\ x_1\dots x_n,\ z_1\dots z_m) = 0, \\ \dfrac{dF_\gamma}{dx_i'} = 0, \qquad \dfrac{d\Phi_\gamma}{dx_i} = 0, \\ \sum\limits_1^{\mu+1}{}_\delta\, \varrho_\delta \cdot \dfrac{d\Psi_\delta}{dx_i'} = 0, \qquad \sum\limits_1^{\mu+1}{}_\delta\, \varrho_\delta \cdot \dfrac{d\Psi_\delta}{dx_i} = 0 \\ (\gamma = 1\dots m-1,\ \delta = 1\dots\mu+1,\ i = 1\dots n) \end{cases}$$

nach (x', z', q_i^x) *oder nach* (x, z, p_i^x).“

Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme.

Von

A. Voss in Dresden.

Die allgemeinste Zuordnung, vermöge deren zu jedem Punkte des Raumes eine bestimmte, durch ihn hindurchgehende Ebene gehört, wird durch drei Functionen p_i der Variabelen $x_1 x_2 x_3$ vermittelt, welche dem genannten Punkte die Ebene:

$$\sum (X_i - x_i) p_i = 0$$

zuweisen. Ein solches System von Ebenen soll in Ermangelung eines passenden Namens ein *Punkt-Ebenensystem*, kurz P-E-System heissen; ich würde die Bezeichnung Nullsystem vorgezogen haben, falls dieselbe nicht bereits für einen ganz speciellen Fall dieser Zuordnung allgemein verwandt würde.

Diese Zuordnung ist dieselbe, welche durch die der Differentialgleichung

$$\sum p_i dx_i = 0$$

angehörenden Flächenelemente vermittelt wird. Man hat sich, wie es scheint, bisher darauf beschränkt, den Fall genauer zu untersuchen, wo die p_i der Integrabilitätsbedingung genügen. Die Ebenen des Systems ordnen sich dann zu Tangentenebenen einer einfach unendlichen Flächenschaar, sie bilden ein *specielles P-E-System erster Art*, dessen geometrischen Charakter ich vor einiger Zeit in einer Note*) hervorgehoben habe. Bei einer erneuerten Beschäftigung mit dem allgemeinen P-E-System ward ich darauf aufmerksam, dass eine ganze Reihe der Eigenschaften, deren Ermittelung den Gegenstand der Flächentheorie zu bilden pflegt, sich in naturgemässer Weise einem solchen P-E-System zuschreiben lässt. Da es mir nicht uninteressant schien, diesen Punkt, der meines Wissens bisher keine Beachtung erfahren hat,**) genauer

*) Diese Annalen XVI, S. 556 ff.

**) Bezüglich der Theorie der geradlinigen Strahlensysteme finden sich derartige Betrachtungen in der Arbeit von Herrn Kummer, Crelle's Journal Bd. 57.

zu erläutern, so möge es mir gestattet sein, zugleich einige der Gesichtspunkte meiner früheren Note, welche in derselben als nebensächlich nur ganz kurz angedeutet sind, für den vorliegenden Zweck aber ein wesentliches Moment bilden, weiter auszuführen.

Gleichzeitig habe ich die Absicht verfolgt, eine Classification der P-E-Systeme zu geben. Obwohl dieselbe auf projectiven Gesichtspunkten beruht, habe ich dennoch vorgezogen, von der Verwendung projectiver Coordinaten abzusehen; doch nehme ich Gelegenheit, hier sogleich auf die nächstfolgende Arbeit hinzuweisen, in welcher von rein projectivem Standpunkte aus die Theorie der algebraischen Oberflächen und der Strahlensysteme mit der der P-E-Systeme verknüpft wird.

§ 1.

Die projective Zuordnung im P-E-System.

Lässt man dem Punkte $x_1\ x_2\ x_3$ die durch ihn gehende Ebene:

$$(1)\quad (X_1-x_1)p_1+(X_2-x_2)+(X_3-x_3)p_3=\sum(X_i-x_i)p_i=0,\ i=1,2,3$$

entsprechen, so wird dem Punkte:

$$x_1+dx_1,\quad x_2+dx_2,\quad x_3+dx_3,$$

für den die p_i übergehen in p_i+dp_i, die Ebene

$$(2)\quad (X_1-x_1-dx_1)(p_1+dp_1)+(X_2-x_2-dx_2)(p_2+dp_2)$$
$$+(X_3-x_3-dx_3)(p_3+dp_3)=0$$

zugeordnet sein. Die beiden Ebenen schneiden sich in der Geraden:

$$(3)\quad \begin{aligned}\sum(X_i-x_i)\,p_i&=0,\\ \sum(X_i-x_i)\,dp_i&=\sum p_i\,dx_i.\end{aligned}$$

Schreitet man nun in der Ebene (1) des Systemes selbst fort, so wird

$$(4)\quad \sum p_i\,dx_i=0$$

und die beiden Ebenen (3) schneiden sich längs einer Richtung

$$\delta x_1,\ \delta x_2,\ \delta x_3$$

welche den Gleichungen

$$\sum p_i\,\delta x_i=0,$$
$$\sum dp_i\,\delta x_i=0$$

genügt. *Jeder Richtung, für welche die Incremente der x_i durch d bezeichnet werden, entspricht somit projectiv eine Richtung δ.* Man könnte zunächst die Fälle unterscheiden, je nachdem diese Projectivität eine

hyperbolische, *parabolische* oder *elliptische* ist. Um überhaupt die hiervon abhängende charakteristische Anordnung der benachbarten Ebenen des Systems genauer zu untersuchen, hat man die Curven zu bestimmen, welche von den Durchschnittslinien der einem Punkte der Ebene (1) zugeordneten Ebene mit der Ebene (1) selbst umhüllt werden.

In der Nähe des Punktes x_i sind diese durch Differentialgleichungen von der Form:

$$d\xi = a_{11}\xi + a_{12}\eta,$$
$$d\eta = a_{21}\xi + a_{22}\eta$$

charakterisirt, für welche die Form der Integralcurven in der Nähe des singulären Punktes $\xi = \eta = 0$ je nach dem Verhalten der Wurzeln der Discriminante

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

bekannt ist. Auf Fragen dieser Art werde ich daher nicht eingehen; nur der Fall der *parabolischen Anordnung* d. h. *des parabolischen P-E-Systemes* soll weiterhin genauer untersucht werden.

Die projective Beziehung kann auch eine *specielle* sein, in diesem Falle heisse das P-E-System ein *specielles zweiter Art.*

Um die Bedingung der speciellen Projectivität zu ermitteln, setze man für die Werthe:

$$dx_1, \quad dx_2, \quad dx_3;$$
$$\delta x_1, \quad \delta x_2, \quad \delta x_3,$$

die mit denselben proportionalen

$$\xi_1 + \lambda\xi_1', \quad \xi_2 + \lambda\xi_2', \quad \xi_3 + \lambda\xi_3';$$
$$\xi_1 + \mu\xi_1', \quad \xi_2 + \mu\xi_2', \quad \xi_3 + \mu\xi_3',$$

wobei

$$\sum p_i \xi_i = \sum p_i \xi_i' = 0$$

sein muss. Dann entsteht für λ, μ die bilineare Beziehung:

(5) $$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

in welcher:

$$A = \sum \xi_i' \xi_k' \frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

$$B = \sum \xi_i' \xi_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

$$C = \sum \xi_i \xi_k' \frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

$$D = \sum \xi_i \xi_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

deren Determinante $AD - BC$ verschwinden muss.

Dann entspricht dem Fortschreiten nach der beliebigen Richtung λ fortwährend die Richtung $\mu = -\frac{D}{C}$, während der besonderen Richtung $\lambda = -\frac{B}{A} = -\frac{D}{C}$ jede beliebige Richtung zugehört.

Die Determinante $AD - BC$ entsteht aber bis auf einen Factor, wenn man die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

in welcher $p_{ik} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k}$ gesetzt ist, mit dem Product der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \end{vmatrix}$$

multiplicirt, in denen die α_i, α_i' beliebige Grössen bedeuten. *Daher ist $\Delta = 0$ die Bedingung der speciellen Projectivität. Δ aber ist wiederum bis auf einen Factor die Functionaldeterminante von:*

$$\frac{p_1}{v}, \quad \frac{p_2}{v}, \quad \frac{p_3}{v},$$

falls

$$v = \sum p_i x_i$$

gesetzt wird.

Das identische Verschwinden von Δ drückt daher aus, dass die Ebenen des P-E-Systems, deren Coordinaten

$$u_i = \frac{p_i}{v}$$

sind, eine Fläche umhüllen, deren Gleichung in nicht homogenen, Hesse'schen Ebenencoordinaten etwa durch:

$$F(u_1\, u_2\, u_3) = 0$$

vorgestellt wird. Die sämmtlichen Flächenelemente umhüllen hier nur *eine* Fläche, die *Ordnungsfläche des speciellen P-E-Systemes zweiter Art*, während sie beim speciellen P-E-System erster Art eine ∞^1 Schaar umhüllen. Hervorzuheben sind noch die Unterfälle, in denen die Ordnungsfläche eine Curve respective eine Developpable wird, doch gehe ich nicht näher auf diese besonderen Gattungen der P-E-Systeme ein.

Von besonderer Wichtigkeit sind die sich selbst entsprechenden Richtungen der projectiven Zuordnung. Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass für diese die zugeordnete Ebene des Systemes sich *um* die betreffende Richtungslinie dreht, während sie in jedem anderen Falle

um die projectiv entsprechende wandert. Daher mögen jene Richtungen die der *Haupttangenten des Systemes* heissen. Sie sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\sum p_i dx_i = 0,$$
$$\sum dp_i dx_i = \sum p_{ik} dx_i dx_k = 0, \tag{7}$$

oder durch:

$$\mu dx_1 = p_2 dp_3 - p_3 dp_2,$$
$$\mu dx_2 = p_3 dp_1 - p_1 dp_3, \tag{8}$$
$$\mu dx_3 = p_1 dp_2 - p_2 dp_1$$

in Verbindung mit $\sum p_i dx_i = 0$. Die Elimination der dx führt auf die bereits von mir angegebene quadratische Gleichung:

$$\mu^2 - \mu G - \Delta = 0, \tag{9}$$

in welcher $G = 0$ die linke Seite der Integrabilitätsbedingung

$$p_1(p_{23} - p_{32}) + p_2(p_{31} - p_{13}) + p_3(p_{12} - p_{21}) = 0$$

vorstellt.

Die Gleichungen (7) lassen sich übrigens in verschiedenartiger Weise auflösen, was ich hier besonders erörtere, da die directe Herleitung von (9) wenig elegant erscheinen würde. Setzt man statt dx_i zur Abkürzung ξ_i, ferner:

$$p_{ik} + p_{ki} = 2q_{ik} = 2q_{ki},$$

so hat man statt (7)

$$\sum p_i \xi_i = 0,$$
$$\varphi = \sum \xi_i \xi_k q_{ik} = 0. \tag{10}$$

Dann findet man die Verhältnisse der ξ_i aus den Gleichungen:

$$\lambda \xi_1 = \xi_2 \varphi_3 - \xi_3 \varphi_2,$$
$$\lambda \xi_2 = \xi_3 \varphi_1 - \xi_1 \varphi_3,$$
$$\lambda \xi_3 = \xi_1 \varphi_2 - \xi_2 \varphi_1,$$

wo $\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \varphi_i$ gesetzt ist, und λ^2 gleich der mit den p_i geänderten Determinante der q_{ik}, was sich unmittelbar ergiebt, wenn man diese Determinante in der i^{ten} Horizontal- und Verticalreihe mit ξ_i multiplicirt und in sofort zu erkennender Weise unter Anwendung von (10) reducirt.

Will man dagegen an den p_{ik} festhalten, so schreibe man φ in doppelter Weise:

$$\varphi = \xi_1 \sum p_{1i} \xi_i + \xi_2 \sum p_{2i} \xi_i + \xi_3 \sum p_{3i} \xi_i$$
$$= \xi_1 \sum p_{i1} \xi_i + \xi_2 \sum p_{i2} \xi_i + \xi_3 \sum p_{i3} \xi_i.$$

Setzt man nun:

$$\psi_k(x) = \sum p_{ki} x_i, \qquad \chi_k(x) = \sum p_{ik} x_i,$$

so entstehen bei derselben Behandlung wie unter (8) zwei quadratische Gleichungen mit den Wurzeln λ_1, λ_2; ϱ_1, ϱ_2, denen dieselben Werthsysteme ξ_i, η_i entsprechen, so dass:

$$\begin{aligned}
\xi_1\lambda_1 &= p_2\psi_3\xi - p_3\psi_2\xi, & \eta_1\lambda_2 &= p_2\psi_3\eta - p_3\psi_2\eta,\\
\xi_2\lambda_1 &= p_3\psi_1\xi - p_1\psi_3\xi, & \eta_2\lambda_2 &= p_3\psi_1\eta - p_1\psi_3\eta,\\
\xi_3\lambda_1 &= p_1\psi_2\xi - p_2\psi_1\xi, & \eta_3\lambda_2 &= p_1\psi_2\eta - p_2\psi_1\eta,\\
\xi_1\varrho_1 &= p_2\chi_3\xi - p_3\chi_2\xi, & \eta_1\varrho_2 &= p_2\chi_3\eta - p_3\chi_2\eta,\\
\xi_2\varrho_1 &= p_3\chi_1\xi - p_1\chi_3\xi, & \eta_2\varrho_2 &= p_3\chi_1\eta - p_1\chi_3\eta,\\
\xi_3\varrho_1 &= p_1\chi_2\xi - p_2\chi_1\xi, & \eta_3\varrho_2 &= p_1\chi_2\eta - p_2\chi_1\eta.
\end{aligned}$$

Die Wurzeln ϱ, λ stehen in einem sehr einfachen Zusammenhange. Um denselben zu finden, bilde man z. B. $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ und multiplicire das Resultat:

$$\lambda_1(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix},$$

deren Werth $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ ist, wenn man annimmt, dass die Verhältnisse der ξ, η so bestimmt werden, dass:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3,\\
p_2 &= \xi_3\eta_1 - \eta_3\xi_1,\\
p_3 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2
\end{aligned}$$

wird. Man erhält dann:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\sum \eta_i p_{ik} \xi_k,\\
\lambda_2 &= \sum \xi_i p_{ik} \eta_k,\\
\varrho_1 &= -\sum \eta_i p_{ki} \xi_k,\\
\varrho_2 &= \sum \xi_i p_{ki} \eta_k,
\end{aligned}$$

und somit

$$\lambda_1 + \varrho_2 = 0 = \lambda_2 + \varrho_1,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \sum (p_{ik} - p_{ki})(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i) = G.$$

Endlich hat man noch, vermöge der oben bezeichneten Umformung von Δ, direct:

$$\lambda_1 \varrho_1 = -\lambda_1 \lambda_2 = -\varrho_1 \varrho_2 = \Delta,$$

mithin zur Bestimmung von λ, ϱ die quadratische Gleichung

$$x^2 \mp xG - \Delta = 0,$$

in welcher das obere Zeichen zu λ gehört. *Die Bedingung der Integrabilität $G = 0$ ist nun gleichzeitig die der Involution der projectiven Zuordnung.* Denn die für letztere erforderliche Bezeichnung $B = C$ oder:

$$(\xi_2 \xi_3' - \xi_3 \xi_2')(p_{23} - p_{32}) + (\xi_3 \xi_1' - \xi_1 \xi_3')(p_{31} - p_{13}) + (\xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1')(p_{12} - p_{21}) = 0,$$

wandelt man vermöge der Beziehungen:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \xi_2 \xi_3' - \xi_3 \xi_2' : \xi_3 \xi_1' - \xi_1 \xi_3' : \xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1'$$

sofort in $G = 0$ um.

Curven, deren Tangenten sämmtlich aus Fortschreitungsrichtungen in den zugehörigen Ebenen gebildet werden, sollen überhaupt *Curven des P-E-Systemes* heissen. Diejenigen Curven, welche zu Tangenten, die sich selbst entsprechenden Richtungslinien haben, müssen dann als *Curven der Haupttangenten* bezeichnet werden. Sie haben, wie man unmittelbar erkennt, die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebenen mit den Ebenen des Systems zusammenfallen. Daher der allgemeine Satz:

Die Ebenen eines P-E-Systemes lassen sich in zweifacher Weise zu Schmiegungsebenen eines Curvensystemes zusammenfassen, in welchem durch jeden Punkt des Raumes zwei zusammengehörige hindurchgehen.

Die Haupttangenten werden zusammenfallen, wenn die Discriminante von (10)

$$\Delta' = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & p_1 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & p_2 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet. *Diese ist zugleich die Discriminante von* (9), so dass die Beziehung:

$$4\Delta' = G^2 + 4\Delta \tag{11}$$

stattfindet.

Die Fläche $\Delta' = 0$ heisse die Brennfläche des Strahlensystems der Haupttangentencurven, $\Delta = 0$ die Wendefläche des P-E-Systems. Dann folgt aus (11):

Die Brennfläche und Wendefläche des Systemes berühren sich in jedem ihnen gemeinsamen Punkte.

Die Brennfläche hat stets eine gewisse Anzahl von *Knotenpunkten*. Eine *erste Gruppe* derselben ist dadurch charakterisirt, dass für sie die sämmtlichen ersten Unterdeterminanten von Δ' verschwinden, oder dass die Gleichungen:

$$p_{ik} + p_{ki} = a_i p_k + a_k p_i$$

bestehen, in denen die a_i beliebige Grössen bezeichnen. An einer solchen Stelle wird *jede* Fortschreitungsrichtung in der zugeordneten Ebene eine Haupttangentenrichtung sein. Sind die genannten Bedingungen an jeder Stelle erfüllt, so hat man die Identität:

$$\sum \xi_i \xi_k p_{ik} = \sum \xi_i p_i \sum \xi_i a_i . \tag{12}$$

Um zu erkennen, unter welchen Umständen diese erfüllt werden könne, setze ich:

$$p_i = X q_i ,$$

wo X eine Function der x_i sein möge. Dann hat man:

$$\sum \xi_i \xi_k q_{ik} = \sum \xi_i q_i \sum \xi_i \left(a_i' - \frac{\partial \log X}{\partial x_i} \right) = \sum \xi_i q_i \sum \xi_i b_i .$$

Da man über X beliebig verfügen kann, so kann man auch nach Belieben b_1, b_2, b_3 in Null verwandeln. Dies heisst aber, dass die q_1, q_2, q_3 respective von x_1, x_2, x_3 unabhängig sein müssen, falls überhaupt eine Gleichung von der Form (12) bestehen soll. Und hieraus geht hervor, dass in der Gleichung (12) die a_i Null sein müssen. Dann aber hat man die Gleichungen:

$$p_{ik} + p_{ki} = 0,$$

dessen Integrale:

$$p_1 = a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2,$$
$$p_2 = a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3,$$
$$p_3 = a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1$$

sind. Man findet daher als einziges „ebenes" P-E-System, in welchem alle Curven des Systems Haupttangentencurven sind, den *linearen Complex*. Dies konnte übrigens auch schon aus dem Umstande erkannt werden, dass, wenn die Gleichung (12) bestehen soll, von jedem Punkte des Raumes ein ebenes Büschel geradliniger Haupttangenten ausgehen muss.

Eine zweite *Gruppe von Doppelpunkten* findet an den Stellen statt, wo die p_i gleichzeitig verschwinden; ein Punkt dieser Art ist auch Knotenpunkt der Wendefläche. Die Zuordnung wird hier eine ganz unbestimmte und alle Geraden, welche einem gewissen Kegel zweiten Grades angehören, sind Haupttangenten.

Bei den geradlinigen Strahlensystemen hat die Brennfläche desselben ihre Strahlen zu Doppeltangenten. In dem Curvensystem der Haupttangentencurven findet diese Beziehung zur Brennfläche nicht

mehr statt. Denn in einem Punkte derselben ist die Richtung der Haupttangente bestimmt durch das System der linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\xi_1 q_{11} + \xi_2 q_{12} + \xi_3 q_{13} + \lambda p_1 &= 0,\\
\xi_1 q_{21} + \xi_2 q_{22} + \xi_3 q_{23} + \lambda p_2 &= 0,\\
\xi_1 q_{31} + \xi_2 q_{32} + \xi_3 q_{33} + \lambda p_3 &= 0,\\
\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 &= 0,
\end{aligned}$$

aus denen

$$\sum \xi_i \xi_k q_{ik} = \sum \xi_i \xi_k p_{ik} = 0$$

folgt.

Vermöge derselben wird die Gleichung der Tangentenebene der Brennfläche, wenn statt der laufenden Coordinaten $X_i - x_i\ y_i$ gesetzt wird, wie man mittelst einfacher Determinantenreductionen erkennt, die folgende Form annehmen:

$$\begin{vmatrix}
q_{11} & q_{12} & q_{13} & \sum y_i p_{1i} - \left(\xi_1 \sum y_i q_{11i} + \xi_2 \sum y_i q_{12i} + \xi_3 \sum y_i q_{13i}\right)\\
q_{21} & q_{22} & q_{23} & \sum y_i p_{2i} - \left(\xi_1 \sum y_i q_{21i} + \xi_2 \sum y_i q_{22i} + \xi_3 \sum y_i q_{23i}\right)\\
q_{31} & q_{32} & q_{33} & \sum y_i p_{3i} - \left(\xi_1 \sum y_i q_{31i} + \xi_2 \sum y_i q_{12i} + \xi_3 \sum y_i q_{33i}\right)\\
p_1 & p_2 & p_3 & - \left(\xi_1 \sum y_i p_{1i} + \xi_2 \sum y_i p_{2i} + \xi_2 \sum y_i p_{3i}\right)
\end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn die Determinante der q_{ik}, wie vorausgesetzt werden mag, nicht verschwindet,*)

$$\sum \xi_k \left(\xi_1 \sum y_i q_{k1i} + \xi_2 \sum y_i q_{k2i} + \xi_3 \sum y_i y_{k3i}\right) = 0.$$

Die Ebene kann daher nur dann die Richtung ξ_i enthalten, wenn

$$\sum \xi_i \xi_k \xi_l q_{ikl} = 0$$

ist. Im nächsten Paragraphen wird aber gezeigt, dass hierdurch ausgedrückt wird, dass an einer solchen Stelle zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten der Haupttangentencurve coincidiren müssen, oder dass *die Haupttangente eine stationäre sein muss.* Hieraus geht nun hervor:

Die Haupttangentencurven haben in den Punkten der Brennfläche Spitzen, da sie sich nur an einer Seite derselben reell fortsetzen können. Nur in den Punkten der Curve auf der Brennfläche, wo eigentliche Inflexionen dieser Curven stattfinden, wird die Brennfläche von denselben berührt. Sind insbesondere die Haupttangentencurven geradlinig, so

*) Verschwindet diese Determinante überall, so ist Δ' ein Quadrat, d. h. die Brennfläche zählt doppelt und es kann von einer Berührung natürlich nicht die Rede sein.

müssen sie die Brennfläche berühren, so oft sie dieselbe in zugeordneten Punkten treffen.

Die Curve, längs welcher die Brennfläche von den Haupttangenten berührt wird, wird im allgemeinen von den letzteren nicht selbst berührt werden. Geschieht dies, so ist sie zugleich eine *singuläre Haupttangentencurve.* Insbesondere kann dies in allen Punkten der Brennfläche stattfinden, es existiren dann ∞^1 singuläre Curven dieser Art, so z. B. wenn die eine Schaar der Haupttangentencurven überhaupt geradlinig ist; in dem speciellen Falle der geradlinigen Strahlensysteme endlich erzeugen die Tangenten der singulären Haupttangentencurven die Kummer'schen Developpabelen.

§ 2.

Das specielle P-E-System zweiter Art und die Wendefläche.

In jedem Punkte findet eine bestimmte Richtung ξ_i statt, für welche die zugeordnete Ebene des Systems ihrer anfänglichen Stellung zunächst *parallel* bleibt. Sie ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sum \xi_i p_{1i} &= \lambda p_1, \\ \sum \xi_i p_{2i} &= \lambda p_2, \\ \sum \xi_i p_{3i} &= \lambda p_3. \end{aligned}$$

Das Verschwinden der Determinante Δ oder das Bestehen der Gleichungen (1) nebst $\sum \xi_i p_i = 0$ drückt daher aus, dass in der zugeordneten Ebene eine Richtung vorhanden ist, *längs welcher die Ebene des Systems stationär sich verhält.* Eine solche Ebene ist, wie man sieht, zugleich *Wendungsberührebene* der entsprechenden Haupttangentencurve. *Die Wendungspunkte der letzteren liegen mithin auf der Wendefläche.* Auch hier werden die Haupttangenten die Wendungsfläche nicht berühren; es wird dies vielmehr nur längs einer Curve geschehen, welche durch die Fläche:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \sum \xi_i \xi_k \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i \partial x_k} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \sum \xi_i \xi_k \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_i \partial x_k} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \sum \xi_i \xi_k \frac{\partial^2 p_3}{\partial x_i \partial x_k} \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

auf der Wendefläche ausgeschnitten wird, falls man in (2) noch die ξ_i durch ihre Werthe aus (1) ersetzt. Insbesondere kann diese Curve

zugleich Haupttangentencurve sein, *es existirt dann eine ebene nicht singuläre Haupttangentencurve im System. Und wenn die Gleichung* (2) *in allen Punkten von* $\Delta = 0$ *erfüllt ist, so wird eine Schaar von* ∞^1 *ebenen Haupttangentencurven vorhanden sein.* Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Haupttangentencurven bestimmte Schmiegungsebenen haben. Sind sie geradlinig, so erzeugen die auf der Wendefläche unter den genannten Voraussetzungen eine Schaar von (singulären) Umhüllungscurven; es geschieht dies insbesondere dann, wenn die p_i lineare Functionen der x_i sind, also die Gleichung (2) überhaupt von selbst besteht.

Ich betrachte nun den Fall, wo Δ identisch verschwindet, d. h. alle Ebenen des Systems die Ordnungsfläche F umhüllen. *Dann existirt eine zweifach unendliche Schaar von ebenen Haupttangentencurven; in jeder Tangentenebene von* F *liegt eine ebene Haupttangentencurve gebildet von denjenigen Punkten, für welche die Verhältnisse der* p_i *constant bleiben.**)

Es sei nämlich im Punkte x_i die Gleichung der zugehörigen Ebene

$$\sum X_i p_i = v, \qquad v = \sum x_i p_i$$

und

$$F\left(\frac{p_1}{v}, \frac{p_2}{v}, \frac{p_3}{v}\right) = 0 = F(u_1\, u_2\, u_3)$$

die Gleichung der Ordnungsfläche.

Man wähle nun in der Ebene den Punkt x_i^0, so dass:

$$\sum x_i^0 p_i = v$$

und gleichzeitig

$$\frac{p_1^0}{p_2^0} = \frac{p_1}{p_2}$$

ist, wobei

$$F\left(\frac{p_1^0}{v^0}, \frac{p_2^0}{v^0}, \frac{p_3^0}{v^0}\right) = 0$$

sein wird. Setzt man noch:

$$\frac{p_2^0}{p_1^0} - \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda}{p_1}$$

so wird:

$$\frac{p_1^0}{v^0} = \frac{p_1}{v + x_3^0 \lambda},$$

$$\frac{p_2^0}{v^0} = \frac{p_2}{v + x_3^0 \lambda},$$

$$\frac{p_3^0}{v^0} = \frac{p_3 + \lambda}{v + x_3^0 \lambda}.$$

*) Es giebt überhaupt ∞^2 Haupttangentencurven, welche in zwei Schaaren zerfallen. Im Falle des Textes ist die eine Schaar eben.

Mithin ist

$$F\frac{p_1}{v+x_3^0\lambda},\quad \frac{p_2}{v+x_3^0\lambda},\quad \frac{p_3+\lambda}{v+x_3^0\lambda}=0.$$

Denkt man sich nun x_i^0 hinreichend nahe bei x_i gewählt, so hat diese Gleichung nur die Wurzel $\lambda=0$. Damit ist aber gezeigt, dass aus:

$$\frac{p_1^0}{p_2^0}=\frac{p_1}{p_2}$$

auch:

$$\frac{p_3^0}{p_4^0}=\frac{p_3}{p_2}$$

folgt, und somit entsteht als Gleichung der ebenen Haupttangentencurve:

$$p_1:p_2:p_3=p_1^0:p_2^0:p_3^0.$$

Eine solche Curve sei durch C bezeichnet, *allen Punkten derselben entspricht die Ebene von C als zugeordnete.* Um für irgend einen Punkt x_i derselben die andere Haupttangentenrichtung zu bestimmen, betrachte man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
p_1\varrho &= p_{11}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}-\varrho x_1\right)+p_{21}\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}-\varrho x_2\right)+p_{31}\left(\frac{\partial F}{\partial u_3}-\varrho x_3\right),\\
p_2\varrho &= p_{12}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}-\varrho x_1\right)+p_{22}\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}-\varrho x_2\right)+p_{32}\left(\frac{\partial F}{\partial u_3}-\varrho x_3\right),\\
p_3\varrho &= p_{13}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}-\varrho x_1\right)+p_{23}\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}-\varrho x_2\right)+p_{33}\left(\frac{\partial F}{\partial u_3}-\varrho x_3\right),\\
0 &= p_1\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}-\varrho x_1\right)+p_2\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}-\varrho x_2\right)+p_3\left(\frac{\partial F}{\partial u_3}-\varrho x_3\right),
\end{aligned}$$

wo

$$v\varrho=\sum p_i\frac{\partial F}{\partial u_i}$$

gesetzt ist. Dieselben ergeben sich durch Differentiation der Identität $F u_1 u_2 u_3=0$ nach den x_i.

So z. B. hat man:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}p_{11}+\frac{\partial F}{\partial u_2}p_{21}+\frac{\partial F}{\partial u_3}p_{31}=\frac{\partial v}{\partial x_1}\left[\frac{p_1}{v}\frac{\partial F}{\partial u_1}+\frac{p_2}{v}\frac{\partial F}{\partial u_2}+\frac{p_3}{v}\frac{\partial F}{\partial u_3}\right]$$

und damit die erste der genannten Gleichungen, wenn man:

$$\frac{\partial v}{\partial x}\varrho=p_1+x_1p_{11}+x_2p_{21}+x_3p_{31}$$

setzt. Schreibt man auch für $\frac{\partial F}{\partial u_i}-\varrho x_i$ zur Abkürzung ξ_i, so erkennt man, dass die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sum p\,\xi_i&=0,\\
\sum p_{ik}\xi_i\xi_k&=0
\end{aligned}$$

erfüllt sind, d. h. dass die Richtung der Haupttangente durch ξ_i bestimmt ist. Wie man sieht, ist diese aber die der Verbindungslinie des Punktes x_i mit dem Punkte $\frac{\partial F}{\partial u_i}$, in welchem die zugeordnete Ebene von x_i die Ordnungsfläche F berührt. Mithin folgt:

Die zweite Schaar der Haupttangentencurven des speciellen P-E-Systemes zweiter Art wird gebildet von Complexcurven des Tangentencomplexes der Ordnungsfläche, und allen Punkten von C sind Haupttangenten zugeordnet, welche durch einen festen in der Ebene von C liegenden Punkt S, den Berührungspunkt dieser Ebene mit der Ordnungsfläche, hindurchgehen; und die Berührungspunkte der von S an die Curve C gezogenen Tangenten gehören somit der (doppeltzählenden) Brennfläche $4\Delta' = G^2 = 0$ *an.*

Die Curve C wird im allgemeinen den Punkt S nicht enthalten, dies wird vielmehr nur dann stattfinden, wenn S zugleich der Brennfläche angehört, wie aus den eben angeführten Sätzen unmittelbar hervorgeht. Die Durchschnittscurve der Ordnungsfläche mit der Brennfläche ist daher in diesem Falle ein *singulärer Streifen* der mit der Zuordnung des P-E-Systems verknüpften Differentialgleichung.

Ist z. B. $F(u_1\, u_2\, u_3) = 0$ durch die lineare Gleichung

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 1$$

vertreten, so besteht zwischen den p_i die Identität:

$$\sum p_i a_i - \sum p_i x_i = 0.$$

Die Haupttangentencurven der zweiten Schaar haben die Differentialgleichungen:

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = a_1 - x_1 : a_2 - x_2 : a_3 - x_3,$$

d. h. sie bilden das Strahlenbündel durch den die Ordnungsfläche vertretenden Punkt $a_1\, a_2\, a_3$.

§ 3.

Geradlinige Haupttangentencurven.

Im Punkte x_i betrachte man die zugehörige Ebene

$$\sum (X_i - x_i) p = 0$$

und wähle in derselben die Richtung ξ_i so, dass:

$$\sum \xi_i p_i = 0. \tag{1}$$

Die Ebene, welche dem Punkte $x_i + \lambda \xi_i$ angehört, hat zur Gleichung:

$$\sum (X_i - x_i - \lambda \xi_i)\left(p_i + \lambda \sum p_{ik} \xi_k + \frac{\lambda^2}{2} \sum p_{ikl} \xi_k \xi_l + \cdots\right), \tag{2}$$

in welcher die höheren Differentialquotienten durch Indices k, l be-

zeichnet sind. Damit die einem unendlich nahen Punkte zugeordnete Ebene (2) durch den Punkt x_i gehe, muss der Factor von λ^2 für $X_i = x_i$ verschwinden. Dies giebt die Bedingung der Haupttangentenrichtung. Verschwindet auch noch der Factor von λ^3, so ist jene Haupttangente stationär. Für den letzteren Fall ist mithin das Bestehen der Gleichungen (1) und

$$\begin{aligned} \sum \xi_i \xi_k p_{ik} &= 0, \\ \sum \xi_i \xi_k \xi_l p_{ikl} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

erforderlich. *Es giebt daher im allgemeinen eine Fläche, zu deren Punkten stationäre Haupttangenten gehören*, und auf dieser eine Curve, respective einzelne Punkte, in denen diese Singularität sich um 1 oder 2 Ordnungen erhöht. Eine nähere Untersuchung dieser Fälle würde den bekannten Fragen nach den mehrpunktig berührenden Tangenten der Oberflächen vollständig entsprechen.*)

Das identische Verschwinden der Resultante von (1), (3) *ist die Bedingung dafür, dass die Haupttangentencurven der einen Schaar ein geradliniges Strahlensystem bilden. In diesem Falle, den man als den eines windschiefen P-E-Systemes bezeichnen könnte, ordnen sich die Ebenen desselben zu* ∞^2 *Ebenenbüscheln an;* derselbe bedarf keiner weiteren Untersuchung.

Es möge jetzt angenommen werden, dass die Haupttangentenrichtungen an jeder Stelle zusammenfallen. Dann hat das P-E-System keine Brennfläche, es ist ein *parabolisches*, zugleich das Analogon der developpabelen Flächen, falls die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Ich werde zeigen, *dass in diesem Falle das ganze System der Haupttangentencurven geradlinig ist, dass mithin das parabolische P-E-System aus* ∞^2 *Ebenenbüscheln besteht, dessen Ebenen ein eigenthümliches sich selbst conjugirtes System bilden.*

Zufolge des identischen Verschwindens von Δ' giebt es nämlich Functionen ξ_i, λ, welche das System

$$\begin{aligned} \sum \xi_i q_{1i} + \lambda p_1 &= 0, \\ \sum \xi_i q_{2i} + \lambda p_2 &= 0, \\ \sum \xi_i q_{3i} + \lambda p_3 &= 0, \\ \sum \xi_i p_i &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

identisch befriedigen, und die Richtung der Haupttangente ist durch die zugehörigen Verhältnisse der ξ_i damit für jeden Punkt bestimmt. Differentiirt man nun die Gleichungen (4), so entsteht

*) Bezüglich dieser Fragen verweise ich auf meine folgende Arbeit.

$$
\begin{aligned}
&\sum \xi_i dq_{1i} + \sum q_{1i} d\xi_i + \lambda dp_1 + p_1 d\lambda = 0,\\
&\sum \xi_i dq_{2i} + \sum q_{2i} d\xi_i + \lambda dp_2 + p_2 d\lambda = 0,\\
&\sum \xi_i dq_{3i} + \sum q_{3i} d\xi_i + \lambda dp_3 + p_3 d\lambda = 0,\\
&\sum \xi_i dp_i + \sum p_i d\xi_i = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

und zwar gelten diese Relationen für beliebige Werthe der dx_i. Setzt man nun die letzteren den ξ_i proportional, also $dx_i = dh\xi_i$, so wird nach (4)

$$\sum \xi_i dp_i = 0$$

und nach (5):

$$\sum p_i d\xi_i = 0. \tag{6}$$

Multiplicirt man ferner die 3 ersten Gleichungen (5) mit den ξ_i, die letzte mit λ und addirt, so entsteht:

$$\sum \xi_i \xi_k dq_{ik} = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung ist aber, wie eine directe Entwicklung unmittelbar zeigt, identisch mit der zweiten in (3). Sie sagt daher aus, dass ein System geradliniger Haupttangentencurven existirt. In der That kann man nun auch die Differentiale der ξ_i den ξ_i selbst proportional setzen. Denn für $d\xi_i = \xi_i dk$ reduciren sich die Gleichungen (5) auf die folgenden:

$$dh\left(\sum \xi_i \frac{dq_{ki}}{dh} + \lambda \frac{dp_k}{dh}\right) + (d\lambda - \lambda dk)\, p_k = 0, \quad k = 1,2,3$$

welche man, da zwischen denselben noch die Relation (7) besteht, durch geeignete Werthe der dh, dk befriedigen kann, womit gezeigt ist, dass auch die Differentiale der ξ_i diesen Grössen selbst fortwährend proportional bleiben, sobald man in der Richtung ξ_i selbst fortschreitet.

Bevor ich zu einer genaueren analytischen Charakterisirung der parabolischen P-E-Systeme übergehe, füge ich einige andere Bemerkungen hinzu, welche zugleich einen neuen Beweis des vorhin ausgesprochenen Satzes geben.

Der im § 1 bewiesene Satz, dass jedem P-E-Systeme ein System von Haupttangentencurven zukommt, deren Schmiegungsebenen die Ebenen des Systems sind, lässt sich noch in etwas anderer Art ausdrücken. Die Richtungen der Haupttangenten sind im allgemeinen durch eine quadratische irreducibele Gleichung verknüpft. Wird dieselbe reducibel, so zerfallen die beiden Curvensysteme in zwei getrennte. Es wird dies allemal dann der Fall sein, wenn das eine System der Curven willkürlich so angenommen wird, dass sich jedem

Punkte des Raumes eine Curve in einem gewissen Gebiete eindeutig zuordnen lässt. Die Schmiegungsebenen dieser Curven bilden dann ein P-E-System, dessen eine Schaar der Haupttangentencurven unmittelbar gegeben ist. Und so hat man den allgemeinen Satz:

Jedem Curvensystem der genannten Art entspricht ein conjugirtes, welches die Schmiegungsebenen des ursprünglichen gleichfalls zu Schmiegungsebenen hat.

Diese Beziehung ist im allgemeinen eine *gegenseitige; das eine System ist das conjugirte des anderen.* Eine Ausnahme hiervon tritt nur dann ein, wenn das conjugirte System geradlinig wird. Dies ist z. B. der Fall — um andere Beispiele nicht zu erwähnen — bei den Schmiegungsebenen eines Systems von gemeinen Schraubenlinien mit der nämlichen Axe, bei welchem die Schmiegungsebenen stets durch die von den Punkten der Curven auf die Axe gefällten Senkrechten hindurchgehen, also das conjugirte Curvensystem aus eben diesen Normalen besteht.

Es entsteht nun die Frage, unter welchen Umständen ein Curvensystem sich selbst conjugirt sein kann. Nach den vorigen Untersuchungen muss aber der Satz gelten:

Die einzigen sich selbst conjugirten Curvensysteme sind durch die Strahlen gewisser Strahlensysteme repräsentirt.

Ich gebe hier einen directen Beweis dieses Satzes, der mir wegen seiner Allgemeinheit Interesse zu verdienen scheint.

Ein Curvensystem der genannten Art wird dargestellt durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = p_i,$$

in welchen die p_i Functionen der Coordinaten x_i des Punktes M sind. Die Schmiegungsebene der durch den Punkt M gehenden Curve hat die Gleichung:

$$\sum (X_i - x_i) A_i = 0$$

wo:

$$A_1 = p_2 P_3 - p_3 P_2,$$
$$A_2 = p_3 P_1 - p_1 P_3,$$
$$A_3 = p_1 P_2 - p_2 P_1,$$

in welchen Gleichungen die P_i die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = P_i = \sum p_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k}$$

bedeuten. Um die Richtung der Curve des conjugirten Systems zu finden, welche durch den Punkt M geht, hat man die Gleichungen:

$$\sum \xi_i A_i = 0,$$
$$\sum \xi_i \xi_k A_{ik} = 0 \tag{8}$$

zu lösen, in denen wieder

$$A_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

gesetzt ist.

Dazu setze man:

$$\xi_i = \alpha p_i + \gamma P_i.$$

Man erhält dann:

$$\sum (\alpha p_i + \beta P_i) \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = -\alpha \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ \frac{\partial p_1}{\partial x_j} & \frac{\partial p_2}{\partial x_j} & \frac{\partial p_3}{dx_j} \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ \frac{\partial P_1}{\partial x_j} & \frac{\partial P_2}{\partial x_j} & \frac{\partial P_3}{\partial x_j} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diese Relationen mit den $\alpha p_i + \beta P_j$ und summirt nach j, so entsteht die zweite der Bedingungen unter (8):

$$\alpha\beta \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ \sum P_j \frac{\partial p_1}{\partial x_j} & \sum P_j \frac{\partial p_2}{\partial x_j} & \sum P_j \frac{\partial p_3}{\partial x_j} \end{vmatrix}$$

$$+ \alpha\beta \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ \sum p_j \frac{\partial P_1}{\partial x_j} & \sum p_j \frac{\partial P_2}{\partial x_j} & \sum p_j \frac{\partial P_3}{\partial x_j} \end{vmatrix}$$

$$+ \beta^2 \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ \sum P_j \frac{\partial P_1}{\partial x_j} & \sum P_j \frac{\partial P_2}{\partial x_j} & \sum P_j \frac{\partial P_3}{\partial x_j} \end{vmatrix} = 0.$$

Wie es sein muss, ergiebt sich hier einmal die Wurzel $\beta = 0$, die gesuchte Richtung ist mithin gegeben durch:

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{N}{S} \tag{9}$$

in welcher N die Summe der beiden Coefficienten von $\alpha\beta$, S den von β^2 in der vorstehenden Gleichung bedeutet. Soll nun die gefundene Richtung wieder mit der ursprünglichen zusammenfallen, so muss N verschwinden. Da die Untersuchung der Differentialgleichung nicht einfach scheint, ziehe ich vor, diese Frage auf folgendem Wege zu erledigen.

Die Bedingung, dass die Richtung p_i die einzige sei, welche für die ξ_i eingesetzt, die Gleichungen (8) befriedigt, kommt darauf hinaus, dass eine gerade Linie einen Kegelschnitt berührt, d. h. auf das System:

$$2p_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+p_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)+p_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}+\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)=\lambda A_1 \quad \text{etc.}$$

oder:

$$\sum p_i\frac{\partial A_1}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial A_i}{\partial x_1}=\lambda A_1,$$

$$\sum p_i\frac{\partial A_2}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial A_i}{\partial x_2}=\lambda A_2,$$

$$\sum p_i\frac{\partial A_3}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial A_i}{\partial x_3}=\lambda A_3.$$

Man erhält aber durch Bildung der Differentialquotienten hiefür die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_2M_3-p_3M_2&=\lambda(p_2P_3-p_3P_2)+S_1,\\ p_3M_1-p_1M_3&=\lambda(p_3P_1-p_1P_3)+S_2,\\ p_1M_2-p_2M_1&=\lambda(p_1P_2-p_2P_1)+S_3, \end{aligned} \tag{10}$$

wo

$$S_i=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3\\ P_1 & P_2 & P_3\\ \frac{\partial p_1}{\partial x_i} & \frac{\partial p_2}{\partial x_i} & \frac{\partial p_3}{\partial x_i}\end{vmatrix}, \qquad M_i=\sum p_k\frac{\partial P_i}{\partial x_k}$$

gesetzt ist. Aus diesen Gleichungen erhält man durch Multiplication mit den p_i und Addition die Identität:

$$\sum p_iS_i=0$$

dagegen durch Multiplication mit den P_i

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3\\ p_1 & p_2 & p_3\\ M_1 & M_2 & M_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3\\ P_1 & P_2 & P_3\\ N_1 & N_3 & N_3\end{vmatrix}, \qquad N_i=\sum P_k\frac{\partial p_i}{\partial x_k}, \tag{11}$$

mithin die Bedingung $S=0$. Ich differentiire jetzt die Gleichungen (10) in der Weise, dass die Operation

$$\delta=\sum p_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

ausgeführt wird. Damit geht p_i in P_i, P_i in M_i über, mithin ergiebt sich aus der ersten derselben

$$P_2M_3-P_3M_2+p_2\delta M_3-p_3\delta M_2=\lambda(p_2M_3-p_3M_2)+\delta\lambda(p_2P_3-p_3P_2)$$

$$+\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3\\ P_1 & P_2 & P_3\\ \sum p_i\frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1\partial x_i} & \sum p_i\frac{\partial^2 p_2}{\partial x_1\partial x_i} & \sum p_i\frac{\partial^2 p_3}{\partial x_1\partial x_i}\end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den p_i und addirt wieder, so entsteht:

$$(12)\quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ \sum p_i p_i \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i \partial x_i} & \sum p_i p_i \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_i \partial x_i} & \sum p_i p_i \frac{\partial^2 p_3}{\partial x_i \partial x_i} \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum \frac{\partial P_i}{\partial x_k} p_k = M_i$$

oder ausgeführt:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum p_k p_i \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_k \partial x_i} + \sum p_i \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$$

ferner:

$$\sum P_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} p_i,$$

also:

$$\sum p_k p_i \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \sum P_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = M_i - \sum P_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k}.$$

Trägt man dies in (12) ein, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} = 0$$

und nach (11):

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese letztere Determinante ist aber die der ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten der x_i; die Curven des Systemes müssten also sämmtlich ebene Curven sein. In diesem Falle aber bilden die sämmtlichen Schmiegungsebenen derselben ein specielles P-E-System zweiter Art. Da nun in jeder Ebene eine von Haupttangenten eingehüllte Curve liegt, und die Richtung der zweiten Haupttangente immer von dem Curvenpunkte nach dem Berührungspunkte ihrer Ebene mit der dem System zugehörigen Ordnungsfläche hinläuft, so können die Richtungen der beiden Haupttangenten nur dann zusammenfallen, wenn die Curven des Systems selbst gerade Linien sind. Damit ist aber die vorhin aufgeworfene Frage erledigt.

§ 4.

Bestimmung aller parabolischen P-E-Systeme.

Es soll sich im folgenden darum handeln, *alle P-E-Systeme mit zusammenfallenden Haupttangentenrichtungen anzugeben.* Da aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen hervorgeht, dass in diesem Falle die Haupttangentencurven ein geradliniges Strahlensystem bilden, *so lässt sich die partielle Differentialgleichung* $\Delta' = 0$, auf deren Integration die Beantwortung dieser Frage beruht, *auf eine lineare partielle Differentialgleichung mit einer Unbekannten zurückführen, deren Integration ausgeführt werden kann.* Obwohl es vermuthlich nicht schwierig sein wird, rein analytisch die Gleichung $\Delta' = 0$ zu integriren, scheint mir doch die hier ausgeführte geometrische Analyse von Interesse zu sein.

Als Gleichungen eines Strahlensystems betrachte man:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(a, b, x - az, y - bz) &= 0, \\ \varphi(a, b, x - az, y - bz) &= 0, \end{aligned}$$

oder, wenn man setzt:

$$(2)\qquad x - az = p, \quad y - bz = q,$$

$f(abpq) = 0$, $\varphi(abpq) = 0$. Für gegebene Werthe von a, b und die nach (1) dazu gehörigen von p, q ist mithin der jeweilige Strahl des Systemes der Schnitt der beiden Ebenen (2). Denkt man sich umgekehrt a, b als Functionen von x, y, z aus (1) bestimmt und differentiirt dann die identischen Relationen (1) nach diesen Variabeln, so ergiebt sich:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial a} - z\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial a}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial b} - z\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} &= 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial a} - z\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial a}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial b} - z\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} &= 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial a} - z\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial a}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial b} - z\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial b}{\partial z} - a\frac{\partial f}{\partial p} - b\frac{\partial f}{\partial q} &= 0, \end{aligned}$$

nebst analogen Gleichungen für φ. Multiplicirt man dieselben mit den $a, b, 1$, so kommt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial a} - z\frac{\partial f}{\partial p}\right)\left(a\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}\right) \\ &+\left(\frac{\partial f}{\partial b} - z\frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z}\right) = 0, \\ &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} - z\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\left(a\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}\right) \\ &+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} - z\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)\left(a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned}$$

Da aber die Determinante

$$\Gamma = \left(\frac{\partial f}{\partial a} - z\frac{\partial f}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} - z\frac{\partial f}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial b} - z\frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} - z\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)$$

nicht identisch verschwindet, so folgt:

$$(5)\qquad \begin{aligned} a\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} &= 0, \\ a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt xyz geht, ist ferner:

$$(X - x)A + (Y - y)B + (Z - z)C = 0.$$

Damit dieselbe den Strahl:

$$\begin{aligned} X - aZ &= x - az, \\ Y - bZ &= y - bz, \end{aligned}$$

ganz in sich enthalte, muss:

$$Aa + Bb + C = 0$$

sein. Damit hat man für die drei Functionen p_i des P-E-Systems die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} p_1 &= A, \\ p_2 &= B, \\ p_3 &= -(Aa + Bb), \end{aligned}$$

in welchen die a, b den partiellen Differentialgleichungen (5) genügen, die A und B aber noch beliebige Functionen der a, b, p, q, x, y, z sein können*). Es ist nunmehr die Determinante Δ' zu ermitteln, welche in der Form:

$$(6)\qquad \Delta' \equiv \begin{vmatrix} 2p_{11} & p_{12}+p_{21} & p_{13}+p_{31} & p_1 \\ p_{12}+p_{21} & 2p_{22} & p_{23}+p_{32} & p_2 \\ p_{13}+p_{31} & p_{23}+p_{31} & 2p_{33} & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}$$

vorausgesetzt werden möge. Dazu sind die folgenden Gleichungen erforderlich, welche unter Berücksichtigung der Identitäten (5) leicht erhalten werden.

$$(6)\qquad \begin{aligned} ap_{11} + bp_{12} + p_{13} &= a\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) = \beta_1, \\ ap_{21} + bp_{22} + p_{23} &= a\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right) = \beta_2. \end{aligned}$$

*) Hiermit ist die Darstellung aller windschiefen P-E-Systeme gegeben.

Die eingeklammerten Differentialquotienten nach der rechten Seite sind so zu verstehen, dass nach $x\,y\,z$ nur partiell zu differenziren ist, soweit diese Grössen explicite oder in den p, q vorkommen. Ebenso findet man:

$$(7)\quad -(ap_{31}+bp_{32}+p_{33}) = a\left[a\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\right] + b\left[a\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right] = \beta_3.$$

Ausserdem sei:

$$(8)\quad \begin{aligned} ap_{11}+bp_{21}+p_{31} &= -\left[A\,\frac{\partial a}{\partial x}+B\,\frac{\partial b}{\partial x}\right] = \alpha_1,\\ ap_{12}+bp_{22}+p_{32} &= -\left[A\,\frac{\partial a}{\partial y}+B\,\frac{\partial b}{\partial y}\right] = \alpha_2,\\ ap_{13}+bp_{23}+p_{33} &= -\left[A\,\frac{\partial a}{\partial z}+B\,\frac{\partial b}{\partial z}\right] = \alpha_3, \end{aligned}$$

wobei zwischen den α, β folgende Beziehungen bestehen:

$$(9)\quad \begin{aligned} a\beta_1+b\beta_2+\beta_3 &= 0,\\ a\alpha_1+b\alpha_2+\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

In der Determinante Δ' multiplicire man nun die beiden ersten Verticalreihen mit den a, b und addire sie zur dritten; dann entstehen an Stelle der Elemente dieser Reihe die folgenden:

$$\begin{matrix} \alpha_1+\beta_1,\\ \alpha_2+\beta_2,\\ \alpha_3+\beta_3,\\ 0. \end{matrix}$$

Verfährt man nunmehr ebenso mit den Horizontalreihen, so ergiebt sich mit Hülfe der Relationen (7), (8), (9) für Δ' der Werth:

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} 2p_{11} & p_{12}+p_{21} & \alpha_1+\beta_1 & A\\ p_{12}+p_{21} & 2p_{22} & \alpha_2+\beta_2 & B\\ \alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & 0 & 0\\ A & B & 0 & 0 \end{vmatrix} = ((\alpha_1+\beta_1)B-(\alpha_2+\beta_2)A)^2.$$

Aus dem Umstande, dass der Ausdruck Δ' ein Quadrat wird, folgt, dass die Strahlen des Systems die Brennfläche im Allgemeinen nicht mehr berühren, wie es nach § 1 sonst der Fall sein müsste. Begreiflicherweise kann dies auch nicht stattfinden, da sämmtliche Strahlen bereits Doppeltangenten ihrer eigentlichen Kummer'schen Brennfläche sind. Die Gleichung Δ' ist nunmehr reducirt auf die lineare partielle Differentialgleichung:

$$a\left[B\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)\right]+b\left[B\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)\right]+B\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)AB-\frac{\partial b}{\partial x}B^2+A^2\frac{\partial a}{\partial y}=0.$$

Setzt man noch $\frac{A}{B}=\operatorname{tg}\mu$, so entsteht die Gleichung:

$$(10)\quad a\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial x}\right)\sin\mu\cos\mu$$
$$-\frac{\partial b}{\partial x}\cos^2\mu+\frac{\partial a}{\partial y}\sin^2\mu=0.$$

Man kann nun endlich auch

$$a\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)=a\frac{\partial \mu}{\partial x}+b\frac{\partial \mu}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial z}$$

setzen, wo in den Differentialquotienten rechter Hand die Differentiationen nur insoweit auszuführen sind, als in μ die $x\,y\,z$ explicit auftreten, da, soweit die p, q explicite in μ vorkommen, keine Beiträge in dem Aggregat der drei Differentialquotienten hinzukommen. Da ferner aus (3) folgt:

$$\Gamma\frac{\partial b}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial a}-\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial p}=-h_2,$$
$$\Gamma\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial b}=\quad h_1,$$
$$\Gamma\left(\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial a}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial b}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial b}=2h_3,$$

so können in der Differentialgleichung (10) a, b, p, q als Constanten angesehen werden und von den Variabeln $x\,y\,z$ kommt in der quadratischen Form Γ nur z explicite vor. Setzt man nun noch:

$$\frac{d\mu}{2h_3\cos\mu\sin\mu+h_1\sin^2\mu+h_2\cos^2\mu}=d\lambda,$$

so handelt es sich um die Integration von:

$$(11)\qquad a\frac{\partial \lambda}{\partial x}+b\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\frac{\partial \lambda}{\partial z}+\frac{1}{\Gamma}=0.$$

Hierzu aber hat man das System:

$$dx:dy:dz:d\lambda=a:b:1:-\frac{1}{\Gamma}$$

zu integriren, dessen Integrale sind:

$$x-az=c_1,$$
$$y-bz=c_2,$$
$$\int\left(\frac{dz}{\Gamma}+d\lambda\right)=c_3.$$

Bezeichnet man die Coefficienten der quadratischen Form

$$\Gamma = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b} + z^2\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$
$$- z\left[\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial b} - \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial q}\right]$$

durch k_2, k_1, $2k_3$ und setzt $\operatorname{tg}\mu = \frac{A}{B} = \zeta$, so hat man

$$\int \frac{dz}{k_2 + 2k_3 z + k_1 z^2} + \int \frac{d\zeta}{h_2 + 2h_3\zeta + h_1\zeta^2} = c_3.$$

Eine directe Rechnung zeigt nun, dass beide Formen in den Integralen gleiche Discriminanten haben, d. h. dass

$$k_3^2 - k_1 k_2 = h_3^2 - h_1 h_2 = \omega$$

ist. Da nun überhaupt, wenn $\Delta = b^2 - ac$,

$$\int \frac{dz}{a + 2bz + cz^2} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \log\left\{\frac{b + cz - \sqrt{\Delta}}{b + cz + \sqrt{\Delta}}\right\}$$

ist, so ergiebt sich an Stelle des dritten Integrales

$$r = \frac{k_2 + k_1 z - \sqrt{\omega}}{k_2 + k_1 z + \sqrt{\omega}} \cdot \frac{h_2 + h_1\zeta - \sqrt{\omega}}{h_2 + h_1\zeta + \sqrt{\omega}} = \text{Const.}$$

Hiernach wird das allgemeine Integral von (11):

$$r = F(p, q, a, b), \tag{12}$$

wo F eine willkürliche Function der Argumente bedeutet. Nun bestimmt ζ die Stellung der dem Punkte z auf dem Strahle a, b zugeordneten Ebene. Aus dem Umstande, dass, wie aus der Form von (12) hervorgeht, die Beziehung zwischen z und ζ eine bilineare ist, geht mithin der folgende Satz hervor:

*Die Ebenen des parabolischen P-E-Systemes sind längs der geradlinigen Haupttangentencurven den Punkten derselben projectiv zugeordnet**).

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die projective Beziehung für diejenigen Strahlen an, wo $\omega = 0$ ist, mithin an Stelle der Logarithmen die Summe zweier reciproker linearer ganzer Functionen in z resp. ζ tritt. Nun ist $\Gamma = 0$ die Gleichung der Kummer'schen Brennfläche des Strahlensystems, sobald man die a, b, p, q als Functionen von $x\,y\,z$ in Γ einträgt; die Gleichung $\Gamma = 0$ bestimmt dagegen bei festgehaltenem a, b auf dem zugehörigen Strahle die beiden Focalpunkte, in denen der Strahl jene Brennfläche berührt**). Hieraus

*) Ich erinnere hierbei an die analoge Eigenschaft, welche bei den windschiefen Flächen stattfindet.

**) Will man beweisen, dass alle Strahlen des Systems diese Brennfläche berühren, so ist es am einfachsten, $x\,y\,z$ als Functionen von a, b anzusehen und f, φ in den Formen:

$$q - f(a, b) = 0, \quad p - \varphi(a, b) = 0$$

sieht man zugleich, dass für $\omega = 0$ jener Strahl Haupttangente derselben sein wird.

Ich mache schliesslich noch auf eine besondere Auflösung der Gleichung $\Delta' = 0$ aufmerksam. Die Gleichung $f = 0$ ist wie bekannt der Ausdruck für einen Strahlencomplex. Durch diesen wird jedem Punkte des Raumes, durch welchen ein Strahl des Systemes hindurchgeht, eine Ebene zugeordnet, die Tangentialebene des zu jenem Punkte gehörenden Complexkegels längs jenes Strahles. Die Gleichung jener Tangentialebene ist:

$$(X-x)\left(\frac{\partial f}{\partial a}-\frac{\partial f}{\partial p}z\right)+(Y-y)\left(\frac{\partial f}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial p}z\right)$$
$$-(Z-z)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial q}z\right)b+\left(\frac{\partial f}{\partial a}-\frac{\partial f}{\partial p}z\right)a\right]=0.$$

Setzt man nun

$$A=\frac{\partial f}{\partial a}-\frac{\partial f}{\partial p}z,$$

$$B=\frac{\partial f}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial q}z,$$

so wird:

$$-(\alpha_1+\beta_1)=\frac{\partial f}{\partial p}+A\frac{\partial a}{\partial x}+B\frac{\partial b}{\partial x}=0,$$
$$-(\alpha_2+\beta_2)=\frac{\partial f}{\partial q}+A\frac{\partial a}{\partial y}+B\frac{\partial b}{\partial y}=0.$$

Mithin ist die Bedingung $\Delta' = 0$ überall erfüllt.

Man erhält daher ein parabolisches P-E-System, wenn man den Punkten P der Geraden l eines Strahlensystemes, welches den Schnitt zweier beliebiger Complexe bildet, die jedesmalige Tangentialebene des dem Punkte P zugehörigen Complexkegels von f längs der Geraden l zuordnet.

Untersucht man endlich die Determinante Δ für ein beliebiges windschiefes P-E-System, so findet man leicht, dass dieselbe in zwei Factoren zerfällt:

---

vorauszusetzen. Dann erhält $\Gamma = 0$ die Gestalt:

$$\left(z+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)\left(z+\frac{\partial f}{\partial b}\right)-\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial b}=0$$

und es ist:

$$dx = z\,da + a\,dz + d\varphi,$$
$$dy = z\,db + b\,dz + df.$$

Wählt man nun z so, dass:

$$z\,da + d\varphi = 0,$$
$$z\,db + df = 0,$$

was wegen $\Gamma = 0$ möglich ist, so wird $dx : dy = a : b$, womit bewiesen ist, dass in jedem der beiden Focalpunkte der Strahl die Brennfläche berührt.

$$\Delta = B\left(A\frac{\partial a}{\partial x} + B\frac{\partial b}{\partial x}\right) - A\left(A\frac{\partial a}{\partial y} + B\frac{\partial b}{\partial y}\right)$$
$$\times B\left(\frac{\partial A}{\partial x}a + \frac{\partial A}{\partial y}b + \frac{\partial A}{\partial z}\right) - A\left(\frac{\partial B}{\partial x}a + \frac{\partial B}{\partial y}b + \frac{\partial B}{\partial z}\right).$$

Der Grund hiervon ist leicht einzusehen. Der zweite Factor gleich Null gesetzt, liefert für das Verhältniss $\frac{A}{B}$ einen nur von a, b, p, q abhängigen, aber längs jedes Strahles constanten Werth; sein Verschwinden bezieht sich also auf diejenigen Punkte, in denen längs des Strahles die zugeordnete Ebene stationär sich verhält. Dagegen zeigt der erste Factor solche Strahlen an, in denen die zu benachbarten Strahlen gehörigen Ebenen coincidiren; dies kann nur geschehen, wenn jene Ebene selbst Brennebene der Kummer'schen Brennfläche des Strahlensystemes ist.

§ 5.

Krümmung und Krümmungslinien des P-E-Systems.

Schreitet man unendlich wenig in der dem Punkte x_i zugehörigen Ebene fort, so wird die Richtung des Fortschreitens $\frac{dx_i}{ds}$ mit der Normalen der Ebene:

$$\sum (x_i - \xi_i)(p_i + dp_i) = 0$$

einen Winkel bilden, dessen cosinus:

$$(1) \qquad \frac{\Sigma dx_i dp_i}{ds\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

ist. Dieser Werth misst die Grösse der Normalkrümmung der Ebene des Systems nach der jeweiligen Richtung. Man erhält hieraus die auf einander senkrechten Richtungen der Hauptkrümmungen, welche gleichzeitig die von den Haupttangenten gebildeten Winkel halbiren. Jedem P-E-System ist mithin ein System von sich überall senkrecht kreuzenden Curven zugeordnet, deren Tangenten *Hauptkrümmungsrichtungen* sind. Die Werthe der Normalkrümmungen sind ersichtlich durch eine der Euler'schen völlig analoge Relation mit denen der Hauptkrümmungen verbunden. Im besonderen kann die Krümmung auch an jeder Stelle nach allen Richtungen sonstant sein, es ist dies z. B. der Fall bei dem Systeme:

$$p_1 = a_1 + b_3 x_2 - b_2 x_3 + k x_1,$$
$$p_2 = a_2 + b_1 x_3 - b_3 x_1 + k x_2,$$
$$p_3 = a_3 + b_2 x_1 - b_1 x_2 + k x_3.$$

Man kan andererseits nach den Curven fragen, längs denen dies Normalen der Ebenen des Systems eine Developpable bilden, oder

längs denen die zugehörigen Ebenen sich um eine zur Tangente der Curve senkrechte Richtung drehen. Diese sollen als *Krümmungslinien* bezeichnet werden. Setzt man

$$N = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

so müssen die Differentiale von

$$x_i + \frac{\lambda}{N} p_i$$

verschwinden. Man erhält, da offenbar $d\lambda = 0$ zu setzen ist, die Bedingungen:

$$dx_i + \frac{\lambda}{N} dp_i + \lambda p_i d\frac{1}{N} = 0.$$

Demgemäss werden die *Differentialgleichungen der Krümmungslinien*

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ dp_1 & dp_2 & dp_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \sum p_i dx_i = 0,$$

während die beiden zugehörigen Krümmungshalbmesser λ_1, λ_2 bestimmt sind durch die quadratische Gleichung:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \mu + p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_1 \\ p_{21} & \mu + p_{22} & p_{23} & p_2 \\ p_{31} & p_{32} & \mu + p_{33} & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_0 \end{vmatrix} = 0,$$

deren Wurzeln μ_1, μ_2 mit λ_1, λ_2 in der Beziehung stehen, dass:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{N}.$$

Man kann übrigens auch $N = 1$ voraussetzen, wie ich dies in meiner früheren Note*) gethan habe. Die Bezeichnung Krümmungslinie habe ich für die genannten Curven beibehalten, weil folgende Sätze ihre Gültigkeit behalten, wie man sofort aus der Differentialgleichung (2), respective aus der Definition der Curven erkennt:

Schneiden sich zwei P-E-Systeme in einer beiden gemeinsamen Krümmungslinie, so schneiden sie sich längs derselben unter constantem Winkel, und insbesondere:

Ist eine Krümmungslinie eben, aber nicht geradlinig, so bilden die Normalen des Systems längs derselben mit ihrer Ebene einen constanten Winkel, endlich:

Wenn zwei P-E-Systeme sich unter constantem Winkel in einer Curve schneiden, die für das eine eine Krümmungslinie ist, so ist sie es auch für das andere.

*) a. a. O. S. 557.

Die Richtungen ξ_i der Krümmungslinien sind, wie man sieht, bestimmt durch die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \xi_1(\mu+p_{11})+\ \xi_2 p_{12}\ +\ \xi_3 p_{13}\ &= \varrho p_1,\\ \xi_1 p_{21}\ +\xi_2(\mu+p_{22})+\ \xi_3 p_{23}\ &= \varrho p_2,\\ \xi_1 p_{31}\ +\ \xi_2 p_{32}\ +\xi_3(\mu+p_{33})&= \varrho p_3,\\ \xi_1 p_1\ +\ \xi_2 p_2\ +\ \xi_3 p_3\ &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die den Wurzeln μ_1, μ_2 zugehörigen Werthe der ξ durch ξ' und ξ'', so ergiebt sich:

$$(\mu_1-\mu_2)\sum \xi_i'\xi_i'' = hG,$$

$$h^2N^2 = 1-\sum(\xi_i'\xi_i'')^2.$$

Nennt man daher den Winkel der Krümmungslinien ω, so wird:

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{G}{(\mu_1-\mu_2)N}.$$

Die Krümmungslinien können also nur dann auf einander senkrecht stehen, wenn die Integrabilitätsbedingung $G=0$ erfüllt ist.

Neben den Krümmungslinien kann man noch das System der Curven betrachten, welche auf diesen senkrecht stehen. Ihre Richtungen η_i', η_i'' sind gegeben durch die Relationen:

$$\begin{aligned} \eta_1(p_{11}+\mu)+\ \eta_2 p_{21}\ +\ \eta_3 p_{31}\ &= \sigma p_1,\\ \eta_1 p_{12}\ +\eta_2(p_{22}+\mu)+\ \eta_3 p_{32}\ &= \sigma p_2,\\ \eta_1 p_{13}\ +\ \eta_2 p_{23}\ +\eta_3(p_{33}+\mu)&= \sigma p_3,\\ \eta_1 p_1\ +\ \eta_2 p_2\ +\ \eta_3 p_3\ &= 0. \end{aligned}$$

Endlich ergeben sich mit Hülfe der Krümmungslinienrichtungen auch die der Haupttangenten. Soll nämlich

$$\xi_i = \xi_i' + \alpha\xi_i''$$

Haupttangentenrichtung sein, so erhält man, da:

$$\sum \xi_i p_{ki} = \varrho_1 p_k - \mu_1\xi_k' + \alpha(\varrho_2 p_k - p_2\xi_k''),$$

$$\sum \xi_i\xi_k p_{ki} = -\mu_1\sum \xi_i'^2 - \mu_2\alpha^2\sum \xi_i''^2 - \alpha(\mu_1+\mu_2)\sum \xi_i'\xi_i'',$$

zur Bestimmung von α die quadratische Gleichung:

$$\mu_1 + \mu_2\alpha^2 - \alpha(\mu_1+\mu_2)k = 0,$$

wenn

$$\sum \xi_i'\xi_i'' = k,\quad \sum \xi_i'^2 = \sum \xi_i''^2 = 1$$

gesetzt ist*).

*) Diese Annahme ist zulässig, so lange nicht eine der Richtungen der Krümmungslinien den imaginären Kreis trifft. In diesem Fall ist sie aber zugleich Haupttangente.

Aus der zuletzt für α erhaltenen Gleichung geht noch hervor: *Die Krümmungslinien werden nur dann die von den Richtungen der Hauptttangenten gebildeten Winkel halbiren, wenn entweder* $k = 0$, *d. h. das P-E-System integrabel ist, oder wenn* $\mu_1 + \mu_2 = 0$, *d. h. wenn die Summe der beiden den Richtungen der Krümmungslinien zugehörigen Krümmungshalbmesser gleich Null ist.* In dem letzteren Falle, der das *Analogon der Minimalflächen* darstellt, stehen die Haupttangenten auch auf einander senkrecht, denn es wird $\alpha = \pm 1$. Insbesondere können die Krümmungslinien auch an jeder Stelle zusammenfallen. Ich begnüge mich damit, auf die Existenz eines sehr einfachen P-E-Systems dieser Art hinzuweisen, da die Integration der partiellen Differentialgleichung, welche durch die gleich Null gesetzte Discriminante von (3) entstehen würde, sich nicht einfach zu gestalten scheint. Setzt man:

$$p_1 = x_1, \quad p_2 = x_2, \quad p_3 = X,$$

wo X eine beliebige Function von $x_1 x_2 x_3$ sein möge*), so erhält man zur Bestimmung der Krümmungslinienrichtungen die Gleichungen:

$$\xi_1(\mu + 1) = \lambda x_1,$$
$$\xi_2(\mu + 1) = \lambda x_2,$$
$$\xi_1 \frac{\partial X}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial X}{\partial x_2} + \xi_3\left(\frac{\partial X}{\partial x_3} + \mu\right) = \lambda X,$$
$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 X = 0.$$

Es ist also entweder $\mu = -1$, $\lambda = 0$. Setzt man dann statt ξ_i dx_i, so hat man:

$$dX = dx_3,$$
$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + X dx_3 = 0,$$

also:

$$X - x_3 = c,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2cx_3 = C_1.$$

Die Krümmungslinien der einen Art sind also sphärisch, sie werden durch ein System von Kugeln aus der Flächenschaar $X - x_3 = c$ ausgeschnitten.

Für die andere Wurzel μ hat man dagegen den Ausdruck:

$$\mu = \frac{X\left(x_1 \frac{\partial X}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial X}{\partial x_2}\right) - (x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial X}{\partial x_3} - X^2}{x_1^2 + x_2^2 + X^2}.$$

Damit nun die Doppelwurzel $\mu = -1$ auftrete, muss demnach X der partiellen Differentialgleichung:

*) Dies P-E-System bildet die Analogie zu einer Schaar von Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe. Wie man sieht, treffen alle Normalen der Ebenen des Systems die Axe der x_3.

$$x_1 \frac{\partial X}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial X}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3} - 1\right) \frac{x_1^2 + x_2^2}{X} = 0$$

genügen, deren allgemeines Integral

$$f(X - x_3, \quad \frac{x_1}{x_2}, \quad x_1^2 + x_2^2 + X^2) = 0$$

ist, wo f eine willkürliche Function der Argumente bedeutet. Damit sind alle Systeme der bezeichneten Art mit zusammenfallenden Krümmungslinien gefunden.

Verlangt man, dass überhaupt die andere Wurzel μ den constanten Werth a habe, so erhält man die Differentialgleichung:

$$X\left(x_1 \frac{\partial X}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial X}{\partial x_2}\right) - (x_1^2 + x_2^2)\left(\frac{\partial X}{\partial x_3} + a\right) - X^2(1 + a) = 0,$$

welche durch eine willkürliche Function:

$$f(p, q, r) = 0$$

integrirt wird, falls:

$$p = \frac{x_1}{x_2}, \quad q = \frac{X^2 + x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{a+1}}, \quad r = x_3 + s,$$

$$s = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{qt^{a+1} - t}}, \quad t = x_1^2 + x_2^2$$

gesetzt wird. Für $a = 0$ hat man den besonderen Fall:

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{X^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{X}{x_1^2 + x_2^2 + x_3 X}\right) = 0.$$

Aber diese Gleichung verwandelt sich, wenn man

$$u_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3 X},$$

$$u_2 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3 X},$$

$$u_3 = \frac{X}{x_1^2 + x_2^2 + x_3 X}$$

setzt, in die lediglich von den $u_1 u_2 u_3$ abhängende:

$$f\left(\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{u_3^2}{u_1^2 + u_2^2}, \quad u_3\right) = 0,$$

oder

$$F(u_1 u_2 u_3) = 0.$$

Das P-E-System ist also dann speciell zweiter Art, wie übrigens zu erwarten war. Für $a = +1$ erhält man dagegen ein System, welches an jeder Stelle entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungshalbmesser besitzt.

Sollen endlich die Krümmungshalbmesser für das zweite System der Krümmungslinien constant $= a$ sein, so hat man die Gleichung

$$0 = x_1 \frac{\partial X}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial X}{\partial x_2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{X} \frac{dX}{\partial x_3} - \left\{ X^2 + \frac{(\sqrt{X^2 + x_1^2 + x_2^2})^3}{a} \right\} \frac{1}{X}$$

zu integriren, was sich ebenfalls allgemein ausführen lässt.

Aus den Differentialgleichungen (2) der Krümmungslinien ergeben sich unmittelbar folgende particuläre Systeme derselben. Setzt man nämlich:

$$T = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0,$$
$$\sum p_i dx_i = 0,$$

so sind die Gleichungen (2) erfüllt. *Die Curven des Systems, welche der Fläche $T = 0$ aufgeschrieben sind, bilden daher ein System von ∞^1 Krümmungslinien.* Setzt man zweitens:

$$\sum dx_i^2 = 0,$$
$$\sum p_i dx_i = 0,$$
$$\sum dp_i dx_i = 0,$$

so sind wieder die Gleichungen (2) erfüllt. Die Verhältnisse der dx bestimmen aber Haupttangenten, welche den imaginären Kreis treffen. Man ersieht so die *Existenz von ∞^1 Haupttangentencurven, welche zugleich Krümmungslinien sind.* Insbesondere giebt es Systeme, bei denen alle Haupttangentencurven der einen Art Krümmungslinien sind; man erhält die partielle Differentialgleichung, welcher die p_i dann genügen müssen, durch Elimination der dx_i aus den drei vorstehenden Gleichungen, etc.*)

Ich hebe endlich noch einen Fall hervor, in welchem sich die Gleichungen der Krümmungslinien leicht ermitteln lassen. Ist nämlich:

$$p_i = \alpha_i f + x_i,$$

wo f eine beliebige Function der $x_1 x_2 x_3$ bedeutet, so sind die Differentialgleichungen der Krümmungslinien:

$$f \sum \alpha_i dx_i + \sum x_i dx_i = 0,$$
$$df \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Die eine Schaar derselben ist also $f = c$, woraus folgt:

$$2c\alpha_x + (x^2 + y^2 + z^2) = c_1.$$

*) Es können auch beide Haupttangentencurvensysteme zugleich Krümmungslinien sein; dies ist z. B. bei dem Seite 70 erwähnten Systeme constanter Krümmung der Fall.

Es sind dies also sphärische Curven, welche durch die Flächenschaar $f = c$ aus einer Schaar von Kugeln ausgeschnitten werden. Setzt man andererseits:

$$\sum \alpha_i \lambda_i = 0,$$
$$\sum \lambda_i x_i = 0,$$

so verschwindet die Determinante in (4) und man hat noch die erste der Gleichungen (4) in Verbindung mit $\Sigma \lambda_i x_i = 0$ zu integriren. Diese Krümmungscurven sind mithin eben; ihre Ebenen gehen sämmtlich durch den Anfang der Coordinaten. Ist nun f von der Form:

$$k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_x + b = 0,$$

so werden beide Systeme der Krümmungslinien eben, denn auch die der ersteren Art werden durch die Kugeln $f = \text{const.}$ aus den Ebenen $(2c\alpha_x - c_1)k + c - (\alpha_x + b) = 0$ ausgeschnitten. Da in der Ebene jede Linie Krümmungslinie ist, so hat man damit ein Beispiel von drei P-E-Systemen, von denen freilich zwei specieller Natur sind, welche sich gegenseitig in Krümmungslinien, mithin längs derselben überall unter constanten Winkeln schneiden.

§ 6.

Ueber ein lineares P-E-System.

Setzt man für die p_i ganze lineare Functionen der x_i, also:

$$p_i = \sum a_{ik} x_k + a_{i4}, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

so sind, da die zweiten Differentialquotienten der p_i überhaupt verschwinden, alle Haupttangentencurven geradlinig, sie bilden ein Strahlensystem zweiter Ordnung, dessen Geraden durch die Ebenen:

$$\sum (X_i - \alpha_i) p_i = 0$$

aus den Treffgeraden des unendlich fernen Kegelschnittes:

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0 \tag{2}$$

ausgeschnitten werden, welche durch den Punkt x gehen. Dieses System bildet das Analogon der Erzeugenden des Flächenbüschels zweiten Grades, in welches es geradezu übergeht, wenn die p_i der Integrabilitätsbedingung genügen, d. h. wenn die $a_{ik} = a_{ki}$ sind. Die projective Zuordnung der Tangentenebenen einer Fläche zweiten Grades zu ihren Berührungspunkten längs einer Erzeugenden bleibt dabei für die Punkte eines Strahles und seine zugeordnete Ebene selbstverständlich erhalten.

Wenn zwischen den p_i keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet, kann man den Anfang der Coordinaten so

wählen, dass die a_{i4} verschwinden, d. h. das System auf seinen Mittelpunkt beziehen. Dies möge im folgenden, falls nicht das Gegentheil bemerkt wird, vorausgesetzt werden. Die Eigenschaften der Systeme, bei denen der Mittelpunkt im Unendlichen liegt, wird man hieraus leicht entnehmen.

Die Brennfläche des Systems ist eine Kegelfläche zweiten Grades, deren Spitze der im Coordinatenanfang befindliche Ausnahmepunkt ist, für den die p_i verschwinden. Aber auch die Wendefläche ist ein solcher Kegel, dessen Gleichung durch (2) gegeben ist. Beide Kegel berühren sich längs zweier Geraden, längs deren die dem Punkte zugeordnete Ebene zugleich mit der gemeinsamen Tangentenebene jener Kegel coincidirt; alle Erzeugenden der Wendefläche sind zugleich Haupttangentencurven. Das Strahlensystem der letzteren ist auch zweiter Classe, da in jeder Ebene sich im Allgemeinen nur zwei Gerade dieses Systems befinden können. Nur in jeder Tangentenebene der Wendefläche befinden sich unendlich viele Strahlen, welche sämmtlich durch den unendlich fernen Berührungspunkt derselben hindurchgehen. Die Brennfläche kann nur dann identisch verschwinden, wenn alle Unterdeterminanten der $a_{ik} + a_{ki}$ Null sind, d. h. wenn die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha_1^2, & a_{22} &= \alpha_2^2, & a_{33} &= \alpha_3^2, \\ a_{12} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3, & a_{23} &= \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1, & a_{13} &= \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2, \\ a_{21} &= \alpha_2\alpha_1 - \alpha_3, & a_{32} &= \alpha_3\alpha_2 - \alpha_1, & a_{31} &= \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2, \end{aligned}$$

wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1\alpha_x + \alpha_3 x_2 - \alpha_2 x_3, \\ p_2 &= \alpha_2\alpha_x + \alpha_1 x_3 - \alpha_3 x_1, \\ p_3 &= \alpha_3\alpha_x + \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2, \end{aligned}$$

d. h. es ergiebt sich das Strahlensystem erster Classe und Ordnung, welches von den Treffgeraden der unendlich fernen Geraden

$$\alpha_x = 0$$

und der Geraden $x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ gebildet wird.

Um im allgemeinen Falle die p_i auf eine einfachere Form zu bringen, setze man:

$$\begin{aligned} a_{12} - a_{21} &= 2a_3, \\ a_{31} - a_{13} &= 2a_2, \\ a_{23} - a_{32} &= 2a_1, \\ a_{ik} + a_{ki} &= 2a_{ik} = 2a_{ki}, \\ \psi &= \sum a_{ik} x_i x_k. \end{aligned}$$

Dann wird:

$$p_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + a_3 x_2 - a_2 x_3,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + a_1 x_3 - a_3 x_1,$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + a_2 x_1 - a_1 x_2$$

und:

$$\sum p_i\, dx_i = \frac{1}{2}\, d\psi + \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Transformirt man nun die Form ψ auf ihre Hauptaxen, so ergiebt sich:

$$\psi = \sum \lambda_i y_i^2.$$

und durch Multiplication mit der Transformationsdeterminante, welche den Werth $+1$ haben möge:

$$\sum p_i\, dx_i = \frac{1}{2}\, d\psi + \begin{vmatrix} dy_1 & dy_2 & dy_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Man kann daher die p_i stets auf die Form:

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda_1 x_1 + a_3 x_2 - a_2 x_3 + c_1, \\ p_2 &= \lambda_2 x_2 + a_1 x_3 - a_3 x_1 + c_2, \\ p_3 &= \lambda_3 x_3 + a_2 x_1 - a_1 x_2 + c_3 \end{aligned} \tag{4}$$

bringen, wobei die Constanten weggelassen werden können, so lange der Mittelpunkt im endlichen liegt. Die Gleichung der Brennfläche wird nunmehr:

$$\sum \frac{p_i^2}{\lambda_i} = 0 = \left(\sum \lambda_i x_i^2\right)\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2\right) - \left(\sum a_i \lambda_i x_i\right)^2, \tag{5}$$

die der Wendefläche ist:

$$\sum \lambda_i x_i^2 = 0.$$

Da die Brennfläche von allen Haupttangenten berührt wird, so existirt eine Schaar von singulären Haupttangentencurven; sie werden erzeugt von den Kummer'schen Developpabelen des Strahlensystems. Die Gleichungen dieser Curven lassen sich leicht angeben. Denn einem Punkte x_i der Brennfläche entspricht die Haupttangentenrichtung dx_1, dx_2, dx_3

$$\begin{aligned} \lambda_1 dx_1 &= d\mu\, p_1, \\ \lambda_2 dx_2 &= d\mu\, p_2, \\ \lambda_3 dx_3 &= d\mu\, p_3, \\ \sum \bar{p}_i\, dx_i &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Multiplication der drei ersten Gleichungen mit den a_1, a_2, a_3 resp. x_1, x_2, x_3 erhält man, da:

$$\begin{aligned} \sum a_i p_i &= \sum a_i \lambda_i x_i + \sum a_i c_i, \\ \sum x_i p_i &= \sum \lambda_i x_i^2 + \sum x_i c_i, \\ \frac{d}{d\mu} \sum \lambda_i a_i x_i &= \sum \lambda_i a_i x_i + \sum a_i c_i, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} \sum \lambda_i x_i^2 &= \sum \lambda_i x_i^2 + \sum x_i c_i. \end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus erhält man bei passender Wahl der Integrationsconstanten die Gleichung der Brennfläche, also wenn insbesondere die c_i gleich Null sind, die Gleichung (5). Damit wird dann die letzte der Gleichungen (6) überflüssig. Multiplicirt man dann die ersten drei in (6) mit den Factoren k_1, k_2, k_3 und setzt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 k_1 + a_2 k_3 - a_3 k_2 &= \omega \lambda_1 k_1, \\ \lambda_2 k_2 + a_3 k_1 - a_1 k_3 &= \omega \lambda_2 k_2, \\ \lambda_3 k_3 + a_1 k_2 - a_2 k_1 &= \omega \lambda_3 k_3, \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{vmatrix} 1-\omega & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 1-\omega & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 1-\omega \end{vmatrix} = 0$$

folgt, so erhält man ausser der Wurzel $\omega = 1$ noch zwei andere ω_1, ω_2 welche mit Hülfe der zugehörigen Werthe der k_i zwei Relationen von der Form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \log \sum \lambda_i k_i' x_i &= \omega_1, \\ \frac{d}{d\mu} \log \sum \lambda_i k_i'' x_i &= \omega_2 \end{aligned}$$

liefern, aus denen man unmittelbar das fehlende Integral:

$$\left(\sum \lambda_i k_i' x_i\right)^{\omega_2} = \text{const.} \left(\sum \lambda_i k_i'' x_i\right)^{\omega_1}$$

entnimmt. Wenn dagegen zwischen den p_i eine lineare Identität von der Form

$$\sum \alpha_i p_i = 1$$

besteht, hat man ohne Weiteres:

$$\frac{d}{d\mu}\sum \lambda_i \alpha_i x_i = 1,$$

welche Gleichung in Verbindung mit der ersten in (7) und der der Brennfläche das gesuchte Curvensystem liefert.

Zur Integration der Gleichungen der Krümmungslinien scheinen die bei den Flächen zweiten Grades entwickelten Methoden nicht mehr auszureichen. Krümmungslinien sind zunächst die dem Kegel

$$\sum p_i^2 = 0$$

aufgeschriebenen Curven des Systems. Ein zweites System wird gebildet von den vier ebenen Strahlbüscheln von Haupttangenten, deren Centra in den Schnittpunkten der Wendefläche mit dem imaginären Kreise liegen. Ausserdem ergiebt sich leicht das Vorhandensein von drei Systemen von Krümmungslinien, welche in drei durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen liegen. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_2 &= \varrho\alpha_1, \\ \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_3 &= \varrho\alpha_2, \\ \alpha_3\lambda_3 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 &= \varrho\alpha_3, \end{aligned}$$

so ergeben sich mittelst der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \lambda_2 - \lambda & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

drei Systeme von Grössen α_i, welche den Wurzeln $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ entsprechend durch α_i, β_i, γ_i bezeichnet werden mögen. Multiplicirt man nun die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ dp_1 & dp_2 & dp_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = 0$$

mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

und den entsprechenden, bei welchen an Stelle der α_i die β_i und γ_i gesetzt werden, so entstehen die Relationen:

$$\begin{aligned} dX_1 &= \varrho_1 \frac{d\mathsf{T}}{\varrho_1 - S}, \\ dX_2 &= \varrho_2 \frac{d\mathsf{T}}{\varrho_2 - S}, \\ dX_3 &= \varrho_3 \frac{d\mathsf{T}}{\varrho_3 - S}, \end{aligned} \tag{8}$$

in denen

$$X_1 = \log \sum \alpha_i x_i, \quad X_2 = \log \sum \beta_i x_i, \quad X_3 = \log \sum \gamma_i x_i,$$
$$T = \log \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \quad S = \frac{\Sigma \lambda_i dx_i^2}{\Sigma dx_i^2}$$

gesetzt ist. Damit ergeben sich die Gleichungen:

$$\sum \alpha_i x_i = 0, \quad \sum \beta_i x_i = 0, \quad \sum \gamma_i x_i = 0$$

als particuläre Integrale, aus denen in Verbindung mit $\Sigma p_i dx_i = 0$ dann leicht die in diesen Ebenen liegenden Krümmungscurven sich finden lassen.

Ein allgemeines Integral ergiebt sich nur in dem speciellen Falle, wenn eine der Wurzeln ϱ gleich Null ist; die Gleichung der Brennfläche reducirt sich dann nach (5) auf $\Sigma a_i x_i \lambda_i = 0$ und eine Schaar der Krümmungslinien wird eben. Die Integration der Gleichungen (8) ist mir in einer symmetrischen Form nicht gelungen. Aus denselben folgt übrigens die Differentialgleichung zweiten Grades mit constanten Coefficienten:

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ \varrho_1 dX_1 & \varrho_2 dX_2 & \varrho_3 dX_3 \\ dX_1 & dX_2 & dX_3 \end{vmatrix} = 0,$$

während die lineare Gleichung $\Sigma p_i dx_i = 0$ sich in

$$\sum P_i dX_i = 0$$

transformirt. Die gesuchten Krümmungscurven sind damit abgebildet auf die Curven des letztgenannten P-E-Systems, dessen Tangenten einen festen unendlich fernen Kegelschnitt treffen.

Dresden, den 8. Juni 1883.

Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche.

Von

Karl Rohn in Leipzig.

Die nachfolgenden Untersuchungen sind aus zwei Gründen angestellt worden. Zunächst zeigt man in der Curventheorie, dass die Hesse'sche Curve einer gegebenen Curve in den vielfachen Punkten dieser Curve ein besonderes Verhalten zeigt. Dieses Verhalten rechtfertigt die Annahme, dass umsomehr bei einer gegebenen Fläche, die Fläche der Determinante der zweiten Differentialquotienten in den singulären Punkten derselben in einer eigenthümlichen und bemerkenswerthen Beziehung zu jener Fläche steht. Eine Frage in dieser Richtung dürfte also schon aus diesem Grunde einiges Interesse bieten. Ausserdem spielt aber die Hesse'sche Fläche auch bei den Krümmungsverhältnissen der gegebenen Fläche eine Rolle, indem sie dieselbe in der parabolischen Curve schneidet, welche die Partien elliptischer und hyperbolischer Krümmung von einander trennt. Die Erledigung jener Frage lässt also auch Schlüsse auf die parabolische Curve*) einer Fläche in ihren singulären Punkten ziehen, und dieses ist der zweite Grund, der diese Note veranlasst hat.

§ 1.

Wir untersuchen zunächst das Verhalten der Hesse'schen Fläche in einem gewöhnlichen k-fachen Punkt der gegebenen Fläche. Die Gleichung dieser Fläche setzen wir in der Form voraus:

$$f = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots = 0,$$

*) Zeuthen hat das Verhalten der parabolischen Curve in verschiedenen singulären Punkten ebenfalls untersucht, und werden seine Arbeiten: Math. Annal. Bd. IX „Sur une classe des points singuliers" und Bd. X „Sur la théorie des surfaces réciproques" im Folgenden öfters mit genauer Angabe der bez. Stelle citirt.

Die gestaltlichen Verhältnisse der parabolischen Curve auf Flächen 3. Ordnung discutirt Herr Bauer (Sitzungsberichte d. Münchener Akademie 1883, Heft 2) im Anschlusse an die Rodenberg'schen Modelle (L. Brill, Darmstadt).

wo u_k, u_{k+1}, ... homogene Ausdrücke vom Grade

$$k,\ k+1,\ \ldots \quad \text{in} \quad x, y, z$$

sind.

Bezeichnen wir die Ableitungen nach x, y, z durch die Indices 1, 2, 3, welche wir der bez. Function oben anhängen, so nimmt die Hesse'sche Fläche die Gestalt an:

$$H=\begin{vmatrix} u_k^{11}+u_{k+1}^{11}+\cdots & , u_k^{12}+u_{k+1}^{12}+\cdots & , \\ \cdot & , \cdot & , \\ \cdot & , \cdot & , \\ (n-k)u_k^1+(n-k-1)u_{k+1}^1+\cdots, & (n-k)u_k^2+(n-k-1)u_{k+1}^2+\cdots, & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} +u_{k+1}^{13}+\cdots & , (n-k)u_k^1+(n-k-1)u_{k+1}^1+\cdots \\ \cdot & , (n-k)u_k^2+(n-k-1)u_{k+1}^2+\cdots \\ \cdot & , (n-k)u_k^3+(n-k-1)u_{k+1}^3+\cdots \\ -k)u_k^3+(n-k-1)u_{k+1}^3+\cdots, & (n-k)(n-k-1)u_k+(n-k-1)(n-k-2)u_{k+1}+\cdots \end{vmatrix}$$

Diese Gleichungsform geht durch eine einfache Transformation in die neue über:

$$\left(\frac{n-1}{k-1}\right)^2 \begin{vmatrix} u_k^{11}+u_{k+1}^{11}+\cdots, & \cdot, & \cdot, & u_{k+1}^1+\cdots \\ u_k^{12}+u_{k+1}^{12}+\cdots, & \cdot, & \cdot, & u_{k+1}^2+\cdots \\ u_k^{13}+u_{k+1}^{13}+\cdots, & \cdot, & \cdot, & u_{k+1}^3+\cdots \\ u_{k+1}^1+\cdots, & \cdot, & \cdot, & -\frac{k-1}{n-1}(n-k)u_k+\frac{k^2-nk+3n-k-2}{n-1}u_{k+1}+\cdots \end{vmatrix}$$

Durch Ausrechnung dieser Determinante erhält man für H die Gleichung:

$$\left(\frac{k-1}{n-1}\right)^2 H = -\frac{k-1}{n-1}(n-k)u_k H(u_k)$$
$$+\left[\frac{k^2-nk+3n-k-2}{n-1}u_{k+1}H(u_k)-\frac{k-1}{n-1}(n-k)u_k\ M(u_k,\ u_{k+1})\right]$$
$$+\Big[\Delta(u_k,\ u_{k+1})+\frac{k^2-nk+7n-k-6}{n-1}u_{k+2}H(u_k)$$
$$+\frac{k^2-nk+3n-k-2}{n-1}u_{k+1}M(u_k,\ u_{k+1})$$
$$-\frac{k-1}{n-1}(n-k)u_k\Big(M(u_k,\ u_{k+2})+M(u_{k+1},\ u_k)\Big)\Big]+\cdots.$$

Hierbei bedeutet $H(u_k)$ die Hesse'sche Determinante der ternären Form u_k, sie ist demnach vom Grade $3(k-2)$ in x, y, z. Die Function $M(u_k, u_{k+1})$ bezeichnet eine Summe von 3 Determinanten welche man erhält, wenn man in $H(u_k)$ der Reihe nach die erste, zweite, dritte Verticalreihe durch die bez. Differentialquotienten von u_{k+1} ersetzt, so dass diese Function vom Grade $3k-5$ in x, y, z wird; die Be-

deutung von $M(u_k, u_{k+2})$ und $M(u_{k+1}, u_k)$ ist sonach selbstverständlich. Endlich bedeutet $\Delta(u_k, u_{k+1})$ die Determinante $H(u_k)$ gerändert mit u^1_{k+1}, u^2_{k+1}, u^3_{k+1}, sie ist also vom Grade $4k-4$ in x, y, z.

Hieraus erkennt man, *dass die Hesse'sche Fläche in einem k-fachen Punkt der gegebenen Fläche selbst einen $(4k-6)$-fachen Punkt besitzt. Der Tangentialkegel $(4k-6)^{ter}$ Ordnung in diesem Punkte zerfällt in einen Kegel k^{ter} Ordnung und in einen Kegel von der Ordnung $3(k-2)$. Der erstere ist mit dem Tangentialkegel der gegebenen Fläche identisch; der letztere wird durch die Hesse'sche Fläche dieses Tangentialkegels (aufgefasst als ternäre Form) dargestellt, schneidet also denselben in den Wendekanten.*

Wir wenden uns jetzt der parabolischen Curve: $f=0$, $\mathsf{H}=0$, und ihrem Verhalten im singulären Punkte zu. Um die Aeste der parabolischen Curve im vielfachen Punkte zu bestimmen, setzen wir einen solchen Curvenast in der Form:

$$x = az + bz^2 + cz^3 + \cdots,$$
$$y = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

voraus, und berechnen die Constanten aus den obigen Gleichungen.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir $u_k, u_{k+1}, \ldots$ durch die Symbole $(xyz)_k$, $(xyz)_{k+1}$, $\ldots$; dann bestimmen sich die Tangenten jener Curvenäste, oder was damit gleichbedeutend ist, die Constanten a und α vermöge der folgenden Gleichungen:

$$(a\alpha 1)_k = 0, \quad (a\alpha 1)_{k+1} + \left(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)(a\alpha 1)_k = 0,$$

und:

$$-\frac{k-1}{n-1}(n-k)\left(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)(a\alpha 1)_k H(a\alpha 1)$$
$$+\frac{k^2-nk+3n-k-2}{n-1}(a\alpha 1)_{k+1} H(a\alpha 1) = 0;$$

oder:

$$(a\alpha 1)_k = 0, \quad (a\alpha 1)_{k+1} \cdot H(a\alpha 1) = 0.$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass $(a\alpha 1)_k$ den Werth von $(xyz)_k$ für $x=a$, $y=\alpha$, $z=1$ bedeutet, und ebenso $H(a\alpha 1)$ den Werth von $H(u_k)$, sowie $\left(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)(a\alpha 1)_k$ den Ausdruck

$$\left(b\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(xyz)_k$$

unter gleicher Annahme.

Hier treten nun zwei verschiedene Fälle auf.

(I) $$(a\alpha 1)_k = 0, \qquad (a\alpha 1)_{k+1} = 0.$$

Hieraus ergeben sich $k.(k+1)$ Werthepaare a, α, welche die Richtungen

von ebensovielen Curvenästen bestimmen. Die Werthepaare b, β folgen dann aus den Gleichungen:

$$b\frac{\partial}{\partial a}(a\alpha 1)_k + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}(a\alpha 1)_k = 0,$$

$$(a\alpha 1)_{k+2} + \Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_{k+1} + \Big(c\frac{\partial}{\partial a} + \gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_k$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(b^2\frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2b\beta\frac{\partial^2}{\partial a\partial\alpha} + \beta^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big)(a\alpha 1)_k = 0,$$

$$-\frac{k-1}{n-1}(n-k)H\Big[\Big(c\frac{\partial}{\partial a} + \gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_k$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(b^2\frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2b\beta\frac{\partial^2}{\partial a\partial\alpha} + \beta^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big)(a\alpha 1)_k\Big]$$
$$+ \frac{k^2 - nk + 3n - k - 2}{n-1}H.\Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_{k+1}$$
$$+ \Delta(a\alpha 1) + \frac{k^2 - nk + 7n - k - 6}{n-1}H.(a\alpha 1)_{k+2} = 0;$$

oder:

$$\Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_k = 0,$$

$$\frac{k-1}{n-1}(n-k)H.(a\alpha 1)_{k+2} + 2H.\Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_{k+1} + \Delta(a\alpha 1)$$
$$+ \varrho H.(a\alpha 1)_{k+2} = 0.$$

Zu jedem der $k(k+1)$ Werthepaare a, α gehört also ein einziges Werthepaar b, β.

(II) $$(a\alpha 1)_k = 0, \qquad H(a\alpha 1) = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen $3k(k-2)$ Werthepaare a, α. Die zugehörigen Werthepaare b, β folgen aus:

$$(a\alpha 1)_{k+1} + \Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_k = 0,$$

$$-\frac{k-1}{n-1}(n-k)\Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_k\Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)H$$
$$+ \frac{k^2 - nk + 3n - k - 2}{n-1}(a\alpha 1)_{k+1}\Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)H$$
$$- \frac{k-1}{n-1}(n-k)M.\Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_k$$
$$+ \Delta(a\alpha 1) + \frac{k^2 - nk + 3n - k - 2}{n-1}M.(a\alpha 1)_{k+1} = 0$$

oder:

$$(a\alpha 1)_{k+1} + \Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)(a\alpha 1)_k = 0,$$

$$\mathfrak{T}(a\alpha 1)_{k+1}\Big(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)H + 2M.(a\alpha 1)_{k+1} + \Delta(a\alpha 1) = 0.$$

Auch hier gehört zu jedem der $3k(k-2)$ Werthepaare a, α nur ein einziges Werthepaar b, β.

Die parabolische Curve schickt demnach durch einen k-fachen Punkt $k.(4k-5)$ einfache Curvenäste, welche in zwei Gruppen zerfallen. Die eine Gruppe besteht aus $k.(k+1)$ Aesten, deren Tangenten im singulären Punkte durch die $k.(k+1)$ Geraden: $u_k = 0$, $u_{k+1} = 0$ gebildet werden, welche $k+2$ consecutive Punkte aus der gegebenen Fläche ausschneiden; man nennt diese Geraden die Haupttangenten des vielfachen Punktes. Die andere Gruppe besteht aus $3k(k-2)$ Aesten deren Tangenten: $u_k = 0$, $H(u_k) = 0$ mit den Wendekanten des Tangentialkegels im singulären Punkte zusammenfallen.)*

Es ist noch zu bemerken, dass von den Wendekanten nur der dritte Theil reell sein kann, während die Kanten $u_k = 0$, $u_{k+1} = 0$ alle reell sein können; woraus sich die Maximalzahl der reellen Aeste der parabolischen Curve im k-fachen Punkte ergiebt.

§ 2.

Es soll nun untersucht werden, wie die Verhältnisse sich gestalten, wenn der k-fache Punkt selbst, oder vielmehr sein Tangentialkegel, weitere Singularitäten aufweist.

Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in dem k-fachen Punkt wird charakterisirt durch den Ausdruck $u_k . H(u_k) = 0$, und ist also leicht anzugeben. Während $u_k = 0$ den Tangentialkegel selbst darstellt, ist $H(u_k) = 0$ sein Hesse'scher Kegel. Besitzt also der Kegel $u_k = 0$ eine λ-fache Kante, so besitzt $H(u_k) = 0$ eine $(3\lambda - 4)$-fache Kante; zugleich stimmen, von den $(3\lambda - 4)$ Tangentialebenen in der singulären Kante des letzteren Kegels, λ Ebenen mit den Tangentialebenen des ersteren Kegels daselbst überein, während die $2(\lambda - 2)$ übrigen Ebenen als die Hesse'sche Form jener λ Ebenen erscheinen. Ebenso erkennt man, dass, wenn sich eine Ebene von $u_k = 0$ abtrennt, sie sich auch von $H(u_k) = 0$ abtrennt, so dass der Tangentialkegel der Hesse'schen Fläche diese Ebene doppelt gezählt enthält.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass $H(u_k)$ auch identisch verschwinden kann,**) was immer *dann und nur dann* eintritt, wenn sich u_k als binäre Form darstellen lässt, d. h. wenn $u_k = 0$ k Ebenen darstellt, welche demselben Büschel angehören. Der Tangentialkegel der Hesse'schen Fläche in dem singulären Punkt wird alsdann: $u_k . M(u_k, u_{k+1}) = 0$, d. h. er reducirt sich auf die k Ebenen, $u_k = 0$,

*) Vergl. Zeuthen, a. a. O. Bd. X, pag. 519.

**) Vergl Gordan und Nöther: Formen mit verschwindender Hesse'scher Determinante, Math. Ann. Bd. X, pag. 547.

ferner auf $2(k-2)$ Ebenen, welche durch die Hesse'sche Form jener k Ebenen dargestellt wird, und endlich auf einen Kegel vom Grade $k-1$. Es wird sich weiter unten, wo es sich um die vielfachen Curven der Fläche handelt, die Gelegenheit bieten, hierauf noch zurückzukommen.

Wir haben jetzt die weitere Frage zu beantworten: wie gestaltet sich die parabolische Curve im singulären Punkt, wenn derselbe sich in der vorher angegebenen Weise weiter specialisirt?

Die Dinge werden hier etwas complicirt, so dass eine ganz allgemeine Antwort auf diese Frage erst gegeben werden soll, nachdem bei einigen Beispielen die sich darbietenden Verhältnisse näher untersucht worden sind.

a) Als ersten Fall betrachten wir eine Fläche mit singulärem Punkte, dessen Tangentialkegel $u_k = 0$ eine Doppelkante besitzt. Dann besitzt der Kegel $H(u_k) = 0$ dieselbe Doppelkante und längs dieser Doppelkante dieselben Tangentialebenen. Benutzen wir also die früheren Bezeichnungen, und ist die Doppelkante bestimmt durch $x:y:z = a:\alpha:1$, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen:

$$(a\alpha 1)_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a}(a\alpha 1)_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha}(a\alpha 1)_k = 0;$$

$$H(a\alpha 1)_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a} H = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} H = 0;$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = \varrho \frac{\partial^2}{\partial a^2}(a\alpha 1)_k, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial a \partial \alpha} = \varrho \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha}(a\alpha 1)_k, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} = \varrho \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}(a\alpha 1)_k,$$

wo ϱ ein bekannter von a und α abhängiger Factor ist.

Von den Aesten der parabolischen Curve im singulären Punkte nehmen nur diejenigen unsere Aufmerksamkeit in Anspruch, welche ihn in der Richtung der Doppelkante $x:y:z = a:\alpha:1$ passiren. Die Reihenentwicklungen für alle diese Curvenäste beginnen mit:

$$x = az + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

und steigen, wie sich zeigt, nach Potenzen von $z^{\frac{1}{3}}$ an, so dass wir die Reihen erhalten:

$$x = az + bz^{\frac{4}{3}} + cz^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \beta z^{\frac{4}{3}} + \gamma z^{\frac{5}{3}} + \cdots.$$

Die Flächengleichung liefert durch Einsetzen dieser Werthe als erste Relation:

(1) $$\frac{1}{2}\left(b^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2b\beta \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right)(a\alpha 1)_k = 0,$$

welche sich vermöge der obigen Bedingungsgleichungen auch in der Form schreiben lässt:

$$\left(b^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2b\beta \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right) H = 0.$$

Die weiteren Relationen zur Bestimmung von b und β erhalten wir durch Nullsetzen der Coefficienten von z^{k+1} resp. z^{4k-4} in f resp. H, welche sich durch Einführung der Werthe von x und y in diese Gleichungen ergeben. Wir finden so:

$$(a\alpha 1)_{k+1} + \delta^3 (a\alpha 1)_k = 0,$$

$$\Delta(a\alpha 1) + \frac{k^2-nk+3n-k-2}{n-1}(a\alpha 1)_{k+1} M + \frac{k^2-nk+3n-k-2}{n-1}(a\alpha 1)_{k+1}\delta^3 H$$
$$-\frac{k-1}{n-1}(n-k)M.\delta^3(a\alpha 1)_k - \frac{k-1}{n-1}(n-k)\,\delta^3 H.\,\delta^3(a\alpha 1)_k = 0,$$

wobei δ^3 die Operation:

$$\delta^3 = \frac{1}{6}\Big(b^3 \frac{\partial^3}{\partial a^3} + 3b^2\beta \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \alpha} + 3b\beta^2 \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha^2} + \beta^3 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}\Big)$$
$$+\Big(bc \frac{\partial^2}{\partial a^2} + (b\gamma + c\beta) \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} + \beta\gamma \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\Big) + \Big(d \frac{\partial}{\partial a} + \delta \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big)$$

bedeutet.

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir durch Elimination von c, γ sogleich:

$$(2)\quad \Delta(a\alpha 1) + 2(a\alpha 1)_{k+1} M + \frac{1}{3}(a\alpha 1)_{k+1}\Big(b^3 \frac{\partial^3}{\partial a^3} + 3b^2\beta \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \alpha}$$
$$+3b\beta^2 \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha^2} + \beta^3 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}\Big)\big(H - \varrho(a\alpha 1)_k\big) - 2\varrho.[(a\alpha 1)_{k+1}]^2 = 0.$$

Die Gleichung (1) liefert für das Verhältniss $b:\beta$ zwei verschiedene Werthe; für jedes dieser beiden Verhältnisse ergiebt die Gleichung (2) drei verschiedene Werthe b und β, die sich nur um dritte Einheitswurzeln unterscheiden.

Die parabolische Curve besitzt also in der Richtung $x:y:z = a:\alpha:1$ *zwei superlineare*) Zweige*, welche durch die Entwicklungen bestimmt sind:

$$x = az + b_1 z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \beta_1 z^{\frac{4}{3}} + \cdots;$$

$$x = az + \varepsilon b_1 z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \varepsilon\beta_1 z^{\frac{4}{3}} + \cdots;$$

$$x = az + \varepsilon^2 b_1 z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \varepsilon^2\beta_1 z^{\frac{4}{3}} + \cdots;$$

---

*) Ist eine Curve durch zwei Reihen dargestellt, welche nach Potenzen von $\frac{1}{z^{\mu}}$ fortschreiten, so gehören μ Entwicklungen zusammen und ihre Constanten unterscheiden sich nur um $\sqrt[\mu]{1}$; man sagt, es bilden in $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die μ Zweige einen Cyclus, oder sie bilden einen *superlinearen* Zweig μ. Ordnung.

$$x = az + b_2 z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \beta_2 z^{\frac{4}{3}} + \cdots;$$

$$x = az + \varepsilon b_2 z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \varepsilon\beta_2 z^{\frac{4}{3}} + \cdots;$$

$$x = az + \varepsilon^2 b_2 z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \varepsilon^2\beta_2 z^{\frac{4}{3}} + \cdots.$$

Ist $\frac{\partial^2 (a\alpha 1)_k}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 (a\alpha 1)_k}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{\partial^2 (a\alpha 1)_k}{\partial a\, \partial \alpha}\right)^2$ negativ, so schneiden sich in der Doppelkante $x : y : z = a : \alpha : 1$ zwei reelle Kegelmäntel und $b_1\beta_1, b_2\beta_2$, d. h. die beiden superlinearen Zweige, sind reell; ist dagegen jener Ausdruck positiv, so ist die Doppelkante eine isolirte, und die bez. Curvenäste werden imaginär.

Ist endlich jene Discriminante gleich Null, so wird die Gleichung (1) eine rein quadratische, indem zugleich die Doppelkante in eine Rückkehrkante übergeht. Die Reihen der beiden superlinearen Zweige stimmen dann noch in den Coefficienten von $z^{\frac{4}{3}}$ überein ($b_1 = b_2$, $\beta_1 = \beta_2$), und die Coefficienten von $z^{\frac{5}{3}}$, in x einerseits und y andrerseits, bestimmen sich durch eine quadratische Gleichung; es kommt also:

$$x = az + bz^{\frac{4}{3}} + \varepsilon c_1 z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \beta z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon\gamma_1 z^{\frac{5}{3}} + \cdots;$$

$$x = az + bz^{\frac{4}{3}} + \varepsilon c_2 z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \beta z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon\gamma_2 z^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$

wo für ε der Reihe nach die drei dritten Einheitswurzeln zu setzen sind. Das Gesagte ist leicht zu beweisen und die quadratische Gleichung zur Bestimmung von c_1 und c_2 einfach hinzuschreiben, was ich jedoch unterlasse, da diese Gleichung etwas lang ist.

b) Wir haben soeben einen k-fachen Punkt betrachtet, dessen Tangentialkegel eine Doppelkante besitzt, und ich mache jetzt noch die weitere Annahme, dass der Kegel $u_{k+1} = 0$ durch jene Doppelkante $x : y : z = a : \alpha : 1$ hindurchgeht,*) so dass zu den früheren Bedingungsgleichungen noch die neue Gleichung: $(a\alpha 1)_{k+1} = 0$ hinzutritt. Wir erkennen sofort, dass es jetzt 8 Reihenentwicklungen giebt, welche mit $x = az + \cdots$, $y = \alpha z + \cdots$ beginnen. Es rücken nämlich von den $k\,.\,(k+1)$ Geraden $u_k = 0$, $u_{k+1} = 0$ zwei, und von den $3k\,(k-2)$ Geraden $u_k = 0$, $H(u_k) = 0$ sechs in die Doppelkante

*) Ein k-facher Punkt reducirt die Classe einer Fläche um $k\cdot(k-1)^2$ Einheiten, jede Doppelkante des Tangentenkegels im k-fachen Punkte $u_k = 0$ um *eine* Einheit, wenn dieselbe *nicht* auf $u_{k+1} = 0$ liegt, im entgegengesetzten Falle aber um *zwei* Einheiten.

hinein. Es zeigt sich nun hier, dass die beiden *superlinearen* Zweige, deren Reihen vorher nach Potenzen von $z^{\frac{1}{3}}$ entwickelbar waren, nicht mehr existiren können; vielmehr spaltet sich jeder dieser beiden Zweige in einen *superlinearen* Zweig mit Reihenentwicklungen nach Potenzen von $z^{\frac{1}{2}}$ und in einen *linearen* Zweig. Es finden sich so im Ganzen *zwei superlineare* Zweige und *vier lineare* Zweige. Um die Reihen der beiden superlinearen Zweige zu erhalten, ist zu bemerken, dass in Folge der angenommenen Bedingungen sich die folgenden Relationen ergeben: $\Delta(a\alpha 1) = 0$, $\frac{\partial \Delta}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = 0$, $M = 0$. Die Coefficienten von $z^{\frac{3}{2}}$ in den Reihen:

$$x = az + b_1 z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \beta_1 z^{\frac{3}{2}} + \cdots;$$

$$x = az - b_1 z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \qquad y = \alpha z - \beta_1 z^{\frac{3}{2}} + \cdots;$$

$$x = az + b_2 z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \qquad y = \alpha z + \beta_2 z^{\frac{3}{2}} + \cdots;$$

$$x = az - b_2 z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \qquad y = \alpha z - \beta_2 z^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

bestimmen sich in Folge dessen durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \left(b^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2b\beta \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right)(a\alpha 1)_k = 0,$$

und:

$$\delta^3(a\alpha 1)_k + \left(b \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)(a\alpha 1)_{k+1} = 0,$$

$$-\frac{k-1}{n-1}(n-k)\delta^3(a\alpha 1)_k . H + \delta^3 \frac{k^2 - nk + 3n - k - 2}{n-1} \delta(a\alpha 1)_{k+1} \delta^3 H$$

$$-\frac{k-1}{n-1}(n-k)\delta M . \delta^3(a\alpha 1)_k + \delta^2\Delta + \frac{k^2 - nk + 3n - k - 2}{n-1} \delta M . \delta(a\alpha 1)_{k+1} = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$2\delta(a\alpha 1)_{k+1} \delta^3 H + 2\delta(a\alpha 1)_{k+1} \delta M + \delta^2 \Delta = 0,$$

oder

$$(2) \quad 0 = \frac{1}{2}\left(b^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2b\beta \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right)\Delta(a\alpha 1)$$

$$+ 2\left(b \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)\left(M - \varrho(a\alpha 1)_{k+1}\right)\left(b \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)(a\alpha 1)_{k+1}$$

$$+ \frac{1}{3}\left(b \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)(a\alpha 1)_{k+1}\left(b^3 \frac{\partial^3}{\partial a^3} + 3b^2\beta \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \alpha} + \cdots\right)[H - \varrho(a\alpha 1)_k].$$

Aus der Gleichung (1) ergeben sich zwei Verhältnisse $b:\beta$, welche in Gleichung (2) eingesetzt, dieselbe zu einer rein quadratischen Gleichung für b machen (abgesehen von dem Factor b^2), und somit b_1, b_2 und β_1, β_2 bestimmen. Ganz ebenso kann man die Coefficienten von z^2 in den Reihen der vier linearen Zweige berechnen, was ich hier unterlasse.

§ 3.

Wir legen uns jetzt den allgemeinen Fall vor, wo die Fläche einen k-fachen Punkt und der Tangentialkegel in diesem Punkte eine λ-fache Kante besitzt; wie verhält sich die parabolische Curve in diesem Punkte? Die λ-fache Kante soll bestimmt sein durch $x:y:z=a:\alpha;1$, und es interessiren uns nur diejenigen Curvenäste, welche diese Gerade tangiren, deren Reihen also mit $x = az + \cdots$, $y = \alpha z + \cdots$ beginnen. Aus der Annahme einer λ-fachen Kante $x:y:z=a:\alpha:1$ des Kegels $u_k = 0$, folgt sogleich, dass diese Kante $(3\lambda - 4)$-fache Kante für den Kegel $H(u_k) = 0$, $(2\lambda - 4)$-fache Kante für die Kegel $M(u_k, u_{k+1}) = 0$, $\Delta(u_k, u_{k+1}) = 0$ und $M(u_k, u_{k+2}) = 0$, und endlich $(\lambda - 2)$-fache Kante für die Kegel $M(u_{k+1}, u_k) = 0$, etc. ist. Es verschwinden in Folge dessen alle Differentialquotienten von: u_k, H, M, Δ etc. für $x:y:z=a:\alpha:1$ bis zu den Graden: λ, $3\lambda-4$, $2\lambda-4$, $\lambda-2$ respective. *Die parabolische Curve weist nun zweierlei Zweige mit der Tangente* $x = az$, $y = \alpha z$, *auf, nämlich* λ *superlineare Zweige, deren Reihen nach Potenzen von* $z^{\frac{1}{\lambda+1}}$ *aufsteigen, und* $(2\lambda-4)$ *superlineare Zweige, deren Reihen nach Potenzen von* $z^{\frac{1}{\lambda}}$ *fortschreiten.* Wir beschäftigen uns zunächst mit den ersteren Zweigen; ihre Reihen haben die Form:

$$x = az + \varepsilon b_i z^{\frac{\lambda+2}{\lambda+1}} + \varepsilon^2 c_i z^{\frac{\lambda+3}{\lambda+1}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta_i z^{\frac{\lambda+2}{\lambda+1}} + \varepsilon^2 \gamma_i z^{\frac{\lambda+3}{\lambda+1}} + \cdots,$$

wo für ε der Reihe nach alle $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln zu setzen sind. Setzt man für i die Zahlen von 1 bis λ, so erhält man die λ verschiedenen Zweige, und es kommt darauf an, die 2λ Grössen

$$b_1, b_2, \ldots, b_\lambda, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda$$

zu berechnen. Dazu dienen die folgenden Betrachtungen.

Schreibt man kurz

$$b^m \frac{\partial^m f}{\partial x^m} + \frac{m}{1} b^{m-1}\beta \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial y} + \cdots + \beta^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m} = \left(b\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(xyz),$$

und bezeichnet man ferner den letzteren Ausdruck für $x:y:z=a:\alpha:1$ mit $\left(b\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^m f(a\alpha 1)$, so ist die Bedeutung des Ausdruckes

$\left(c\frac{\partial}{\partial a}+\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^r\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^s f(a\alpha 1)$ nicht misszuverstehen. Setzt man nun in f und H für x und y die obigen Reihen ein, so ergeben sich die nachstehenden Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten b und β. Die Coefficienten von $z^{k+\frac{\lambda}{\lambda+1}}$ resp. z^{k+1} in f liefern

$$(1)\qquad \frac{1}{\lambda!}\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^\lambda(a\alpha 1)_k=0,$$

$$(2a)\quad \frac{1}{(\lambda+1)!}\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{\lambda+1}(a\alpha 1)_k$$
$$+\frac{1}{(\lambda-1)!}\left(c\frac{\partial}{\partial a}+\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{\lambda-1}(a\alpha 1)_k+(a\alpha 1)_{k+1}=0.$$

Die Gleichung (1) bestimmt λ Verhältnisse $b_i:\beta_i$, welche eine einfache geometrische Deutung zulassen. $u_k=0$ ist ein Kegel mit λ-facher Kante; bildet man die Gleichung der λ Tangentialebenen in dieser Kante und schneidet sie mit der Ebene $z=0$, so erhält man die λ Geraden in dieser Ebene durch die Gleichung:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial a}+y\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^\lambda(a\alpha 1)_k=0.$$

Diese λ Geraden kann man auch vermöge der Gleichung (1) in der Form schreiben $x:y=b_i:\beta_i$, wo der Reihe nach die λ Verhältnisse zu benutzen sind.

Ganz ebenso stellt $H(u_k)=0$ einen Kegel mit $(3\lambda-4)$-facher Kante dar, die Tangentialebenen schneiden die Ebene $z=0$ in den $(3\lambda-4)$ Geraden: $\left(x\frac{\partial}{\partial a}+y\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{3\lambda-4}H=0$. Da aber unter diesen Geraden auch jene λ Geraden $x:y=b_i:\beta_i$ enthalten sind, so muss auch der Ausdruck: $\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{3\lambda-4}H=0$ sein, sobald $b:\beta$ der Gleichung (1) genügt.

Es verschwinden somit in H alle Coefficienten bis zum Coefficienten $z^{4k-6+\frac{4\lambda-2}{\lambda+1}}$, welcher eine weitere Gleichung liefert, die sich mit Hülfe von (2a) reducirt auf:

$$(2b)\quad 2(a\alpha 1)_{k+1}\left[\frac{1}{(3\lambda-3)!}\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{3\lambda-3}H\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(3\lambda-5)!}\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{3\lambda-5}\left(c\frac{\partial}{\partial a}+\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)H\right]$$
$$+\frac{2}{(2\lambda-4)!}(a\alpha 1)_{k+1}\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{2\lambda-4}M$$
$$+\frac{1}{(2\lambda-4)!}\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{2\lambda-4}\Delta=0.$$

Durch Elimination von c und γ aus (2a) und (2b) folgt schliesslich

eine zweite Gleichung zur Bestimmung von b und β. Diese Elimination ist aber thatsächlich ausführbar, da:

$$\left(c\frac{\partial}{\partial a}+\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{\lambda-1}(a\alpha 1)_k=\left(c-\frac{b\gamma}{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial a}\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{\lambda-1}(a\alpha 1)_k$$

vermöge der Gleichung (1):

$$\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{\lambda-1}(a\alpha 1)_k=0$$

und ebenso:

$$\left(c\frac{\partial}{\partial a}+\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{3\lambda-5}H=\left(c-\frac{b\gamma}{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial a}\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{3\lambda-5}H$$

vermöge der Gleichung:

$$\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{3\lambda-5}H=0.$$

Man findet so die Gleichung:

(2) $$0=\frac{\delta^{2\lambda-4}\Delta}{2(a\alpha 1)_{k+1}}+\delta^{2\lambda-1}M+\frac{(2\lambda-4)!}{(3\lambda-3)!}\delta^{3\lambda-3}H$$

$$-\frac{(2\lambda-4)!}{(3\lambda-5)!}\frac{\frac{\partial}{\partial a}\delta^{3\lambda-5}H}{\frac{\partial}{\partial a}\delta^{\lambda-1}(a\alpha 1)_k}\left[\frac{\delta^{\lambda+1}(a\alpha 1)_k}{\lambda(\lambda+1)}+(\lambda-1)!\,(a\alpha 1)_{k+1}\right],$$

worin δ die Operation $\left(b\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ bedeutet.

Setzt man eines der λ Verhältnisse $b_i:\beta_i$ in diese Gleichung ein, so erhält man eine reine Gleichung $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zur Bestimmung von b_i, indem sich ein Factor $b_i^{2\lambda-4}$ absondert. Damit ist aber die geforderte Berechnung der 2λ Grössen b_i, β_i geleistet.

Auf ganz ähnliche Weise lassen sich für die $(2\lambda-4)$ übrigen superlinearen Zweige die Reihenentwicklungen finden. Dieselben haben die Form:

$$x=az+\varepsilon r_i z^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}+\varepsilon^2 s_i z^{\frac{\lambda+2}{\lambda}}+\cdots,$$

$$y=\alpha z+\varepsilon\varrho_i z^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}+\varepsilon^2\sigma_i z^{\frac{\lambda+2}{\lambda}}+\cdots,$$

wo ε eine λ^{te} Einheitswurzel ist, und für i die Zahlenwerthe:

$$i=1,2,\ldots,2\lambda-4$$

zu setzen sind. Zur Berechnung der Coefficienten r_i, ϱ_i haben wir hier die Gleichungen:

(1) $$\frac{1}{\lambda!}\left(r\frac{\partial}{\partial a}+\varrho\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{\lambda}(a\alpha 1)_k+(a\alpha 1)_{k+1}=0,$$

und:

$$\frac{k-1}{n-1}(n-k)\lambda!\,(a\alpha 1)_{k+1}\frac{\delta^{3\lambda-4}H}{(3\lambda-4)!}$$

$$+\frac{k^2-nk+3n-k-2}{n-1}(a\alpha 1)_{k+1}\frac{\delta^{3\lambda-4}H}{(3\lambda-4)!}+\frac{k-1}{n-1}(n-k)\lambda!(a\alpha 1)_{k+1}\frac{\delta^{2\lambda-4}M}{(2\lambda-4)!}$$

$$+\frac{k^2-nk+3n-k-2}{n-1}(a\alpha 1)_{k+1}\frac{\delta^{2\lambda-4}M}{(2\lambda-4)!}+\frac{\delta^{2\lambda-4}\Delta}{(2\lambda-4)!}=0,$$

oder (2a):

$$\frac{(2\lambda-4)!}{(3\lambda-4)!}\delta^{3\lambda-4}H+\delta^{2\lambda-4}M+\frac{n-1}{(k-1)(n-k)\lambda!+k^2-nk+3n-k-2}\frac{\delta^{2\lambda-4}\Delta}{(a\alpha 1)_{k+1}}=0,$$

wenn δ die Operation $\left(r\frac{\partial}{\partial a}+\varrho\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ bedeutet.

Nun haben wir bereits weiter oben gesehen, dass $\delta^{3\lambda-4}H$ immer verschwindet, wenn $\delta^{\lambda}(a\alpha 1)_k$ verschwindet, dass also $\delta^{3\lambda-4}H$ den Ausdruck $\delta^{\lambda}(a\alpha 1)_k$ als Factor enthält; und zwar ergiebt die Rechnung:

$$\delta^{3\lambda-4}H=\frac{(k-1)(k-\lambda)}{\lambda!(\lambda-1)!(\lambda-2)!}\delta^{\lambda}(a\alpha 1)_k\delta^{2\lambda-4}\left\{\left(\frac{\partial^2(a\alpha 1)_k}{\partial a\partial\alpha}\right)^2-\frac{\partial^2(a\alpha 1)_k}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial^2(a\alpha 1)_k}{\partial\alpha^2}\right\},$$

$$=\frac{(k-1)(k-\lambda)}{(\lambda-1)!(\lambda-2)!}(a\alpha 1)_{k+1}\delta^{2\lambda-4}H_{33}(a\alpha 1),$$

wenn $H_{33}(a\alpha 1)$ die Unterdeterminante von $H(a\alpha 1)$ bezeichnet, welche durch Weglassen der dritten Horizontal- und Verticalreihe entsteht.

Setzen wir diesen Werth von $\delta^{3\lambda-4}H$ in die Gleichung (2a) ein, so erhalten wir eine homogene Gleichung in r und ϱ vom Grade $2\lambda-4$:

$$(2)\quad\frac{(k-1)(k-\lambda)(2\lambda-4)!}{(\lambda-1)!(\lambda-2)!(3\lambda-4)!}(a\alpha 1)_{k+1}\delta^{2\lambda-4}H_{33}(a\alpha 1)+\delta^{2\lambda-4}M$$

$$+\frac{n-1}{(k-1)(n-k)\lambda!+k^2-nk+3n-k-2}\frac{\delta^{2\lambda-4}\Delta}{(a\alpha 1)_{k+1}}=0.$$

Diese Gleichung bestimmt $2\lambda-4$ Verhältnisse $r_i:\varrho_i$, welche in Gleichung (1) eingesetzt, diese zu einer reinen Gleichung λ^{ten} Grades in r_i machen und somit die geforderte Berechnung der Constanten r_i ϱ_i ermöglichen.

Wir haben also den Satz bewiesen: *Besitzt eine Fläche einen k-fachen Punkt und in diesem einen Tangentialkegel mit einer λ-fachen Kante $x:y:z=a:\alpha:1$, so bestehen die Zweige der parabolischen Curve, welche diese Kante zur Tangente haben, aus λ superlinearen Zweigen von der Ordnung $\lambda+1$ und aus $2\lambda-4$ superlinearen Zweigen von der Ordnung λ.*

Im Anschluss hieran mag noch der Fall erledigt werden, wo der Tangentialkegel im k-fachen Punkte in eine Ebene $g=0$ und einen Kegel $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $u_{k-1}=0$ zerfällt. Wir untersuchen hier natürlich nur diejenigen Curvenäste, deren Tangenten in der Ebene $g=0$ liegen. *Zunächst giebt es $(4k-4)$ lineare Zweige* von der Form

$$x = az + bz^2 + \cdots, \quad y = \alpha z + \beta z^2 + \cdots,$$

deren Tangenten sich durch die Gleichungen bestimmen:

$$g(a\alpha 1) = 0, \quad \delta g \cdot (a\alpha 1)_{k-1} + (a\alpha 1)_{k+1} = 0,$$

$$2(a\alpha 1)_{k+1} H_1 \delta g + 2(a\alpha 1)_{k+1} M + \Delta = 0,$$

wenn $H(u_k) = g \cdot H_1(u_k)$ und δ wiederum die Operation

$$\left(b \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$$

bezeichnet.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$-2[(a\alpha 1)_{k+1}]^2 \frac{H_1}{(a\alpha 1)_{k-1}} + 2(a\alpha 1)_{k+1} M + \Delta = 0,$$

eine Gleichung, welche vom Grade $4k - 4$ in $a\,\alpha$ ist und mit $g=0$ zusammen die gesuchten Tangenten liefert. $H_1(a\alpha 1)$ ist nämlich, unter Zuhilfenahme von $g = 0$, durch $(a\alpha 1)_{k-1}$ dividirbar, denn die Geraden $g = 0$, $(a\alpha 1)_{k-1} = 0$ liegen auch auf $H_1(a\alpha 1) = 0$.

Es giebt ferner $(k - 1)$ *superlineare Zweige, deren Reihen nach Potenzen von* $z^{\frac{1}{3}}$ *fortschreiten:*

$$x = az + \varepsilon b z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 c z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \gamma z^{\frac{5}{3}} + \cdots;$$

ihre Constanten bestimmen sich durch folgende Gleichungen:

Erstens: $$g = 0, \quad (a\alpha 1)_{k-1} = 0;$$

dieselben ergeben $k - 1$ Werthepaare a, α;

zweitens: $$\left(b \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)(a\alpha 1)_{k-1} = \delta(a\alpha 1)_{k-1} = 0;$$

diese Gleichung sagt nichts Anderes, als dass die Gerade $x:y:z = b:\beta:0$ in der Ebene liegt, welche $u_{k-1} = 0$ längs der Kante $x:y:z = a:\alpha:1$ berührt. Der Kegel $H_1(u_k) = 0$ besitzt aber in dieser Kante dieselbe Tangentialebene, also gilt auch die Gleichung: $\delta H_1 = 0$ und folglich:

$$\frac{\partial(a\alpha 1)_{k-1}}{\partial a} : \frac{\partial(a\alpha 1)_{k-1}}{\partial \alpha} = \frac{\partial H_1}{\partial a} : \frac{\partial H_1}{\partial \alpha}.$$

Zur Berechnung von b und β hat man noch die Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2} \delta g \delta^2 (a\alpha 1)_{k-1} + \delta g \left(c \frac{\partial}{\partial a} + \gamma \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)(a\alpha 1)_{k-1} + (a\alpha 1)_{k+1} = 0,$$

$$(a\alpha 1)_{k+1} \delta g \delta^2 H_1 + 2(a\alpha 1)_{k+1} \delta g \left(c \frac{\partial}{\partial a} + \gamma \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) H_1 + 2(a\alpha 1)_{k+1} M + \Delta = 0,$$

welche sich vermöge obiger Relationen auf:

$$2b) \quad (a\alpha 1)_{k+1} \delta g \delta^2 H_1 - (a\alpha 1)_{k+1} \frac{\frac{\partial H_1}{\partial a}}{\frac{\partial (a\alpha 1)_{k-1}}{\partial a}} \left(\delta g \delta^2 (a\alpha 1)_{k-1} + 2(a\alpha 1)_{k+1}\right)$$

$$+ 2(a\alpha 1)_{k+1} M + \Delta = 0$$

reduciren. Aus den Gleichungen (2a) und (2b) berechnen sich nun die Constanten b und β. Ausser diesen Curvenzweigen, welche die Ebene $g = 0$ berühren, giebt es noch $(k-1)(3k-9)$ mit den Tangenten $(a\alpha 1)_{k-1} = 0$, $H_1(a\alpha 1) = 0$, und $(k-1)(k+1)$ mit den Tangenten $(a\alpha 1)_{k-1} = 0$, $(a\alpha 1)_{k+1} = 0$. Bildet man nun die Summe aller Curvenäste, indem man die superlinearen Zweige mit der zugehörigen Multiplicität zählt, so findet man $k(4k-5)+1$, also einen Curvenast mehr, als in einem k-fachen Punkt, dessen Tangentialkegel nicht zerfällt.

§ 4.

Ein besonderes Interesse wird die parabolische Curve in den biplanaren und uniplanaren Knotenpunkten bieten, welche wir desshalb hier besonders behandeln. Schon aus den vorhergehenden Betrachtungen ergiebt sich, dass diese Curve in einem biplanaren Knotenpunkte 8 Aeste besitzt, und wir fragen uns nach ihrer Lage in den einzelnen Fällen. Wir setzen die Gleichung der Fläche in der Form voraus:

$$f = xy + (xyz)_3 + (xyz)_4 + \cdots = xy + u_3 + u_4 + \cdots = 0.$$

Dann wird die Gleichung der Hesse'schen Fläche:

$$\frac{H}{(n-1)^2} = \frac{n-2}{n-1} xy \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2 - \frac{n}{n-1} u_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}$$
$$+ \frac{n-2}{n-1} xy \left[\frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial y}\right] + \cdots = 0.$$

Ist nun der biplanare Knotenpunkt ein B_3, d. h. ist der Coefficient von z^3 in u_3 von Null verschieden, so erhalten wir Curvenäste von der Form:

$$x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots, \quad y + \alpha_i z + \beta_i z^2 + \gamma_i z^3 + \cdots, \quad i = 1,2,3,4,$$

wobei sich die Constanten α_i und b_i durch die Gleichungen bestimmen:

$$(1) \qquad b\alpha + (0\alpha 1)_3 = 0$$

und $$\frac{n-2}{n-1} b\alpha \frac{\partial^2}{\partial z^2}(0\alpha 1)_3 + \left[\frac{\partial}{\partial z}(0\alpha 1)_3\right]^2 - \frac{n}{n-1}(0\alpha 1)_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2}(0\alpha 1)_3 = 0,$$

oder:

$$(2) \qquad -2(0\alpha 1)_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2}(0\alpha 1)_3 + \left[\frac{\partial}{\partial z}(0\alpha 1)_3\right]^2 = 0.$$

Es mag hierbei noch einmal erwähnt werden, dass $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(0\alpha 1)_3$, etc. den Werth von $\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}$, etc. für $x : y : z = 0 : \alpha : 1$ bedeutet.

Ebenso findet man 4 Aeste von der Form:

$$x = r_i z + s_i z^2 + t_i z^3 + \cdots, \quad y = \sigma_i z^2 + \tau_i z^3 + \cdots, \quad i = 1,2,3,4.$$

wo die r_i und σ_i den Gleichungen genügen:

$$\sigma r+(r01)_3=0, \quad -2(r01)_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r01)_3+\left[\frac{\partial}{\partial z}(r01)_3\right]^2=0.$$

In einem biplanaren Punkt B_3 besitzt die Hesse'sche Fläche H *einen dreifachen (triplanaren) Punkt mit dem Tangentialkegel* $xy\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}=0$; *die parabolische Curve*) weist daselbst* 8 *lineare Zweige auf, von denen* 4 *die Ebene* $x=0$ *und* 4 *die Ebene* $y=0$ *berühren.*

Ganz anders verhält es sich mit einem biplanaren Knotenpunkt B_4. Derselbe entsteht, *wenn der Coefficient von* z^3 *in* u_3 *verschwindet.* Zwar besitzt alsdann H immer noch einen triplanaren Knotenpunkt, aber die drei Ebenen $x=0$, $y=0$, $\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}=0$ schneiden sich in einer Geraden. Die Gleichung (2), welche sich durch:

$$\alpha=\frac{y}{z}, \quad -2(0yz)_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}(0yz)_3+\left[\frac{\partial}{\partial z}(0yz)_3\right]^2=0$$

ersetzen lässt, wird unter der angegebenen Bedingung von z völlig frei, liefert also 4 Wurzeln $\alpha=0$. Um diese Behauptung zu erweisen, braucht man nur jene Gleichung nach z zu differentiiren, wodurch dieselbe identisch verschwindet, da $\frac{\partial^3}{\partial z^3}(0yz)_3=0$ ist.

Man erkennt also zunächst, dass alle 8 Curvenzweige der parabolischen Curve die singuläre Gerade $x=0$, $y=0$ des Knotenpunktes berühren; ihr weiteres Verhalten stellt sich aber folgendermassen. Setzt man:

$$u_3=z^2(hx+iy)+z(kx^2+2lxy+gy^2)+px^3+3qx^2y+3rxy^2+sy^3,$$
$$u_4=mz^4+z^3(tx+uy)+\cdots, \quad u_5=vz^5+\cdots,$$

so kann man die Anfangsglieder der Reihen berechnen. Man erhält so *zwei lineare Zweige:*

$$x=bz^2+cz^3+\cdots, \quad y=\beta z^2+\gamma z^3+\cdots,$$

wo sich b und β aus den Gleichungen bestimmen:

$$b\beta+hb+i\beta+m=0, \quad (hb+i\beta)(hi-m)+2m(hi-m)=0,$$

also:

$$b=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-mhi}}{h}, \quad \beta=\frac{-m\mp\sqrt{m^2-mhi}}{i}.$$

Die erste der beiden Gleichungen entsteht, wenn man den Coefficienten von z^4 in f gleich Null setzt, die zweite Gleichung folgt ebenso aus dem Coefficienten von z^6 in H.

Ferner giebt es *einen superlinearen Zweig* mit den Reihen:

$$x=cz^2+\varepsilon dz^{\frac{7}{3}}+\varepsilon^2 cz^{\frac{8}{3}}+\cdots, \quad y=\varepsilon\alpha z^{\frac{4}{3}}+\varepsilon^2\beta z^{\frac{5}{3}}+\gamma z^2+\cdots, \quad \varepsilon^3=1.$$

*) Zeuthen, a. a. O. X, p. 490.

Und zwar hat man zur Berechnung der Constanten die Gleichungen:

$$c = -i, \quad d = -g\alpha, \quad \alpha^3\left[\frac{g^2}{i} - 4s\right] - 4m + 4hi = 0,$$

welche letztere durch Nullsetzen des Coefficienten von $z^{5\frac{1}{3}}$ in H entsteht.

Ebenso giebt es *einen superlinearen Zweig* mit den Reihen:

$$x = \varepsilon a z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \gamma z^2 + \varepsilon\delta z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

wo analog:

$$\gamma = -h, \quad \delta = -ka, \quad a^3\left[\frac{k^2}{h} - 4p\right] - 4m + 4hi = 0.$$

In einem biplanaren Knotenpunkt B_4 besteht die parabolische Curve aus zwei linearen Zweigen und aus zwei superlinearen Zweigen von der Ordnung 3, welche alle die singuläre Gerade $x = 0$, $y = 0$ berühren.

Geht man zu einem biplanaren Knotenpunkt B_5 über, so kommt zu den früheren Bedingungsgleichungen noch die weitere: $m = hi$ hinzu, wodurch ersichtlich die vorhergehenden Entwicklungen illusorisch werden. Die beiden linearen Zweige des B_4 sind hier mit einander verzweigt und bilden *einen Curvenast mit Spitze*, dessen Reihen sind:

$$x = bz^2 \pm cz^{\frac{5}{2}} + dz^3 \pm \cdots, \quad y = \beta z^2 \pm \gamma z^{\frac{5}{2}} + \delta z^3 \pm \cdots$$

Die Constanten b, β bestimmen sich aus:

$$b\beta + bh + \beta i + hi = 0$$

und:

$$(hb + i\beta + 2hi)(hu + it - v - h^2 g - 2bhi - i^2 k) = 0;$$

es kommt also: $b = -i$, $\beta = -h$. Unter Berücksichtigung dieser Werthe ergeben sich für die Constanten c, γ die Gleichungen:

$$c\gamma = hu + it - v - h^2 g - 2lhi - i^2 k, \quad hc + i\gamma = 0.$$

Ferner findet man *einen superlinearen Zweig* mit den Reihen:

$$x = cz^2 + \varepsilon d z^{\frac{7}{3}} + \varepsilon^2 e z^{\frac{8}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon^2\beta z^{\frac{5}{3}} + \gamma z^2 + \varepsilon\delta z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1,$$

wobei:

$$c = -i, \quad d = 0, \quad e = -g\beta,$$

$$\beta^3\left[\frac{g^2}{i} - 4s\right] + 4(hu + it - v - h^2 g - 2lhi - i^2 k) = 0.$$

Ebenso findet man *einen superlinearen Zweig* mit den Reihen:

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + cz^2 + \varepsilon d z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \quad y = \gamma z^2 + \varepsilon\delta z^{\frac{7}{3}} + \varepsilon^2\eta z^{\frac{8}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1,$$

wobei:

$$\gamma = -h, \quad \delta = 0, \quad \eta = -kb,$$

$$b^3\left[\frac{k^2}{h} - 4p\right] + 4(hu + it - v - h^2g - 2lhi - i^2k) = 0.$$

Die parabolische Curve besitzt also in einem B_5 acht Curvenzweige, von denen ein Mal zwei und zwei Mal drei verzweigt sind, so dass sie drei superlineare Zweige von den Ordnungen 2, 3, 3 resp. bilden.

Soll der B_5 in einen B_6 übergehen, so muss:

$$h^2g + 2lhi + i^2k - hu - it + v = 0$$

werden; dann werden abermals die vorhergehenden Entwicklungen unzulässig. Ohne hier die Rechnungen anzugeben, welche an Stelle der voranstehenden zu substituiren sind, mag hier nur das Resultat kurz angegeben werden. Es giebt auch hier zwei Reihenpaare, welche mit $x = -iz^2 + \cdots$, $y = -hz^2 + \cdots$ beginnen, dieselben sind aber nicht verzweigt, wie vorher, sondern schreiten nach ganzen Potenzen von z fort. Sie stellen also *zwei lineare Zweige* dar, *welche sich osculiren.* An Stelle der beiden superlinearen Zweige treten *je drei lineare sich berührende Zweige.*

Aus den Resultaten, die wir hier für den B_3, B_4, B_5 und B_6 gewonnen haben, lässt sich auf den allgemeinen biplanaren Knotenpunkt B_k schliessen. Die parabolische Curve in einem B_k besitzt wiederum acht Curvenzweige. Zunächst giebt es zwei unter diesen Zweigen, deren Reihen für gerades k nach ganzen Potenzen von z fortschreiten und in den $\frac{k}{2}$ ersten Gliedern übereinstimmen; ist dagegen k ungerade, so stimmen die beiden Reihen nur in den $\frac{k-1}{2}$ ersten Gliedern überein und schreiten dann nach halben Potenzen von z fort, die beiden Zweige sind also verzweigt. (Das Gesagte erleidet eine Ausnahme für den B_3). Die 6 übrigen Curvenäste gehören zwei Mal zu 3 zusammen. Die Reihen dreier zusammengehöriger Aeste zeigen, wie man sie auch projiciren mag, folgende Eigenthümlichkeit. Sie beginnen mit ganzen Potenzen von z und steigen bis zur Potenz z^m an, wo m die erste unter $\frac{k}{3}$ liegende ganze Zahl bedeutet. Soweit sind die drei Reihenpaare identisch, das nächste in den einzelnen Reihen verschiedene Glied ist dann $z^{\frac{k}{3}}$. Die drei Curvenäste bilden also einen superlinearen Zweig, wenn k nicht ein Vielfaches von 3 ist, dagegen bilden sie drei lineare Zweige, wenn k ein Vielfaches von 3 ist. Einen Beweis für diesen Satz kann ich nicht angeben, jedoch wird derselbe dadurch äusserst wahrscheinlich gemacht, dass die Hesse'sche Fläche in einem biplanaren Knotenpunkt der gegebenen Fläche einen triplanaren Knotenpunkt besitzt; zwei von den 3 singulären Ebenen fallen mit den

singulären Ebenen des B_k zusammen, während die dritte durch die singuläre Gerade hindurchgeht. Bedenkt man noch, dass man jeden B_k durch Zusammenrücken gewöhnlicher Knotenpunkte, worunter ein B_3 sein kann, entstehen lassen kann, so wird man erkennen, dass Curvenäste von der besprochenen Gestalt auftreten müssen.

Es ist noch zu betonen, dass sich das Gesagte nur auf einen allgemeinen B_k bezieht, für einen speciellen B_k jedoch mancherlei Abänderung erfährt. So treten z. B. beim B_4 an Stelle des superlinearen Zweiges $x = cz^2 + \cdots$, $y = \varepsilon a z^{\frac{4}{3}} + \cdots$ vier sich schneidende lineare Zweige, wenn $g^2 - 4is = 0$ ist.

Besitzt eine Fläche einen *uniplanaren Knotenpunkt*, so lässt sie sich in der Form schreiben:

$$f = x^2 + (xyz)_3 + (xyz)_4 + \cdots = 0.$$

Ihre Hesse'sche Fläche wird alsdann:

$$\frac{H}{(n-1)^2} = \frac{n-2}{n-1}\, x^2 \left[\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y\, \partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right] + \cdots = 0,$$

d. h. sie besitzt einen vierfachen Punkt, dessen Tangentialkegel aus der doppelten Ebene $x = 0$ und aus einem Kegel 2. Ord. besteht. *Die parabolische Curve**) *besitzt daselbst* 10 *Curvenäste*, deren Tangenten sich durch $x^2 = 0$, $(0yz)_3\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}(0yz)_3\right)^2 - \frac{\partial^2 (0yz)_3}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 (0yz)_3}{\partial z^2}\right] = 0$ bestimmen. In den Tangenten $x = 0$, $(0yz)_3 = 0$ berühren sich im Allgemeinen je zwei lineare Zweige unserer Curve, während die beiden anderen Tangenten je einem Zweige mit Spitze angehören.

Von besonderem Interesse ist hier der Fall, wo $(0yz)_3$ eine dritte Potenz ist, worauf wir auch später noch zurückkommen werden. Geometrisch bedeutet das, dass die drei Tangenten im dreifachen Punkte der Curve in der singulären Ebene zusammenfallen. Dann spaltet sich der Klammerausdruck in H in zwei lineare Factoren, und zwar ist x selbst einer dieser beiden Factoren. Der Tangentialkegel der Hesse'schen Fläche im singulären Punkt wird desshalb in die dreifach gezählte Ebene $x = 0$ und in eine weitere Ebene zerfallen. *Die parabolische Curve schickt im Ganzen* 11 *Zweige durch den uniplanaren Knotenpunkt;* von diesen sind drei Mal drei verzweigt; während die beiden anderen linear sind und sich berühren. Bezeichnet man:

$$u_3 = fy^3 + x(gz^2 + 2hzy + iy^2) + x^2(jz + ky) + lx^3,$$
$$u_4 = mz^4 + 4nz^3y + 6pz^2y^2 + 4qzy^3 + ry^4 + x(\cdot) + x^2(\cdot) + x^3(\cdot) + x^4,$$

so bestimmen sich die Coefficienten c_i, α_i der drei superlinearen Zweige 3. Ordnung:

*) Zeuthen a. a. O. X, p. 500.

$$x = c_i z^2 + \varepsilon d_i z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha_i z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \beta_i z^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$
$$\varepsilon^3 = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

durch die Gleichungen:

$$c^2 + f\alpha^3 + gc + m = 0,$$
$$f\alpha^3(gc + 6m) + 4mgc + 8m^2 = 0,$$

oder:

$$gc^3 + (g^2 + 6m)\, c^2 + 3mgc - 2m^2 = 0.$$

Die Coefficienten b_i, β_i der beiden linearen Zweige:

$$x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots, \quad y = \beta_i z^2 + \gamma_i z^3 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

folgen aus:

$$b^2 + gb + m = 0,$$

und einer linearen Gleichung für β.

Eine weitere Specialisirung tritt ein, wenn in u_3 auch noch $g = 0$ wird, also der Coefficient von x in u_3 den Factor y enthält. Es fallen also, wie vorher, die drei Tangenten im dreifachen Punkte der Curve in der singulären Ebene mit der Geraden $x = 0$, $y = 0$ zusammen; ausserdem schneidet jede Ebene durch diese Gerade die Fläche in zwei sich berührenden Aesten, deren Krümmung im Berührungspunkte dieselbe ist. Dann beginnt die Gleichung der Hesse'schen Fläche mit: $\frac{n-2}{n-1} 4h^2x^4$, d. h. der Tangentialkegel derselben im singulären Punkt ist die vierfach gezählte Ebene $x = 0$. Die parabolische Curve besitzt jetzt 12 Zweige. Es giebt nämlich zwei superlineare Zweige:

$$x = c_i z^2 + \varepsilon d_i z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha_i z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \beta_i z^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$
$$\varepsilon^3 = 1, \quad i = 1, 2,$$

wo:

$$c^2 + f\alpha^3 + m = 0, \quad \text{und} \quad c^2 - \tfrac{1}{3} m = 0.$$

Ferner giebt es wieder zwei lineare sich berührende Zweige:

$$x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots, \quad y = \beta_i z^2 + \gamma_i z^3 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

wo:

$$b^2 + m = 0, \quad 6mf\beta + 4mib + 24mp - 3mh^2 - 4hbn - 12n^2 = 0.$$

Endlich giebt es zwei superlineare Zweige 2. Ordnung (Spitzen):

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + c_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z \pm \beta_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

wo:

$$b^2 + f\alpha^3 = 0, \quad \text{und} \quad 9f\alpha(m + 2n\alpha + p\alpha^2) - 2h^2b^2 = 0,$$

oder:

$$9f(m + 2\alpha + p\alpha^2) + 2fh^2\alpha^2 = 0.$$

§ 5.

Wir haben seither nur die vielfachen Punkte einer gegebenen Fläche betrachtet; es erübrigt uns noch *das Verhalten der Hesse'schen Fläche in solchen einfachen Punkten der gegebenen Fläche zu untersuchen, in welchen die Tangentialebene eine Curve mit drei- oder mehrfachem Punkte ausschneidet.* Machen wir jenen Punkt zum Coordinatenanfangspunkt und die Ebene $x = 0$ zur Tangentialebene, so kann man die Gleichung der Fläche schreiben:

$$f = x + (xyz)_2 + (xyz)_3 + \cdots = 0 \quad = x + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots .$$

Besitzt die Curve in der Tangentialebene einen $\varkappa$ fachen Punkt, so müssen die Gleichungen:

$$(0yz)_2 \equiv 0, \quad (0yz_3) \equiv 0, \cdots, \quad (0yz)_{\varkappa-1} \equiv 0$$

erfüllt sein.

Bildet man die Determinante der zweiten Differentialquotienten, und achtet man blos auf die Glieder, welche entweder in x oder in y, z von niedrigster Dimension sind, so erhält man:

$$\begin{array}{llll} u_2^{11} & u_2^{12} & u_2^{13} & n-1 \\ u_2^{12} & u_3^{22}+(0yz)_k^{22} & u_3^{23}+(0yz)_k^{23} & (n-2)u_2^2+(0yz)_k^2 \\ u_2^{13} & u_3^{32}+(0yz)_k^{32} & u_3^{33}+(0yz)_k^{33} & (n-2)u_2^3+(0yz)_k^3 \\ n-1 & (n-2)u_2^2+(0yz)_k^2 & (n-2)u_2^3+(0yz)_k^3 & (n-1)(n-2)x+(n-k)(n-k-1)(0yz)_k \end{array}$$

Hieraus ersieht man, dass H die Form annimmt:

$$\frac{\mathsf{H}}{(n-1)^2} = [(0yz)_k^{23}\cdot(0yz)_k^{23} - (0yz)_k^{22}(0yz)_k^{33}] + \cdots$$
$$+ x\{(yz)_{k-2} + \cdots\} + x^2\{\text{const.} + \cdots\} + \cdots = 0.$$

Der erste Klammerausdruck ist vom Grade $2k-4$ in yz, sodass die Hesse'sche Fläche in $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ einen uniplanaren Knotenpunkt besitzt; seine singuläre Ebene $x = 0$ schneidet dieselbe in einer Curve mit $(2k-4)$ fachem Punkte. Die parabolische Curve muss als Schnitt von f mit H aus $2k-4$ Aesten bestehen mit den Reihen:

$$x = p_i z^k + q_i z^{k+1} + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, \cdots, 2k-4.$$

Die α_i genügen dabei der Gleichung:

$$(0\alpha 1)_k^{22}(0\alpha 1)_k^{33} - [(0\alpha 1)_k^{23}]^2 = 0;$$

d. h. *die Tangenten der parabolischen Curve in dem betrachteten Punkte liegen in der Ebene $x = 0$ und sind dargestellt durch die gleich Null gesetzte Hesse'sche Form der binären Form $(0yz)_k$.*

Für den Fall*) $k = 3$ ist noch zu bemerken, dass $\mathsf{H} = 0$ nur einen gewöhnlichen Knotenpunkt besitzt, während für die beiden Aeste der parabolischen Curve auch hier noch das vorher Gesagte Gültigkeit hat.

§ 6.

Es ist schliesslich noch die Hesse'sche Fläche in den vielfachen *Curven* einer gegebenen Fläche zu studiren, und wir wollen uns in diesem Paragraphen mit den *Doppelcurven* beschäftigen. Schon aus den Resultaten, die wir bei den biplanaren Knotenpunkten gewonnen haben, können wir schliessen, dass im Allgemeinen die Hesse'sche Fläche die Doppelcurve zur dreifachen Curve hat und dass zwei Mäntel der Hesse'schen die beiden Mäntel der gegebenen Fläche berühren, so dass *die Doppelcurve als Schnittcurve von* $f = 0$ *mit* $\mathsf{H} = 0$ *achtfach zählt.* Dieses Resultat soll jedoch hier direct abgeleitet werden. Bezeichnen wir die Gleichung der Fläche mit $U = 0$, so schneiden sich die 4 Flächen:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = U_3 = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial w} = U_4 = 0$$

in der Doppelcurve C unserer Fläche. Die Coordinaten der Punkte dieser Curve C nennen wir ξ, η, ζ, ω. Die Tangentialebene von $U_i = 0$ in einem Punkte der Curve C ist:

$$x(U_{i1}) + y(U_{i2}) + z(U_{i3}) + w(U_{i4}) = 0,$$

wo (U_{ik}) den Werth U_{ik} geschrieben in $\xi\,\eta\,\zeta\,\omega$ bedeutet.

Die vier Tangentialebenen in demselben Punkte von C schneiden sich aber in einer Geraden, der Tangente von C. Daraus folgt, dass sämmtliche dreigliedrigen Unterdeterminanten der Determinante:

$$\begin{vmatrix} (U_{11}) & (U_{12}) & (U_{13}) & (U_{14}) \\ (U_{21}) & (U_{22}) & (U_{23}) & (U_{24}) \\ (U_{31}) & . & . & . \\ (U_{41}) & . & . & . \end{vmatrix}$$

verschwinden.

So gelten die Relationen:

$$\lambda_1(U_{i1}) + \lambda_2(U_{i2}) + \lambda_3(U_{i3}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

wenn $x : y : z = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ den Schnittpunkt einer Tangente von C mit der Ebene $w = 0$ darstellt. Mit Rücksicht hierauf bringt man H auf die Form:

*) Einen solchen Punkt nennt Zeuthen Osculationspunkt; vergl. hierzu a. a. O. Bd. X, pg. 501 f.

$$H = \frac{(n-1)^2}{w^2} \begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_1 \\ U_{21}, & U_{22}, & U_{23}, & U_2 \\ U_{31}, & U_{32}, & U_{33}, & U_3 \\ U_1, & U_2, & U_3, & \frac{n}{n-1} U \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n-1)^2 \lambda_3^2}{w^2} \begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & \sum \lambda_i U_{2i}, & U_1 \\ U_{21}, & U_{22}, & \sum \lambda_i U_{2i}, & U_2 \\ \sum \lambda_i U_{i1}, & \sum \lambda_i U_{i2}, & \sum\sum \lambda_i \lambda_k U_{ik}, & \sum \lambda_i U_i \\ U_1, & U_2, & \sum \lambda_i U_i, & \frac{n}{n-1} U \end{vmatrix}.$$

Dabei sind die Summen über i und k von 1 bis 3 zu nehmen.

Setzt man nun in H für die Variabeln $x\,y\,z\,w$ die Coordinaten ξ, η, ζ, ω irgend eines Punktes von C ein, so erkennt man, dass H verschwindet. Es verschwinden nämlich (U_1) und (U_2) und ebenso $\sum_1^3 \lambda_i (U_{ki})$, wenn nur die λ jedes Mal so gewählt sind, dass der Punkt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0$ auf der Tangente von C in $\xi\eta\zeta\omega$ liegt. (Die Constanten $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ ändern sich folglich noch mit $\xi\eta\zeta\omega$). Ferner verschwindet (U) vom zweiten Grade, und auch $\sum_1^3 \lambda_i (U_i)$ verschwindet vom zweiten Grade, da ersichtlich auch alle Differentialquotienten dieses Ausdruckes Null werden. Endlich wird

$$\sum_1^3 \sum_1^3 \lambda_i \lambda_k (U_{ik}) = \sum_1^3 \lambda_k \sum_1^3 \lambda_i (U_{ki}) = 0$$

und zwar vom ersten Grade. Daraus folgt, dass H, gebildet für die Werthe ξ, η, ζ, ω, aus einem Theile besteht, der vom 3. Grade Null wird, und aus einem Theile, der vom 4. Grade Null wird; die Hesse'sche Fläche besitzt also die Curve C als dreifache Curve. Um die drei Tangentialebenen in einem Punkte P dieser Curve zu erhalten, hat man nur auf den *ersten Theil* von H Rücksicht zu nehmen, welcher für diese Curve vom dritten Grade verschwindet, nämlich:

$$\sum_1^3 \sum_1^3 \lambda_i \lambda_k U_{ik} \cdot \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_2 \\ U_1 & U_2 & \frac{n}{n-1} U \end{vmatrix} = \sum_1^3 \sum_1^3 \lambda_i \lambda_k U_{ik} \cdot \Delta.$$

Die eine der gesuchten 3 Tangentialebenen ist:

$$\sum\sum \lambda_i \lambda_k (x(U_{1ik}) + y(U_{2ik}) + z(U_{3ik}) + w(U_{4ik})) = 0;$$

sie geht offenbar durch die bez. Tangente der Curve C hindurch. Die beiden andern Tangentialebenen in P fallen mit den beiden Tangentialebenen unserer Fläche in P zusammen. Dieses Ebenenpaar ist nämlich durch:

$$x^2(U_{11}) + y^2(U_{22}) + z^2(U_{33}) + w^2(U_{44}) + 2xy(U_{12}) + 2zw(U_{34}) + \cdots = 0$$

dargestellt. Unsere Behauptung ist also erwiesen, sobald wir gezeigt haben, dass die zweiten Differentialquotienten von Δ sich von den bez. Differentialquotienten von U nur um einen gleichen Factor unterscheiden, wenn beide Male $xyzw$ durch $\xi\eta\zeta\omega$ ersetzt wird. Bezeichnet man die zweiten Differentialquotienten von Δ geschrieben in $\xi\eta\zeta\omega$, analog dem Früheren mit (Δ_{ik}), so ist

$$(\Delta_{ik}) = \begin{vmatrix} (U_{11}) & (U_{12}) & 2(U_{1k}) \\ (U_{21}) & (U_{22}) & 2(U_{2k}) \\ (U_{i1}) & (U_{i2}) & \frac{n}{n-1}(U_{ik}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (U_{11}) & (U_{12}) & 0 \\ (U_{21}) & (U_{22}) & 0 \\ (U_{i1}) & (U_{i2}) & -\frac{n-2}{n-1}(U_{ik}) \end{vmatrix}$$

$(\Delta_{ik}) = -\frac{n-2}{n-1}[(U_{11})(U_{22}) - (U_{12})(U_{12})](U_{ik})$, womit in der That die obige Behauptung erwiesen ist.

Es ist nun weiter die Frage, in welchen Punkten wird die Doppelcurve von der eigentlichen parabolischen Curve geschnitten? In einem gewöhnlichen Punkte der Doppelcurve C kann dies offenbar nur dann geschehen, wenn derselbe für einen der beiden Mäntel unserer Fläche parabolischer Punkt ist. Es schneidet alsdann eine der beiden Tangentialebenen in diesem Punkt eine Curve mit Spitze aus, und die Spitzentangente giebt die Richtung an, unter welcher die parabolische Curve die Curve C schneidet. Eine zweite Möglichkeit ist die, dass eine der beiden Tangentialebenen eine Curve mit vierfachem Punkt (statt wie gewöhnlich mit dreifachem Punkt) ausschneidet. Einer der vier Curvenäste stellt hier den Durchschnitt der Tangentialebene mit dem nicht berührten Mantel dar, indessen die drei übrigen Aeste den Durchschnitt mit dem berührten Mantel bilden. Es ist also dieser Punkt für den einen Mantel von der in § 5 beschriebenen Art, und es gehen folglich durch ihn zwei Aeste der parabolischen Curve hindurch, deren Tangenten genau wie a. a. O. bestimmt werden; der andere Mantel übt keinen Einfluss.

Ferner sind noch die Cuspidalpunkte der Doppelcurve zu beachten, für welche die beiden Tangentialebenen zusammenfallen. Diese Punkte

sind uniplanare Knotenpunkte; die Hesse'sche Fläche besitzt desshalb dort einen vierfachen Punkt, vergl. § 4. Die parabolische Curve*) schickt durch einen solchen Punkt zwei sich berührende Aeste, deren gemeinsame Tangente mit der singulären Tangente im Cuspidalpunkt, Dorsallinie genannt, zusammenfällt; wie die bezüglichen Reihenentwicklungen leicht ergeben. Schliesslich wäre noch der dreifachen Punkte der Doppelcurve zu gedenken; die parabolische Curve wird sie im Allgemeinen nicht enthalten.

Das gewonnene Resultat lautet nun: *Die Doppelcurve einer Fläche ist für ihre Hesse'sche Fläche dreifache Curve; zwei der drei Mäntel durch diese Curve berühren die beiden Mäntel der gegebenen Fläche; die Curve zählt somit als Durchschnitt beider Flächen achtfach. Die parabolische Curve trifft die Doppelcurve in allen solchen Punkten, welche für einen Mantel (mit Weglassung des andern) parabolische Punkte sind; ausserdem besitzt sie in jedem Cuspidalpunkt zwei lineare Aeste, welche die Dorsallinie zur gemeinsamen Tangente haben.*

Ist die Doppelcurve eine Doppelgerade, so bekommt die Hesse'sche Fläche eine vierfache Gerade; jedoch zählt diese Gerade als Durchschnitt beider Flächen, genau wie vorher, achtfach.

§ 7.

Schreiten wir jetzt zur Betrachtung der Verhältnisse, welche bei einer *Rückkehrcurve* obwalten. Zunächst ist bekannt, dass für jeden Punkt ξ, η, ζ, ω der Rückkehrcurve R alle zweigliedrigen Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante verschwinden müssen. Man überzeugt sich sehr leicht, dass in Folge dessen die Curve R eine vierfache Curve der Hesse'schen Fläche ist. Um nun weiter die gegenseitige Lage der vier, sich in der Curve R durchsetzenden Flächenmäntel zu ermitteln, müssen wir einige Sätze über das Verhalten einer Fläche längs einer Rückkehrcurve vorausschicken.

Zu diesem Zwecke verlegen wir den Anfangspunkt des Coordinatensystem auf die Curve R, machen die Tangente von R in diesem Punkt zur Axe $x = 0$, $y = 0$, und die Tangentialebene unserer Fläche zur Ebene $x = 0$. Dann lässt sich die Rückkehrcurve durch zwei Potenzreihen:

$$x = \varrho z^2 + \sigma z^3 + \cdots, \qquad y = \varrho_1 z^2 + \sigma_1 z^3 + \cdots,$$

darstellen. Nun stellen aber alle zweigliedrigen Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante Flächen dar, welche die Curve R enthalten; setzt man also in diesen Unterdeterminanten für x und y ihre Reihen ein, so müssen dieselben identisch verschwinden. Diese

*) Zeuthen, a. a. O. Bd. IX, p. 477.

Identitäten liefern einestheils die Bestimmungsgleichungen für die Constanten $\varrho\, \varrho_1\, \sigma\sigma_1, \ldots$, anderntheils eine Reihe von Relationen, welche die Constanten der Flächengleichung mit einander verknüpfen. Schreibt man die Gleichung der Fläche:

$$f = x^2 + u_3 + u_4 + \cdots,$$

so findet man zunächst, dass in u_3 die von x freien Glieder alle verschwinden bis auf y^3. Demnach kann man setzen:

$$\begin{aligned} u_3 &= ay^3 + x(bz^2 + 2czy + dy^2) + x^2(ez + fy) + gx^3, \\ u_4 &= kz^4 + 4lz^3y + 6mz^2y^2 + 4pzy^3 + qy^4 \\ &\quad + x(rz^3 + 3sz^2y + 3tzy^2 + uy^3) + \cdots, \\ u_5 &= \alpha z^5 + \cdots \end{aligned}$$

Es bestimmen sich dann die Constanten ϱ und ϱ_1 durch:

$$\varrho = -\frac{b}{2}, \qquad 6a\varrho_1 - db - 2c^2 + 12m = 0;$$

zugleich findet man als die einfachsten Relationen die folgenden:

$$4l = bc, \quad k = \frac{b^2}{4}, \quad \alpha = \frac{br}{2} - \frac{eb^2}{4}.$$

Nach der Darstellung der Curve R durch Reihen ist ihre Osculationsebene im Anfangspunkt durch $\varrho_1 x - \varrho y = 0$ repräsentirt, wir können desshalb folgenden Satz aussprechen: *Die Tangentialebene einer Fläche in einem Punkte ihrer Rückkehrcurve schneidet eine Curve mit dreifachem Punkte aus, deren drei Aeste mit einander verzweigt sind; ihre gemeinsame Tangente fällt mit der Tangente der Rückkehrcurve zusammen. Fällt die Osculationsebene in jenem Punkt der Curve mit der Tangentialebene der Fläche**) *zusammen, so besteht die Schnittcurve in dieser Ebene aus drei sich berührenden linearen Zweigen, deren gemeinsame Tangente wiederum die Rückkehrcurve berührt.* In dem letzten Falle wird nämlich ϱ und also auch b, l, k und α gleich Null, woraus die Behauptung sofort folgt.

Bei den developpabeln Flächen tritt bekanntlich der letztgenannte Fall ein. Man kann desshalb die beiden Fälle auch dadurch unterscheiden, dass man von *Flächen* spricht, *welche sich längs ihrer Rückkehrcurve wie eine abwickelbare Fläche verhalten*, und von *solchen, welche dies nicht thun.*

Die Hesse'sche Fläche besitzt die Curve R als vierfache Curve; die vier Tangentialebenen an die vier Mäntel im Anfangspunkt werden (vergl. § 4) im ersten Falle durch:

---

*) Zeuthen, a. a. O. Bd. X, pag. 458 f.

$$x^2(c^2x^2 - bdx^2 - 3abxy) = 0,$$

im zweiten Falle durch $x^2(cx^2) = 0$ dargestellt.

Im ersteren Falle sind zwei Mäntel der Hesse'schen Fläche längs der Curve R verzweigt, d. h. sie bilden einen einzigen Flächentheil mit der Rückkehrcurve R, wobei die Tangentialebenen längs dieser Curve zugleich die Tangentialebenen der gegebenen Fläche sind; ein dritter einfach durch R verlaufender Mantel durchsetzt diese Curve in der Richtung der genannten Tangentialebenen, während der vierte Mantel die Curve R einfach enthält, aber keine sonst ausgezeichnete Lage besitzt. Die Curve R zählt also hier als Schnitt der gegebenen und der Hesse'schen Fläche 11fach. Im letzteren Falle sind je zwei Mal zwei Mäntel der Hesse'schen Fläche verzweigt, d. h. sie bilden je einen einzigen Flächentheil mit der Rückkehrcurve R; die Tangentialebenen in den Punkten dieser Curve an die beiden Flächentheile stimmen unter sich und mit den bezüglichen Tangentialebenen der gegebenen Fläche überein. Die Curve R zählt demgemäss als Schnittcurve von $f = 0$ und $H = 0$ 12fach. Die angegebene Verzweigung der Mäntel längs der Curve R erkennt man aus der Verzweigung der Schnittcurve von $H = 0$ mit $z = 0$, die man leicht bestimmen kann.

Ist die Fläche mit Rückkehrcurve die abwickelbare Fläche dieser Curve, so zerfällt die Hesse'sche Fläche, wie Cayley*) gezeigt hat, in zwei Theile, nämlich in die abwickelbare Fläche selbst und in eine Fläche $(3n-8)$. Ordnung, welche Cayley als Pro-Hessian bezeichnet. Diese letztere Fläche hat nach dem Vorhergehenden die Curve R ebenfalls zur Rückkehrcurve und sie berührt die developpable Fläche längs dieser Curve.

Besitzt nun eine Fläche eine gewöhnliche Rückkehrcurve R, in deren Nähe sie sich *nicht* wie eine abwickelbare Fläche verhält, so bleibt noch die Frage zu beantworten, wo wird diese Curve von der eigentlichen parabolischen Curve geschnitten? Es sind das nach dem Obigen zunächst alle *die* Punkte, für welche die Osculationsebene von R mit der Tangentialebene der Fläche zusammenfällt; und zwar berührt die parabolische Curve hier die Curve R, indem sie zugleich von einem Mantel der Fläche auf den andern übergeht. Ausserdem giebt es auf der Curve R noch eine Reihe von singulären Punkten, welche ebenfalls der parabolischen Curve und zwar mehrfach angehören; es sind dies Punkte, deren Tangentialebene eine Curve mit vierfachem Punkte ausschneidet.

Zu diesen letzteren gehört der *Close-point***), er entspricht dem Cuspidalpunkt oder Pinch-point der Doppelcurve, und wird erhalten,

---

*) Cayley, Quarterly Journal Bd. 6, pag. 108.

**) Zeuthen, a. a. O. Bd. X, pag. 487.

wenn man in der obigen Gleichung $a = 0$ setzt. Es giebt eine singuläre Gerade durch diesen Punkt mit der Eigenschaft, dass jede Ebene durch sie Tangentialebene ist. Die singuläre Ebene, welche die singuläre Gerade und die Tangente von R enthält, schneidet eine Curve mit vierfachem Punkte aus, deren vier Tangenten in diesem Punkte jedoch keine besondere Lage zu den genannten Geraden haben. Zur Bestimmung der Tangenten der Schnittcurve von $f = 0$ mit $\mathsf{H} = 0$ erhält man eine Gleichung 16. Grades; da aber R als Schnittcurve 11-fach zählt, so schickt die parabolische Curve noch 5 Aeste durch den Close-point; die Tangente *eines* dieser Aeste fällt mit der singulären Geraden zusammen. Endlich findet man, dass die parabolische Curve in einem Schnittpunkte der Rückkehrcurve mit der Doppelcurve einen einfachen Zweig besitzt, welcher die erstere Curve berührt, und dass dieselbe in einem Doppelpunkt der Rückkehrcurve zwei Zweige besitzt, welche je einen Zweig dieser Curve berühren. Wird der Doppelpunkt der Rückkehrcurve zur Spitze, so tritt Gleiches für die beiden Zweige der parabolischen Curve ein. Ein analytischer Beweis dieser Sätze kann hier unterbleiben, da sich ihre Ableitung bereits bei Zeuthen*) vorfindet.

Im Anschluss an die beiden letzten Paragraphen sei noch das Verhalten der Hesse'schen Fläche längs einer k-fachen Curve erwähnt. Nimmt man einen Punkt der vielfachen Curve als Anfangspunkt und ihre Tangente als Axe $x = 0$, $y = 0$, so wird die Gleichung der Fläche:

$$f = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots$$

Dabei ist u_k von z völlig frei, u_{k+1} enthält z höchstens im 2. Grade, u_{k+2} ist in z vom 4. Grade etc., wie man sofort daraus erkennt, dass die Ebenen durch $x = 0$, $y = 0$ Curven mit k linearen sich berührenden Zweigen ausschneiden müssen. Da nun hier $H(u_k) \equiv 0$ ist, so beginnt H mit dem Gliede:

$$\mathsf{H} = -\frac{n-1}{k-1}(n-k)\,u_k M(u_k, u_{k+1}) + \cdots,$$

$$= -\frac{n-1}{k-1}(n-k)\,u_k \cdot h(u_k) \cdot \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial z^2} + \cdots$$

Die Hesse'sche Fläche hat die k-fache Curve der gegebenen Fläche zur $(4k-5)$-fachen Curve; und zwar fallen k Tangentialebenen in einem Punkte dieser Curve mit den k Tangentialebenen der gegebenen Fläche zusammen. Diese lassen sich als binäre Form $u_k = 0$ darstellen, und es werden weitere $2(k-2)$ Tangentialebenen durch die Hesse'sche Form $h(u_k) = 0$ dieser binären Form dargestellt; die

*) Zeuthen, a. a. O. IX, pag. 321 ff.

noch übrigen $(k-1)$ Tangentialebenen sind durch den gleich Null gesetzten Coefficienten von ε^2 in u_{k+1}, nämlich: $\frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial \varepsilon^2} = 0$ repräsentirt.

Auch hier tritt wiederum die Frage auf, wo schneidet die parabolische Curve die k-fache Curve unserer Fläche? Für die einfachsten Vorkommnisse liefern die bei der Doppel- und Rückkehrcurve angestellten Betrachtungen die Resultate; die Zahl der verschiedenen höheren Singularitäten dagegen ist so bedeutend, dass eine Behandlung derselben unterbleiben muss.

Leipzig, im Juni 1883.

Ueber die Darstellung binärer Formen und ihrer Covarianten durch geometrische Gebilde im Raume.

Von

F. Lindemann in Königsberg i. Pr.

Im fünften Bande des Bulletin de la Société mathématique de France (1877) hatte ich unter dem Tittel „Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires" eine Untersuchung publicirt, welche in Deutschland (vielleicht in Folge der Knappheit des betreffenden Referates in dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik) wenig bekannt geworden zu sein scheint. Wenigstens erwähnt Herr Franz Meyer in seinem neuerdings erschienenen Buche*) nur, dass ich daselbst eine auch von ihm gefundene Construction der Hesse'schen Covariante einer binären biquadratischen Form angegeben habe, während diese Construction bei mir doch nur als specielle Folge und Beispiel) genau derjenigen allgemeinen Principien erscheint, welche auch Herr Meyer in seinem Buche entwickelt, soweit sich letzteres auf ebene Geometrie bezieht. Herr Schlesinger andererseits erwähnt in seiner Inauguraldissertation**) nur, ich hätte a. a. O. gezeigt, dass es eine und nur eine Curve n^{ter} Ordnung giebt, welche durch $2n$ Punkte eines Kegelschnittes geht, und deren sämmtliche konische Polaren zu diesem Kegelschnitte apolar sind. Ich habe aber nicht nur dieses gezeigt, sondern von dieser Curve genau denselben Gebrauch zu geometrischen Constructionen etc. gemacht, wie Herr Schlesinger, dessen Entwicklungen im Uebrigen mit denen des Herrn Meyer enge verwandt und theilweise identisch sind. Die unübersichtlichen Polarenconstructionen (und Constructionen der Covarianten) bei binären Formen durch geometrisch leicht fassliche Constructionen im ternären Gebiete zu ersetzen, war gerade der Hauptzweck meiner oben erwähnten Arbeit. Ueberdies muss ich hervorheben, dass

*) Apolarität und rationale Curven, eine systematische Voruntersuchung zu einer allgemeinen Theorie der linearen Räume, Tübingen 1883 (Note zu pag. 92). Vgl. auch Math. Annalen, Bd. XXI, p. 529.

**) Ueber conjugirte binäre Formen, Breslau 1882. (Mit einigen Abänderungen und Zusätzen inzwischen wieder abgedruckt in Bd. XXII der math. Annalen. D. Red.)

ich nicht nur die Existenz der betreffenden Curve n^{ter} Ordnung gezeigt sondern in einer späteren Note*) ihre Gleichung auch fertig hingeschrieben habe, indem ich die $2n$ Punkte auf dem Kegelschnitte als durch eine *beliebige* Curve n^{ter} Ordnung bestimmt annahm.

Allerdings finden sich in den genannten beiden Schriften manche Sätze, welche bei mir nicht im Einzelnen ausgesprochen sind; aber die beiden Herren Verfasser bedienen sich bei ihren Beweisen eines speciellen binären Coordinatensystems (einer speciellen Parameterdarstellung des Fundamentalkegelschnittes) und waren so nicht in der Lage die ganz allgemeinen symbolischen Formeln aufzustellen, zu welchen ich gelangt war, und aus denen sich alle fraglichen Sätze ohne Schwierigkeit ableiten lassen**). Diese allgemeinen Formeln liessen mich auch erkennen, durch welche specielle Invarianteneigenschaft diejenigen ternären Formen von höherer als der dritten Ordnung ausgezeichnet sind, welche als den binären Formen „beigeordnet" (nach Herrn Schlesinger's Ausdrucksweise) auftreten können.

Die angedeuteten Untersuchungen werden nun weiter von den Herren Meyer und Schlesinger in werthvoller Weise verallgemeinert, indem sie zeigen, wie eine analoge Beziehung zwischen binären und quaternären Formen vermittelt wird, wenn man das binäre Werthgebiet durch die Punkte oder Ebenen einer Raumcurve dritter Ordnung darstellt, und wie sich analoge Sätze im Raume von n Dimensionen mittelst einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung herstellen lassen. Die zahlreichen interessanten Anwendungen dieses Princips, welche sich besonders in dem Werke des Herrn Meyer finden, werden es gerechtfertigt erscheinen lassen, wenn ich im Folgenden versuche, die betreffenden *algebraischen* Untersuchungen allgemeiner zu gestalten, indem ich die Parameterdarstellung der cubischen Normcurve nicht in der kanonischen Form $\varrho x_i = \lambda^i$ annehme, sondern die vier Raumcoordinaten zu vier beliebigen cubischen Formen proportional setze.

Zum Vergleiche habe ich in § I die früher a. a. O. entwickelten

---

*) Bulletin de la Société Mathématique de France t. VI, 1878.

**) Auf Seite 209 beweist Herr Meyer mit Hülfe seiner Betrachtungen auf der cubischen Normcurve den Satz, dass die Theorie der binären Formen sechster Ordnung und die der biquadratischen Involutionen identisch sind, indem drei beliebige biquadratische Formen aufgefasst werden können als zweite Polaren einer gewissen Form sechster Ordnung (dasselbe hat Herr Brill aus anderen Betrachtungen geschlossen, Math. Annalen Bd. XX, vgl. auch die weiter unten erwähnte Abhandlung des Herrn Stéphanos). Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass ich denselben Satz bereits in der 1876 erschienenen Bearbeitung von Clebsch's Vorlesungen ausgesprochen und bewiesen habe (in der Note auf pag. 900). Beim Beweise konnte ich damals nur auf das Hesse'sche Uebertragungsprincip verweisen, da meine weiteren Untersuchungen, die dann als Verallgemeinerung dieses Princips zu betrachten sind, erst später a. a. O. veröffentlicht wurden.

Formeln zusammengestelt, welche sich auf den Kegelschnitt beziehen. § II enthält sodann allgemeine Relationen zwischen Invarianten und Covarianten binärer cubischer Formen, auf denen alle folgenden Entwicklungen beruhen. In § III werden insbesondere vier solche Formen betrachtet, und es wird eine Reihe von algebraischen Aufgaben gelöst, zu denen die Parameterdarstellung einer cubischen Raumcurve Veranlassung giebt. § IV endlich entwickelt die erwähnte Beziehung zwischen binären und quaternären Formen, fügt im Einzelnen den in genannten Schriften enthaltenen Resultaten manches hinzu, führt insbesondere zu den allgemeinen symbolischen Formeln, welche den in Bd. V des Bulletin de la Société mathématique für die Ebene aufgestellten entsprechen.

Nachdem so die beiden einfachsten Fälle der Fbene und des Raumes erledigt sind, ist es leicht zu erkennen, wie sich bei mehr Dimensionen die entsprechenden Rechnungen gestalten; in Nr. 11 findet man einige Bemerkungen darüber.

§ I.

Ueber einen Zusammenhang zwischen der Theorie der binären und der ternären algebraischen Formen.

1. Wie erwähnt, beginne ich mit einer Zusammenstellung der früher a. a. O. entwickelten Formeln. Mit ξ_1, ξ_2 seien binäre, mit x_1, x_2, x_3 ternäre Variable bezeichnet; dann stellen die drei Gleichungen

$$\varrho x_1 = k_\xi^2, \qquad \varrho x_2 = l_\xi^2, \qquad \varrho x_3 = m_\xi^2$$

einen Kegelschnitt dar, insofern sie jedem Werthe des Parameters $\xi_1 : \xi_2$ einen Punkt einer gewissen Curve zweiter Ordnung zuordnen. Die Gleichung der letzteren ist*)

$$p_x^2 \equiv A_{\varkappa\varkappa} x_1^2 + A_{\lambda\lambda} x_2^2 + A_{\mu\mu} x_3^2 + 2A_{\varkappa\lambda} x_1 x_2 + 2A_{\lambda\mu} x_2 x_3 + 2A_{\mu\varkappa} x_3 x_1 = 0,$$

wenn gesetzt wird:

$$\varkappa_\xi^2 = (lm)\, l_\xi m_\xi, \quad \lambda_\xi^2 = (mk)\, m_\xi k_\xi, \quad \mu_\xi^2 = (kl)\, k_\xi l_\xi,$$
$$A_{\varkappa\varkappa} = (\varkappa\varkappa')^2, \qquad A_{\varkappa\lambda} = (\varkappa\lambda)^2, \quad \text{etc.}$$

Hier und im Folgenden bezeichnen gestrichene Buchstaben Symbole, welche mit den entsprechenden nicht gestrichenen äquivalent sein sollen. Vorausgesetzt muss noch werden, dass die Combinante

$$D = -(kl)\,(lm)\,(mk)$$

*) Alle zu benutzenden Relationen aus der Theorie der binären Formen, finden sich in Clebsch's Theorie der binären Formen, p. 205 ff und p. 415.

von Null verschieden sei; und es ist zu beachten, dass

$$(\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa) = -\frac{1}{2}D^2, \quad (pp'p'')^2 = 3D^1.$$

In Folge der Identitäten

$$2A_{\mu\mu} = A_{kk}A_{ll} - A_{kl}^2, \qquad 2A_{\lambda\mu} = A_{km}A_{kl} - A_{lm}A_{kk}$$

kann die Gleichung $p_x^2 = 0$ auch in der Form:

$$\begin{vmatrix} A_{kk} & A_{kl} & A_{km} & x_1 \\ A_{lk} & A_{ll} & A_{lm} & x_2 \\ A_{mk} & A_{ml} & A_{mm} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden.

2. Ist nun a_ξ^{2n} eine beliebige binäre Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, so besteht die Identität

$$\begin{aligned} D^n a_\xi^{2n} = {} & [(a\varkappa')^2 k_\xi'^2 + (a\lambda')^2 l_\xi'^2 + (a\mu')^2 m_\xi'^2] \\ & \times [(a\varkappa'')^2 k_\xi''^2 + (a\lambda'')^2 l_\xi''^2 + (a\mu'')^2 m_\xi''^2] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times [(a\varkappa^{(n)})^2 k_\xi^{(n)2} + (a\lambda^{(n)})^2 l_\xi^{(n)2} + (a\mu^{(n)})^2 m_\xi^{(n)2}]. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin wieder die drei quadratischen Formen durch ϱx_1, ϱx_2, ϱx_3 und bezeichnet den dann entstehenden Ausdruck mit $\varrho^n \alpha_x^n$, so ist also $\alpha_x^n = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, welche durch die $2n$ Kegelschnittpunkte $a_\xi^{2n} = 0$ hindurchgeht, und welche durch diese $2n$ Punkte offenbar vollkommen und eindeutig festgelegt ist.*) Ihre Symbole α sind durch die Gleichung

$$\alpha_x = (a\varkappa)^2 x_1 + (a\lambda)^2 x_2 + (a\mu)^2 x_2$$

definirt.

---

*) Die Herren Burnside (Quarterly Journal, t. X, 1870) und Salmon (Higher Algebra, third edition, art. 190) bemerken auch die Existenz einer solchen Curve; es wird a. a. O. erwähnt, dass es immer eine Curve giebt, deren Invarianten identisch sind mit den Invarianten der betreffenden binären Form, doch wird diese Curve nicht weiter untersucht. — Herr Stephanos giebt noch eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Curve $\alpha_x^n = 0$ an: Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences, t. XXVII, 1883, Seconde partie, Nr. 3. — Es sei mir gestattet hier zu bemerken, dass Herr Stephanos in dieser Abhandlung, von der damals nur ein Auszug publicirt war, ebenfalls die von mir in Bd. XXI dieser Annalen aufgestellte Bedingung dafür (auf anderem Wege) findet, dass eine binäre Form sechster Ordnung als Hesse'sche Covariante einer Form fünfter Ordnung aufgefasst werden könne.

Da aber eine Curve n^{ter} Ordnung (für $n > 1$) durch $2n$ Punkte noch nicht bestimmt ist, so muss die Curve $\alpha_x^n = 0$ noch durch andere Bedingungen an den Kegelschnitt gebunden sein; und diese Bedingungen werden durch das Bestehen der Identität

$$(\alpha p p')^2 \alpha_x^{n-2} = 0$$

vollständig geliefert. Hierdurch wird auch zugleich die Curve $\alpha_x^n = 0$ specialisirt, indem sie nicht die allgemeine Curve ihrer Ordnung sein kann (für $n > 3$). Es verschwindet nämlich identisch die folgende Covariante:

$$\begin{vmatrix} f_{1111} & f_{1122} & f_{1133} & f_{1123} & f_{1131} & f_{1112} \\ f_{2211} & f_{2222} & f_{2233} & f_{2223} & f_{2231} & f_{2212} \\ f_{3311} & f_{3322} & f_{3333} & f_{3323} & f_{3331} & f_{3312} \\ f_{2311} & f_{2322} & f_{2333} & f_{2323} & f_{2331} & f_{2312} \\ f_{3111} & f_{3122} & f_{3133} & f_{3123} & f_{3131} & f_{3112} \\ f_{1211} & f_{1222} & f_{1233} & f_{1223} & f_{1231} & f_{1212} \end{vmatrix},$$

wo:

$$f_{rstu} = \frac{\partial^4 \alpha_x^n}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t \partial x_u},$$

oder in symbolischer Bezeichnung:

$$[(\alpha\gamma\delta)(\alpha\varepsilon\zeta)(\beta\gamma\varepsilon)(\beta\delta\zeta) - (\alpha\gamma\varepsilon)(\alpha\delta\zeta)(\beta\gamma\delta)(\beta\varepsilon\zeta)]^2 [\alpha_x \beta_x \gamma_x \delta_x \varepsilon_x \zeta_x]^{n-2},$$

worin β, γ, δ, ε, ζ ternäre Symbole bezeichnen, die mit α gleichbedeutend sind.

3. Da identisch $\varrho^n \alpha_x^{n-m} \alpha_y^m = a_\xi^{2n-2m} a_\eta^{2m}$, so construirt man die binären geraden Polaren $2m^{\text{ter}}$ Ordnung vermittelst ternärer Polaren m^{ter} Ordnung, und auch ungerade Polaren lassen sich ähnlich behandeln, wie ich a. a. O. angab. Die Construction binärer Covarianten knüpft sich an folgende Formeln. Sind a, b, c Symbole dreier binären Formen (oder auch äquivalente Symbole ein und derselben Form) und bezeichnen α, β, γ die entsprechenden Symbole der „beigeordneten" ternären Formen, so ist identisch

$$(\alpha\beta\gamma) = -D^2(ab)(bc)(ca).$$

Vermöge dieser Formel und der Relation $\varrho\, \alpha_x = D a_\xi^2$, *entspricht jeder ternären Bildung eine bestimmte binäre.*

Dass auch das umgekehrte der Fall, lehren die folgenden a. a. O. bewiesenen Relationen:

$$\varrho^{n+m-2}(\alpha\beta p)\alpha_x^{n-1}\beta_x^{m-1}p_x = D^{n+m+1}(ab)a_\xi^{2n-1}b_\xi^{2m-1},$$

$$\varrho^{n+m-2}(\alpha\beta p)(\alpha\beta p')\alpha_x^{n-2}\beta_x^{m-2}p_x p_x' = D^{n+m+2}(ab)^2 a_\xi^{2n-2}b_\xi^{2m-2},$$

$$\varrho^{n+m-2}(pp'\alpha)\,(pp'\beta)\alpha_x^{n-1}\beta_x^{m-1} = D^{n+m+2}(ab)^2 a_\xi^{2n-2} b_\xi^{2m-2},$$

$$\varrho^{n+m-4}(\alpha\beta p)^2 \alpha_x^{n-2}\beta_x^{m-2} = -\frac{1}{2} D^{n+m-4}(ab)^4 a_\xi^{2n-4} b_\xi^{2m-4}.$$

Die erste Gleichung findet sich im Wesentlichen bereits bei Herrn Salmon a. a. O., die zweite liefert die auch von Herrn Meyer gefundene Construction der Hesse'schen Covariante einer biquadratischen Form. —

Die Verallgemeinerungen der hier in Nr. 1 mitgetheilten Untersuchungen findet man in § III, derjenigen von Nr. 2 in § IV, Nr. 12 und 13, endlich derjenigen von Nr. 3 in § IV, Nr. 14—19.

§ II.

Einfachste simultane Invarianten und Covarianten einer beliebigen Anzahl cubischer Formen.

4. Wir betrachten zunächst ein System von beliebig vielen cubischen Formen

$$\begin{aligned} f_1 &= a_\xi^3, \\ f_2 &= b_\xi^3, \\ &\cdots \\ f_n &= l_\xi^3 \end{aligned} \tag{1}$$

und entwickeln zwischen ihren einfachsten simultanen Functionalinvarianten gewisse Relationen, welche den von Clebsch für ein System von beliebig vielen quadratischen Formen aufgestellten genau analog sind. Wir fassen dabei folgende Bildungen ins Auge:

1) die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Invarianten D_{ik}, deren Typus ist:

$$D_{12} = (ab)^3 = -D_{21}, \tag{2}$$

(es könnte auch $i = k$ sein; dann ist aber $D_{ii} = 0$),

2) die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Functionaldeterminanten ϑ_{ik}, deren Typus ist

$$\vartheta_{12} = (ab)a_\xi^2 b_\xi^2, \tag{3}$$

3) die $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ cubischen Covarianten R_{ikh}, gebildet nach dem Typus

$$R_{123} = -(ab)(bc)(ca)\,a_\xi b_\xi c_\xi, \tag{4}$$

4) die $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ Invarianten Δ_{ikhl}, deren Typus ist

$$\Delta_{1234} = (ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd). \tag{5}$$

Die drei zuletzt angegebenen Typen lassen sich auch in nicht symbolischer Form einfach durch Determinanten darstellen; es ist nämlich:

$$(3)^* \qquad \vartheta_{12} = \begin{vmatrix} a_1^2 a_x & b_1^2 b_x & \xi_2^2 \\ a_1 a_2 a_x & b_1 b_2 b_x & -\xi_1 \xi_2 \\ a_2^2 a_x & b_2^2 b_x & \xi_1^2 \end{vmatrix},$$

$$(4)^* \qquad R_{123} = -\begin{vmatrix} a_1^3 & b_1^3 & c_1^3 & \xi_2^3 \\ a_1^2 a_2 & b_1^2 b_2 & c_1^2 c_2 & -\xi_2^2 \xi_1 \\ a_1 a_2^2 & b_1 b_2^2 & c_1 c_2^2 & \xi_2 \xi_1^2 \\ a_2^3 & b_2^3 & c_2^3 & -\xi_1^3 \end{vmatrix},$$

$$(5)^* \qquad \Delta_{1234} = \begin{vmatrix} a_1^3 & b_1^3 & c_1^3 & d_1^3 \\ a_1^2 a_2 & b_1^2 b_2 & c_1^2 c_2 & d_1^2 d_2 \\ a_1 a_2^2 & b_1 b_2^2 & c_1 c_2^2 & d_1 d_2^2 \\ a_2^3 & b_2^3 & c_2^3 & d_2^3 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinantenformen bilden die Grundlage der folgenden Rechnungen. Die Bildung des Productes

$$9 R_{123}(\xi) \cdot R_{567}(\eta) = \begin{vmatrix} a_1^3 & b_1^3 & c_1^3 & \xi_2^3 \\ a_1^2 a_2 & b_1^2 b_2 & c_1^2 c_2 & -\xi_2^2 \xi_1 \\ a_1 a_2^2 & b_1 c_2^2 & c_1 c_2^2 & \xi_2 \xi_1^2 \\ a_2^3 & b_2^3 & c_2^3 & -\xi_1^3 \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} e_2^3 & f_2^3 & g_2^3 & \eta_1^3 \\ -3e_2^2 e_1 & -3f_2^2 f_1 & -3g_2^2 g_1 & 3\eta_1^2 \eta_2 \\ 3e_2 e_1^2 & 3f_2 f_1^2 & 3g_2 g_1^2 & 3\eta_1 \eta_2^2 \\ -e_1^3 & -f_1^3 & -g_1^3 & \eta_2^3 \end{vmatrix}$$

nach dem gewöhnlichen Multiplicationssatze giebt zunächst:

$$(6) \qquad 9 R_{123}(\xi) \cdot R_{567}(\eta) = \begin{vmatrix} D_{15} & D_{16} & D_{17} & f_1(\eta) \\ D_{25} & D_{26} & D_{27} & f_2(\eta) \\ D_{35} & D_{36} & D_{37} & f_3(\eta) \\ f_5(\xi) & f_6(\xi) & f_7(\xi) & (\xi\eta)^3 \end{vmatrix};$$

ebenso hat man ganz allgemein

$$(6)^* \qquad 9 R_{\varkappa\lambda\mu}(\xi) \cdot R_{\varrho\sigma\tau}(\eta) = \begin{vmatrix} D_{\varkappa\varrho} & D_{\varkappa\sigma} & D_{\varkappa\tau} & f_\varkappa(\eta) \\ D_{\lambda\varrho} & D_{\lambda\sigma} & D_{\lambda\tau} & f_\lambda(\eta) \\ D_{\mu\varrho} & D_{\mu\sigma} & D_{\mu\tau} & f_\mu(\eta) \\ f_\varrho(\xi) & f_\sigma(\xi) & f_\tau(\xi) & (\xi\eta)^3 \end{vmatrix},$$

und für $\xi = \eta$:

$$(7) \qquad 9R_{\varkappa\lambda\mu}R_{\varrho\sigma\tau} = \begin{vmatrix} D_{\varkappa\varrho} & D_{\varkappa\sigma} & D_{\varkappa\tau} & f_\varkappa \\ D_{\lambda\varrho} & D_{\lambda\sigma} & D_{\lambda\tau} & f_\lambda \\ D_{\mu\varrho} & D_{\mu\sigma} & D_{\mu\tau} & f_\mu \\ f_\varrho & f_\sigma & f_\tau & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man $\varkappa = \varrho$, $\lambda = \sigma$, $\mu = \tau$, so entsteht eine Formel für das Quadrat der Covariante $R_{\varkappa\lambda\mu}$, nämlich:

$$(7)^* \qquad (3R_{\varkappa\lambda\mu})^2 = \begin{vmatrix} 0 & D_{\varkappa\lambda} & D_{\varkappa\mu} & f_\varkappa \\ D_{\lambda\varkappa} & 0 & D_{\lambda\mu} & f_\lambda \\ D_{\mu\varkappa} & D_{\mu\lambda} & 0 & f_\mu \\ f_\varkappa & f_\lambda & f_\mu & 0 \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in (6)* die Coordinaten η_1, η_2 durch die Symbole p_2, $-p_1$ irgend einer Form f_φ des gegebenen Systems, so geht $f_\varkappa(\eta)$ in $D_{\varkappa\varphi}$ über, und $R_{\varrho\sigma\tau}(\eta)$ verwandelt sich in $\Delta_{\varrho\sigma\tau\varphi}$; es folgt also

$$(8) \qquad 9R_{\varkappa\lambda\mu}\cdot\Delta_{\varrho\sigma\tau\varphi} = \begin{vmatrix} D_{\varkappa\varrho} & D_{\varkappa\sigma} & D_{\varkappa\tau} & D_{\varkappa\varphi} \\ D_{\lambda\varrho} & D_{\lambda\sigma} & D_{\lambda\tau} & D_{\lambda\varphi} \\ D_{\mu\varrho} & D_{\mu\sigma} & D_{\mu\tau} & D_{\mu\varphi} \\ f_\varrho & f_\sigma & f_\tau & f_\varphi \end{vmatrix}.$$

Auch hierin kann man ξ_1, ξ_2 durch die Symbole q_2, $-q_1$ einer Form f_ν ersetzen und findet so

$$(9) \qquad 9\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}\cdot\Delta_{\varrho\sigma\tau\varphi} = \begin{vmatrix} D_{\varkappa\varrho} & D_{\varkappa\sigma} & D_{\varkappa\tau} & D_{\varkappa\varphi} \\ D_{\lambda\varrho} & D_{\lambda\sigma} & D_{\lambda\tau} & D_{\lambda\varphi} \\ D_{\mu\varrho} & D_{\mu\sigma} & D_{\mu\tau} & D_{\mu\varphi} \\ D_{\nu\varrho} & D_{\nu\sigma} & D_{\nu\tau} & D_{\nu\varphi} \end{vmatrix}.$$

Insbesondere kann $\varkappa = \varrho$, $\lambda = \sigma$, $\mu = \tau$, $\nu = \varphi$ gewählt werden; es ergiebt sich dann eine Formel für das Quadrat der Invariante $\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}$, nämlich:

$$(9\,a) \qquad (3\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu})^2 = \begin{vmatrix} 0 & D_{\varkappa\lambda} & D_{\varkappa\mu} & D_{\varkappa\nu} \\ D_{\lambda\varkappa} & 0 & D_{\lambda\mu} & D_{\lambda\nu} \\ D_{\mu\varkappa} & D_{\mu\lambda} & 0 & D_{\mu\nu} \\ D_{\nu\varkappa} & D_{\nu\lambda} & D_{\nu\mu} & 0 \end{vmatrix}.$$

Da $D_{\varkappa\lambda} = -D_{\lambda\varkappa}$, so ist die rechte Seite nach einem bekannten Determinantensatze das vollständige Quadrat des Ausdrucks

$$D_{\varkappa\lambda}D_{\mu\nu} + D_{\varkappa\mu}D_{\nu\lambda} + D_{\varkappa\nu}D_{\lambda\mu};$$

und folglich ist $3\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ diesem Ausdrucke gleich bis auf das Vorzeichen. Dasselbe Resultat, und gleichzeitig die Bestimmung des

Vorzeichens, ergiebt sich durch directe Rechnung mittelst der bekannten Identität*)

$$3(bc)(cd)(db)b_\xi c_\xi d_\xi = (bc)^3 d_\xi^3 + (cd)^3 b_\xi^3 + (db)^3 c_\xi^3.$$

Aus ihr nämlich folgt:

$$3(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd) = (bc)^3(da)^3 + (cd)^3(ba)^3 + (db)^3(ca)^3;$$

also ist allgemein

$$3\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu} = -(D_{\varkappa\lambda}D_{\mu\nu} + D_{\varkappa\mu}D_{\nu\lambda} + D_{\varkappa\nu}D_{\lambda\mu}). \tag{10}$$

Mittelst der Formeln (7) und (8) lassen sich quadratische Identitäten zwischen den Functionen f_i herstellen; es wird nämlich offenbar

$$9\Delta_{\varrho\sigma\tau\varphi}\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}\begin{vmatrix} D_{\varkappa\varrho} & D_{\varkappa\sigma} & D_{\varkappa\tau} & f_\varkappa \\ D_{\lambda\varrho} & D_{\lambda\sigma} & D_{\lambda\tau} & f_\lambda \\ D_{\mu\varrho} & D_{\mu\sigma} & D_{\mu\tau} & f_\mu \\ f_\varrho & f_\sigma & f_\tau & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D_{\varkappa\varrho} & D_{\varkappa\sigma} & D_{\varkappa\tau} & D_{\varkappa\varphi} \\ D_{\lambda\varrho} & D_{\lambda\sigma} & D_{\lambda\tau} & D_{\lambda\varphi} \\ D_{\mu\varrho} & D_{\mu\sigma} & D_{\mu\tau} & D_{\mu\varphi} \\ f_\varrho & f_\sigma & f_\tau & f_\varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_{\varrho\varkappa} & D_{\varrho\lambda} & D_{\varrho\mu} & D_{\varrho\nu} \\ D_{\sigma\varkappa} & D_{\sigma\lambda} & D_{\sigma\mu} & D_{\sigma\nu} \\ D_{\tau\varkappa} & D_{\tau\lambda} & D_{\tau\mu} & D_{\tau\nu} \\ f_\varkappa & f_\lambda & f_\mu & f_\nu \end{vmatrix}. \tag{11}$$

5. Andere Relationen zwischen den Bildungen f_i, D_{ik}, R_{ikh}, Δ_{ikhl} ergeben sich als Folge der aufgestellten, lassen sich aber auch leicht direct entwickeln. Ordnet man die linke Seite der Identität

$$\begin{vmatrix} a_1^2 a_\xi & a_1 a_2 a_\xi & a_2^2 a_\xi & a_\xi^3 \\ b_1^2 b_\xi & b_1 b_2 b_\xi & b_2^2 b_\xi & b_\xi^3 \\ c_1^2 c_\xi & c_1 c_2 c_\xi & c_2^2 c_\xi & c_\xi^3 \\ d_1^2 d_\xi & d_1 d_2 d_\xi & d_2^2 d_\xi & d_\xi^3 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Elementen der letzten Verticalreihe, so folgt:

$$f_1 R_{234} - f_2 R_{341} + f_3 R_{412} - f_4 R_{123} = 0,$$

oder allgemein:

$$f_\varkappa R_{\lambda\mu\nu} - f_\lambda R_{\mu\nu\varkappa} + f_\mu R_{\nu\varkappa\lambda} - f_\nu R_{\varkappa\lambda\mu} = 0. \tag{12}$$

Ebenso führt die Identität

$$\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 a_2 & a_1 a_2^2 & a_2^3 & a_\xi^3 \\ b_1^3 & b_1^2 b_2 & b_1 b_2^2 & b_2^3 & b_\xi^3 \\ c_1^3 & c_1^2 c_2 & c_1 c_2^2 & c_2^3 & c_\xi^3 \\ d_1^3 & d_1^2 d_2 & d_1 d_2^2 & d_2^3 & d_\xi^3 \\ e_1^3 & e_1^2 e_2 & e_1 e_2^2 & e_2^3 & e_\xi^3 \end{vmatrix} = 0$$

*) Clebsch, Theorie der binären Formen, p. 449.

zu dem Resultate

$$(13)\quad f_\iota \Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu} + f_\varkappa \Delta_{\lambda\mu\nu\iota} + f_\lambda \Delta_{\mu\nu\iota\varkappa} + f_\mu \Delta_{\nu\iota\varkappa\lambda} + f_\nu \Delta_{\iota\varkappa\lambda\mu} = 0.$$

Verschwindet also die Invariante $\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}$, *so besteht zwischen den Formen* $f_\varkappa$, f_λ, f_μ, f_ν *eine lineare Identität mit constanten Coefficienten.*

Betrachten wir endlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^2 a_\xi & a_1 a_2 a_\xi & a_2^2 a_\xi & a_\eta^3 \\ b_1^2 b_\xi & b_1 b_2 b_\xi & b_2^2 b_\xi & b_\eta^3 \\ c_1^2 c_\xi & c_1 c_2 c_\xi & c_2^2 c_\xi & c_\eta^3 \\ d_1^2 d_\xi & d_1 d_2 d_\xi & d_2^2 d_\xi & d_\eta^3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -f_1(\eta) R_{234}(\xi) + f_2(\eta) R_{341}(\xi) \\ -f_3(\eta) R_{412}(\xi) + f_4(\eta) R_{123}(\xi). \end{matrix}$$

Dieselbe zerlegt sich nach dem Multiplicationssatze unmittelbar in das Product

$$\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 a_2 & a_2^2 a_1 & a_2^3 \\ b_1^3 & b_1^2 b_2 & b_2^2 b_1 & b_2^3 \\ c_1^3 & c_1^2 c_2 & c_2^2 c_1 & c_2^3 \\ d_1^3 & d_1^2 d_2 & d_2^2 d_1 & d_1^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1^3 & 3\eta_1^2\eta_2 & 3\eta_1\eta_2^2 & \eta_2^3 \end{vmatrix} = \Delta_{1234}(\xi\eta)^3;$$

es besteht also die Identität

$$(14)\quad \begin{matrix} f_\varkappa(\eta) R_{\lambda\mu\nu}(\xi) - f_\lambda(\eta) R_{\mu\nu\varkappa}(\xi) + f_\mu(\eta) R_{\nu\varkappa\lambda}(\xi) - f_\nu(\eta) R_{\varkappa\lambda\mu}(\xi) \\ = -\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}(\xi\eta)^3. \end{matrix}$$

Die Substitution $\xi = \eta$ führt auf (12) zurück. Setzt man aber der Reihe nach für η_2, $-\eta_1$ die Symbole von f_ϱ, f_σ, f_τ, f_φ ein, so findet man die Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{aligned} \Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu} f_\varrho &= D_{\varkappa\varrho} R_{\lambda\mu\nu} - D_{\lambda\varrho} R_{\mu\nu\varkappa} + D_{\mu\varrho} R_{\nu\varkappa\lambda} - D_{\nu\varrho} R_{\varkappa\lambda\mu}, \\ \Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu} f_\sigma &= D_{\varkappa\sigma} R_{\lambda\mu\nu} - D_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\varkappa} + D_{\mu\sigma} R_{\nu\varkappa\lambda} - D_{\nu\sigma} R_{\varkappa\lambda\mu}, \\ \Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu} f_\tau &= D_{\varkappa\tau} R_{\lambda\mu\nu} - D_{\lambda\tau} R_{\mu\nu\varkappa} + D_{\mu\tau} R_{\nu\varkappa\lambda} - D_{\nu\tau} R_{\varkappa\lambda\mu}, \\ \Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu} f_\varphi &= D_{\varkappa\varphi} R_{\lambda\mu\nu} - D_{\lambda\varphi} R_{\mu\nu\varkappa} + D_{\mu\varphi} R_{\nu\varkappa\lambda} - D_{\nu\varphi} R_{\varkappa\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Fügt man hierzu die Identität (12) hinzu und eliminirt die Grössen $\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ und R_{ikl}, so ergiebt sich eine quadratische Relation zwischen den Formen f_i, welche man auch aus den Gleichungen (11) wird ableiten können, nämlich:

$$(16)\quad 0 = \begin{vmatrix} D_{\varkappa\varrho} & D_{\lambda\varrho} & D_{\mu\varrho} & D_{\nu\varrho} & f_\varrho \\ D_{\varkappa\sigma} & D_{\lambda\sigma} & D_{\mu\sigma} & D_{\nu\sigma} & f_\sigma \\ D_{\varkappa\tau} & D_{\lambda\tau} & D_{\mu\tau} & D_{\nu\tau} & f_\tau \\ D_{\varkappa\varphi} & D_{\lambda\varphi} & D_{\mu\varphi} & D_{\nu\varphi} & f_\varphi \\ f_\varkappa & f_\lambda & f_\mu & f_\nu & 0 \end{vmatrix}.$$

Eine etwas allgemeinere Identität findet man durch Ausführung der Multiplication der beiden verschwindenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2a_2 & a_1a_2^2 & a_2^3 & 0 \\ b_1^3 & b_1^2b_2 & b_1b_2^2 & b_2^3 & 0 \\ c_1^3 & c_1^2c_2 & c_1c_2^2 & c_2^3 & 0 \\ d_1^3 & d_1^2d_2 & d_1d_2^2 & d_2^3 & 0 \\ \xi_2^3 & -\xi_2^2\xi_1 & \xi_2\xi_1^2 & -\xi_1^3 & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} c_2^3 & -3e_2^2e_1 & 3e_2e_1^2 & -e_1^3 & 0 \\ f_2^3 & -3f_2^2f_1 & 3f_2f_1^2 & -f_1^3 & 0 \\ g_2^3 & -3g_2^2g_1 & 3g_2g_1^2 & -g_1^3 & 0 \\ h_2^3 & -3h_2^2h_1 & 3h_2h_1^2 & -h_1^3 & 0 \\ \eta_1^3 & 3\eta_1^2\eta_2 & 3\eta_1\eta_2^2 & \eta_2^3 & 0 \end{vmatrix};$$

so folgt:

(16a)
$$0 = \begin{vmatrix} D_{\varkappa\varrho} & D_{\lambda\varrho} & D_{\mu\varrho} & D_{\nu\varrho} & f_\varrho(\xi) \\ D_{\varkappa\sigma} & D_{\lambda\sigma} & D_{\mu\sigma} & D_{\nu\sigma} & f_\sigma(\xi) \\ D_{\varkappa\tau} & D_{\lambda\tau} & D_{\mu\tau} & D_{\nu\tau} & f_\tau(\xi) \\ D_{\varkappa\varphi} & D_{\lambda\varphi} & D_{\mu\varphi} & D_{\nu\varphi} & f_\varphi(\xi) \\ f_\varkappa(\eta) & f_\lambda(\eta) & f_\mu(\eta) & f_\nu(\eta) & (\eta\xi)^3 \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man hierin ξ_2, $-\xi_1$ durch die Symbole einer Form f_k, ebenso η_2, $-\eta_1$ durch diejenigen einer Form f_k und schreibt für $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau, \varphi$ bez. die Zahlen 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, so ergiebt sich zwischen den Invarianten D_{rs} die Relation

(17)
$$0 = \begin{vmatrix} 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{1k} \\ D_{21} & 0 & D_{23} & D_{24} & D_{2k} \\ D_{31} & D_{32} & 0 & D_{34} & D_{3k} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & 0 & D_{4k} \\ D_{k1} & D_{k2} & D_{k3} & D_{k4} & D_{kk} \end{vmatrix}.$$

Mittelst dieser Formel lassen sich durch die $4n - 10$ *Invarianten*

$$\begin{array}{llll} D_{12}, & D_{13}, & D_{14}, & \\ D_{23}, & D_{24}, & D_{34}, & \\ D_{51}, & D_{52}, & D_{53}, & D_{54}, \\ D_{61}, & D_{62}, & D_{63}, & D_{64}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n1}, & D_{n2}, & D_{n3}, & D_{n4} \end{array}$$

alle übrigen $\frac{1}{2}n(n-1) - 4n + 10 = \frac{1}{2}(n-4)(n-5)$ *Invarianten* D_{ik} *rational berechnen, vorausgesetzt natürlich, dass der Coefficient von* D_{kk} *in* (17), *d. h. die durch* (10) *gegebene Invariante* Δ_{1234}, *von Null verschieden ist.*

6. Aus den bisher betrachteten Bildungen und Formeln kann man neue ableiten, indem man die gegebenen cubischen Grundformen (1) durch ihre simultanen cubischen Covarianten (4) ersetzt. Dass dies geschehen soll, wollen wir dadurch ausdrücken, dass wir an Stelle des Index der so zu ersetzenden Grundform die Gruppe von drei Indices setzen, welche den constituirenden Grundformen der einzuführenden cubischen Covariante entsprechen; es wird also z. B. $D_{ikh,s}$ die Invariante bedeuten, welche aus D_{rs} entsteht, wenn man hierin die Form f_r durch die Covariante R_{ikh} ersetzt. Wir untersuchen nach einander folgende Bildungen

$$D_{123,4},\quad D_{123,456},\quad R_{123,4,5},\quad R_{123,456,7},\quad R_{123,456,789},$$

$$\Delta_{123,4,5,6},\quad \Delta_{123,456,7,8},\quad \Delta_{123,456,789,10},\quad \Delta_{123,456,789,\varkappa\lambda\mu}.$$

Nach den in (2) und (4) gegebenen Definitionen hat man unmittelbar

$$D_{123,4} = \Delta_{1234}. \tag{18}$$

Für die nächst zu berechende Invariante folgt hieraus

$$D_{123,456} = \Delta_{1,2,3,456}. \tag{19}$$

Die rechte Seite finden wir, indem wir in (8) $\varkappa = 1$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\varrho = 4$, $\sigma = 5$, $\tau = 6$ nehmen und f_φ durch R_{123} ersetzen; dann verschwinden nämlich die Invarianten $D_{\varkappa\varphi}$, $D_{\lambda\varphi}$, $D_{\mu\varphi}$, und man kann auf beiden Seiten einen Factor R_{123} fortlassen; es bleibt so

$$9D_{123,456} = 9\Delta_{1,2,3,456} = \begin{vmatrix} D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{34} & D_{35} & D_{36} \end{vmatrix}. \tag{19a}$$

In (8) ersetzen wir ferner $f_\varkappa$ durch R_{123} und nehmen $\lambda = \varrho = 4$, $\mu = 5$, $\sigma = 1$, $\tau = 2$, $\varphi = 3$, so dass die rechte Seite durch $D_{\varkappa\varrho} = \Delta_{1234}$ theilbar wird, indem $D_{\varkappa\sigma} = 0$, $D_{\varkappa\tau} = 0$, $D_{\varkappa\varphi} = 0$; es ergiebt sich so

$$9R_{123,4,5} = \begin{vmatrix} D_{41} & D_{42} & D_{43} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}, \tag{20}$$

und insbesondere:

$$9R_{123,2,3} = D_{23}\{D_{23}f_1 + D_{31}f_2 + D_{12}f_3\}.$$

Führt man in (20) an Stelle der constituirenden Form f_4 die Covariante R_{456} ein und schreibt f_7 für f_5, so folgt mit Hülfe von (18):

$$9R_{123,456,7} = \begin{vmatrix} \Delta_{4561} & \Delta_{4562} & \Delta_{4563} \\ D_{71} & D_{72} & D_{73} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}, \tag{21}$$

und insbesondere:

$$9R_{123,234,7} = \Delta_{1234}\,(D_{27}f_3 - D_{37}f_2).$$

Da die linke Seite von (20) nur ihr Vorzeichen ändert bei der Vertauschung von 123 mit 456, so besteht auch die Identität

$$\begin{vmatrix} \Delta_{4561} & \Delta_{4562} & \Delta_{4563} \\ D_{71} & D_{72} & D_{73} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta_{1234} & \Delta_{1235} & \Delta_{1236} \\ D_{74} & D_{75} & D_{76} \\ f_4 & f_5 & f_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Ersetzt man endlich in (21) noch f_7 durch R_{789}, so ergiebt sich weiter:

$$(22)\qquad 9R_{123,456,789} = \begin{vmatrix} \Delta_{4561} & \Delta_{4562} & \Delta_{4563} \\ \Delta_{7891} & \Delta_{7892} & \Delta_{7893} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \Delta_{1234} & \Delta_{1235} & \Delta_{1236} \\ \Delta_{7894} & \Delta_{7895} & \Delta_{7896} \\ f_4 & f_5 & f_6 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \Delta_{4567} & \Delta_{4568} & \Delta_{4569} \\ \Delta_{1237} & \Delta_{1238} & \Delta_{1239} \\ f_7 & f_8 & f_9 \end{vmatrix};$$

und hieraus insbesondere

$$(22a)\qquad 9R_{123,234,341} = (\Delta_{1234})^2 \cdot f_3,$$

eine Gleichung, welche auch als Folge eines allgemeinen Satzes angesehen werden kann, den Herr Rosanes gegeben hat.*)

Es bleiben noch die aus Δ_{1234} entstehenden Bildungen zu betrachten. $\Delta_{123,4,5,6}$ ist schon durch (19a) gegeben, wenn man daselbst links und rechts die Indices passend vertauscht. Unter Benutzung von (18) folgt aus dieser Gleichung weiter:

$$(23)\qquad 9\Delta_{123,456,7,8} = \begin{vmatrix} \Delta_{4561} & D_{71} & D_{81} \\ \Delta_{4562} & D_{72} & D_{82} \\ \Delta_{4563} & D_{73} & D_{83} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \Delta_{1234} & D_{74} & D_{84} \\ \Delta_{1235} & D_{75} & D_{85} \\ \Delta_{1236} & D_{76} & D_{86} \end{vmatrix},$$

und ebenso:

$$(24)\qquad 9\Delta_{123,456,789,x} = \begin{vmatrix} \Delta_{4561} & \Delta_{7891} & D_{x1} \\ \Delta_{4562} & \Delta_{7892} & D_{x2} \\ \Delta_{4563} & \Delta_{7893} & D_{x3} \end{vmatrix},$$

$$(25)\qquad 9\Delta_{123,456,789,x\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \Delta_{4561} & \Delta_{7891} & \Delta_{x\lambda\mu 1} \\ \Delta_{4562} & \Delta_{7892} & \Delta_{x\lambda\mu 2} \\ \Delta_{4563} & \Delta_{7893} & \Delta_{x\lambda\mu 3} \end{vmatrix}.$$

*) Ueber Functionen, welche ein den Functionaldeterminanten analoges Verhalten zeigen; Borchardt's Journal Bd. 75, 1873.

Vertauscht man in den beiden letzten Gleichungen die Tripel von Indices 123, 456, 789, $\varkappa\lambda\mu$ unter einander, so ergeben sich Identitäten zwischen den Invarianten D und Δ, analog wie in (22) und (23). Aus (25) folgt noch insbesondere:

(25a) $$9\Delta_{123,234,341,412} = (\Delta_{1234})^3,$$

was man auch direct aus (22a) hätte ableiten können.

7. Zu den aufgestellten Relationen gesellen sich andere, welche die Functionaldeterminanten ϑ_{ik} enthalten; man kann solche Relationen einfach aus den von Clebsch für quadratische Formen aufgestellten herleiten, indem man die letzteren mit passenden symbolischen Factoren multiplicirt; so ist z. B. identisch:

$$2\vartheta_{12}(\xi)\cdot\vartheta_{34}(\eta) = \begin{vmatrix} (ac)^2 & (ad)^2 & a_y^2 \\ (bc)^2 & (bd)^2 & b_y^2 \\ c_\xi^2 & d_\xi^2 & (\xi\eta)^2 \end{vmatrix} a_\xi b_\xi c_\eta d_\eta,$$

und man hat

(26) $$f_\varkappa\vartheta_{\lambda\mu} + f_\lambda\vartheta_{\mu\varkappa} + f_\mu\vartheta_{\varkappa\lambda} = 0.$$

Für uns von grösserem Interesse sind aber die Gleichungen, welche entstehen, wenn man die ϑ_{ik} mit den R_{ikl} combinirt. Bilden wir die Functionaldeterminante von R_{123} mit f_4, d. i. nach der in Nr. 6 eingeführten Bezeichnung die Form $\vartheta_{123,4}$, so wird

$$\vartheta_{123,4} = -(ab)(bc)(ca)[(ad)b_\xi c_\xi + (bd)a_\xi c_\xi + (cd)a_\xi b_\xi]d_\xi^2.$$

Die drei Glieder der rechten Seite formen wir um bez. mittelst der Identitäten

$$(ac)(ab)b_x c_x = \tfrac{1}{2}\{(ab)^2 c_\xi^2 + (ac)^2 b_\xi^2 - (bc)^2 a_\xi^2\},$$

$$(ab)(cb)a_x c_x = \tfrac{1}{2}\{(ab)^2 c_\xi^2 + (cb)^2 a_\xi^2 - (ac)^2 b_\xi^2\},$$

$$(bc)(ac)a_x b_x = \tfrac{1}{2}\{(bc)^2 a_\xi^2 + (ac)^2 b_\xi^2 - (ab)^2 c_\xi^2\},$$

dann entsteht:

$$\begin{aligned}\vartheta_{123,4} = &-\tfrac{1}{2}D_{23}\vartheta_{14} - \tfrac{1}{2}D_{31}\vartheta_{24} - \tfrac{1}{2}D_{12}\vartheta_{34} \\ &+\tfrac{1}{2}(ab)^2 c_\xi^2 d_\xi^2\{(ad)(bc) - (ac)(bd)\} \\ &+\tfrac{1}{2}(bc)^2 a_\xi^2 d_\xi^2\{(ca)(bd) - (ba)(cd)\} \\ &+\tfrac{1}{2}(ca)^2 b_\xi^2 d_\xi^2\{(bc)(ad) - (ba)(cd)\}\end{aligned}$$

oder nach Anwendung einfacher Identitäten:

$$\vartheta_{123,4} = -\{D_{12}\vartheta_{34} + D_{31}\vartheta_{24} + D_{23}\vartheta_{14}\}, \tag{27}$$

und insbesondere:

$$\vartheta_{123,3} = D_{13}\vartheta_{23} - D_{23}\vartheta_{13}.$$

Ersetzt man in (27) f_4 durch R_{456}, so ergiebt sich weiter:

$$\begin{aligned}\vartheta_{123,456} &= -\{D_{12}\vartheta_{3,456} + D_{23}\vartheta_{1,456} + D_{32}\vartheta_{2,546}\} \\ &= D_{12}\{\vartheta_{34}D_{56} + \vartheta_{35}D_{64} + \vartheta_{36}D_{45}\} \\ &+ D_{23}\{\vartheta_{14}D_{56} + \vartheta_{15}D_{64} + \vartheta_{16}D_{45}\} \\ &+ D_{31}\{\vartheta_{24}D_{56} + \vartheta_{25}D_{64} + \vartheta_{26}D_{45}\},\end{aligned} \tag{28}$$

und insbesondere unter Berücksichtigung von (10)

$$\begin{aligned}\vartheta_{143,234} = 3\Delta_{1234}\vartheta_{23} &+ D_{23}\{D_{12}\vartheta_{34} + D_{13}\vartheta_{42} + D_{14}\vartheta_{23} \\ &+ D_{34}\vartheta_{12} + D_{42}\vartheta_{13} + D_{23}\vartheta_{14}\}.\end{aligned} \tag{28a}$$

Die rechte Seite lässt sich wesentlich vereinfachen, wenn man eine lineare Identität berücksichtigt, welche von den sechs Functionaldeterminanten ϑ_{ik} befriedigt wird. Führt man nämlich das Product

$$\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2a_2 & a_1a_2^2 & a_2^3 & 0 \\ b_1^3 & b_1^2b_2 & b_1b_2^2 & b_2^3 & 0 \\ c_1^3 & c_1^2c_2 & c_1c_2^2 & c_2^3 & 0 \\ d_1^3 & d_1^2d_2 & d_1d_2^2 & d_2^3 & 0 \\ \xi_2^2 & -\frac{2}{3}\xi_1\xi_2 & \frac{1}{3}\xi_1^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2^3 & -3a_2^2a_1 & 3a_2a_1^2 & -a_1^3 & 0 \\ b_2^3 & -3b_2^2b_1 & 3b_2b_1^2 & -b_1^3 & 0 \\ c_2^3 & -3c_2^2c_1 & 3c_2c_1^2 & -c_1^2 & 0 \\ d_2^3 & -3d_2^2d_1 & 3d_2d_1^2 & -d_1^3 & 0 \\ \xi_1^2 & 2\xi_1\xi_2 & \xi_2^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

aus, so folgt:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} & a_1a_\xi^2 \\ D_{21} & 0 & D_{23} & D_{24} & b_1b_\xi^2 \\ D_{31} & D_{32} & 0 & D_{34} & c_1c_\xi^2 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & 0 & d_1d_\xi^2 \\ a_2a_\xi^2 & b_2b_\xi^2 & c_2c_\xi^2 & d_2d_\xi^2 & 0 \end{vmatrix},$$

oder aufgelöst, nach Fortlassung des Factors Δ_{1234}:

$$\vartheta_{12}D_{34} + \vartheta_{13}D_{42} + \vartheta_{14}D_{23} + \vartheta_{34}D_{12} + \vartheta_{42}D_{13} + \vartheta_{23}D_{14} = 0. \tag{29}$$

Die Gleichung (28a) geht somit über in

$$\vartheta_{123,234} = 3\Delta_{1234}\vartheta_{23}. \tag{30}$$

§ III.

Die Parameterdarstellung einer Raumcurve dritter Ordnung.

8. Wir wählen jetzt insbesondere $n = 4$, betrachten also das System von vier binären cubischen Formen $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $f_3(\xi)$, $f_4(\xi)$. Zugleich führen wir eine kleine Aenderung in der bisherigen Bezeichnungsweise ein, indem die Symbole dieser Formen k, l, m, n genannt werden mögen. Setzt man

$$(31) \qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(\xi) = k\xi^3, \quad & x_3 &= f_3(\xi) = m\xi \\ x_2 &= f_2(\xi) = l\xi^3, \quad & x_4 &= f_4(\xi) = n\xi^3, \end{aligned}$$

so *sind* x_1, x_2, x_3, x_4 *die homogenen Coordinaten eines auf einer Raumcurve dritter Ordnung mit* ξ *variabeln Punktes*, vorausgesetzt, dass die Invariante Δ_{1234} nicht verschwindet. Letztere Voraussetzung soll im Folgenden immer gemacht werden.

Die Coordinaten u_i der Schmiegungsebene des Punktes ξ sind bekanntlich gegeben durch die Gleichungen:

$$(32) \qquad \begin{aligned} u_1 &= -R_{234}(\xi) = \varkappa\xi^3 = \varphi_1(\xi), \quad & u_2 &= R_{341}(\xi) = \lambda\xi^3 = \varphi_2(\xi), \\ u_3 &= -R_{412}(\xi) = \mu\xi^3 = \varphi_3(\xi), \quad & u_4 &= R_{123}(\xi) = \nu\xi^3 = \varphi_4(\xi). \end{aligned}$$

Die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt x und zugehöriger Schmiegungsebene u ist wegen (12) in der That identisch erfüllt.

Die Plücker'schen Liniencoordinaten p_{ik} der Tangente des Punktes ξ werden durch die Functionaldeterminanten ϑ_{ik} gegeben, so dass

$$(33) \qquad p_{ik} = \vartheta_{ik}(\xi);$$

und zwar ist es wegen der Relation (30) gleichgültig, ob man bei der Berechnung dieser Coordinaten die Tangente als Verbindungslinie zweier benachbarten Punkte oder als Schnittlinie zweier benachbarten Ebenen auffasst. Die ϑ_{ik} müssen auch die zwischen den Liniencoordinaten bestehende quadratische Identität

$$(33\,a) \qquad \vartheta_{12}\vartheta_{34} + \vartheta_{13}\vartheta_{42} + \vartheta_{14}\vartheta_{23} = 0$$

erfüllen; dieselbe lässt sich leicht direct ableiten da, die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1\, a_\xi^2 & b_1\, b_\xi^2 & c_1\, c_\xi^2 & d_1\, d_\xi^2 \\ a_2\, a_\xi^2 & b_2\, b_\xi^2 & c_2\, c_\xi^2 & d_2\, d_\xi^2 \\ a_1'\, a_\xi'^2 & b_1'\, b_\xi'^2 & c_1'\, c_\xi'^2 & d_1'\, d_\xi'^2 \\ a_2'\, a_\xi'^2 & b_2'\, b_\xi'^2 & c_1'\, c_\xi'^2 & d_1'\, d_\xi'^2 \end{vmatrix}$$

offenbar identisch gleich Null ist. Dass jede Tangente (33) durch ihren Berührungspunkt (31) geht, wird durch die Gleichungen (26)

ausgesagt; dass sie in der entsprechenden Ebene (32) liegt, sagen wegen der Relation (30) die vier Gleichungen aus:

$$R_{x\lambda\mu}\vartheta_{xy} + R_{x\mu y}\vartheta_{x\lambda} - R_{xy\lambda}\vartheta_{x\mu} = 0. \tag{34}$$

Die Tangenten unserer Curve gehören bekanntlich einem linearen Complexe an, und die Punkte und Ebenen der Curve entsprechen einander vermöge der durch diesen Complex vermittelten reciproken Verwandtschaft. Die letztere ist hier unmittelbar durch die Gleichungen (15) gegeben, d. h. durch

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= \quad\cdot\quad + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 + D_{14}u_4,\\
\varrho x_2 &= D_{21}u_1 + \quad\cdot\quad + D_{23}u_3 + D_{24}u_4,\\
\varrho x_3 &= D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + \quad\cdot\quad + D_{34}u_4,\\
\varrho x_4 &= D_{41}u_1 + D_{42}u_2 + D_{43}u_3 + \quad\cdot\quad ,
\end{aligned} \tag{35}$$

worin ϱ einen Proportionalitätsfactor bezeichnet. Da diese Gleichungen wiederholt benutzt werden, setzen wir sie noch einmal explicite her:

$$\begin{aligned}
\Delta f_1 &= \quad\cdot\quad + D_{12}\varphi_2 + D_{13}\varphi_3 + D_{14}\varphi_4,\\
\Delta f_2 &= D_{21}\varphi_1 + \quad\cdot\quad + D_{23}\varphi_3 + D_{24}\varphi_4,\\
\Delta f_3 &= D_{31}\varphi_1 + D_{32}\varphi_2 + \quad\cdot\quad + D_{34}\varphi_4,\\
\Delta f_4 &= D_{41}\varphi_1 + D_{42}\varphi_2 + D_{43}\varphi_3 + \quad\cdot\quad ,
\end{aligned} \tag{35a}$$

worin $\Delta = \Delta_{1234}$ sein soll, und die Auflösung ergiebt wegen (10):

$$\begin{aligned}
3\varphi_1 &= \quad\cdot\quad + D_{31}f_2 + D_{42}f_3 + D_{23}f_4,\\
3\varphi_2 &= D_{43}f_1 + \quad\cdot\quad + D_{14}f_3 + D_{31}f_4,\\
3\varphi_3 &= D_{24}f_1 + D_{41}f_2 + \quad\cdot\quad + D_{12}f_4,\\
3\varphi_4 &= D_{32}f_1 + D_{13}f_2 + D_{21}f_3 + \quad\cdot\quad .
\end{aligned} \tag{35b}$$

Die Gleichung des zugehörigen linearen Complexes ist wegen (35):

$$D_{12}p_{34} + D_{13}p_{42} + D_{14}p_{23} + D_{34}p_{12} + D_{42}p_{13} + D_{23}p_{14} = 0. \tag{35c}$$

Dass letztere Gleichung durch die Werthe (33) in der That befriedigt wird, ist schon durch Aufstellung der Identität (29) gezeigt worden.

9. Die durch (31) dargestellte Raumcurve dritter Ordnung liegt auf zweifach unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, welche eine lineare Schaar (ein Netz) bilden. Zwischen den vier Functionen f_i müssen daher drei von einander unabhängige quadratische Identitäten bestehen. Es ist hervorzuheben, dass man bei Aufstellung solcher Identitäten nicht von den Gleichungen (11) und (16) ausgehen kann. Bildet man nämlich diese Relationen für unsern Fall eines Systems von nur vier Formen, so sind die Coefficienten der Quadrate und der Producte der f_i sämmtlich gleich Null. Die Gleichung (14) dagegen

führt hier zum Ziele; sie selbst zusammen mit den drei aus ihr durch successive Polarenbildung nach ξ entstehenden Gleichungen, ergiebt nämlich nach Vertauschung von ξ und η:*)

$$(36)\quad \begin{aligned} k_\xi^3 x_\eta^3 &+ l_\xi^3 \lambda_\eta^3 &+ m_\xi^3 \mu_\eta^3 &+ n_\xi^3 \nu_\eta^3 &= \Delta(\xi\eta)^3,\\ k_\xi^3 x_\eta^2 x_\zeta &+ l_\xi^3 \lambda_\eta^2 \lambda_\zeta &+ m_\xi^3 \mu_\eta^2 \mu_\zeta &+ n_\xi^3 \nu_\eta^2 \nu_\zeta &= \Delta(\xi\eta)^2(\xi\zeta),\\ k_\xi^3 x_\eta x_\zeta^2 &+ l_\xi^3 \lambda_\eta \lambda_\zeta^2 &+ m_\xi^3 \mu_\eta \mu_\zeta^2 &+ n_\xi^3 \nu_\eta \nu_\zeta^2 &= \Delta(\xi\eta)(\xi\zeta)^2,\\ k_\xi^3 x_\zeta^3 &+ l_\xi^3 \lambda_\zeta^3 &+ m_\xi^3 \mu_\zeta^3 &+ n_\xi^3 \nu_\zeta^3 &= \Delta(\xi\zeta)^3. \end{aligned}$$

Offenbar ist das Product der linken Seiten der ersten und vierten Gleichung gleich dem Producte der linken Seiten der zweiten und dritten Gleichung; es ist ferner das Quadrat von $\Delta(\xi\eta)^2(\xi\zeta)$ gleich dem Producte von $\Delta(\xi\eta)(\xi\zeta)^2$ in $\Delta(\xi\eta)^3$ und das Quadrat von $\Delta(\xi\eta)(\xi\zeta)^2$ gleich dem Producte von $\Delta(\xi\zeta)^3$ in $\Delta(\xi\eta)^2(\xi\zeta)$. Es entstehen so nach einigen sehr einfachen Umformungen folgende drei quadratischen Gleichungen zwischen den f_i:

$$(37)\quad \begin{aligned} \sum\sum \Theta_{ik}(\eta,\eta) f_i f_k &= 0,\\ \sum\sum \Theta_{ik}(\eta,\zeta) f_i f_k &= 0,\\ \sum\sum \Theta_{ik}(\zeta,\zeta) f_i f_k &= 0, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Theta_{12}(\eta,\eta) = (x\lambda)^2 x_\eta \lambda_\eta, \qquad \Theta_{11}(\eta,\eta) = (xx')^2 x_\eta x'_\eta,$$
$$\Theta_{12}(\eta,\zeta) = (x\lambda)^2 (x_\eta \lambda_\zeta + x_\zeta \lambda_\eta), \quad \Theta_{11}(\eta,\zeta) = (xx')^2 (x_\eta x'_\zeta + x_\zeta x'_\eta),$$
$$\sum\sum \Theta_{ik} f_i f_k = \Theta_{11} f_1^2 + \cdots + 2\Theta_{12} f_1 f_2 + \cdots$$

Dass die Gleichungen (37) von einander linear unabhängig sind, erkennt man an dem Beispiele:

$$k_\xi^3 = \xi_1^3,\ l_\xi^3 = 3\xi_1^2\xi_2,\ m_\xi^3 = 3\xi_1\xi_2^2,\ n_\xi^3 = \xi_2^3.$$

Es sind daher $r_x^2 = 0$, $s_x^2 = 0$, $t_x^2 = 0$ *die Gleichungen dreier Flächen, auf welchen unsere Curve dritter Ordnung liegt, falls gesetzt wird:*

$$(38)\quad \begin{aligned} r_x^2 &= \sum\sum \Theta_{ik}(\eta,\eta)\, x_i x_k,\\ s_x^2 &= \sum\sum \Theta_{ik}(\eta,\zeta)\, x_i x_k,\\ t_x^2 &= \sum\sum \Theta_{ik}(\zeta,\zeta)\, x_i x_k, \end{aligned}$$

worin $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ *beliebige Grössen bezeichnen.*

*) Führt man in (36) die Coordinaten x_i vermittelst (31) ein und setzt noch $(\xi\eta)^3 = y_1$, $(\xi\eta)^2(\xi\zeta) = y_2$, $(\xi\eta)(\xi\zeta)^2 = y_3$, $(\xi\zeta)^3 = y_4$, so hat man die Gleichungen derjenigen Coordinatentransformation vor sich, vermöge deren die allgemeine Parameterdarstellung (31) in die übliche (und in der Einleitung erwähnte) canonische Form übergeführt wird.

Ebenso sind durch die Gleichungen

$$u_\varrho = \sum\sum T_{ik}(\eta, \eta)\, u_i u_k = 0,$$

(38a)
$$u_\sigma = \sum\sum T_{ik}(\eta, \zeta)\, u_i u_k = 0,$$

$$u_\tau^2 = \sum\sum T_{ik}(\zeta, \zeta)\, u_i u_k = 0,$$

in denen

$$T_{12}(\eta, \eta) = (kl)^2 k_\eta l_\eta,\ T_{12}(\eta, \zeta) = (kl)^2 (k_\eta l_\zeta + k_\zeta l_\eta),\ \text{etc.}$$

drei Flächen zweiter Classe gegeben, welche von sämmtlichen Schmiegungsebenen (32) *berührt werden.*

Die Flächen (38a) müssen aus den Flächen (38) vermöge des Nullsystems (35) hervorgehen; *es müssen sich also die Formen T_{ik} linear durch die Θ_{ik} ausdrücken lassen*; in der That folgt auch aus (15) die allgemeine Relation

$$(\Delta_{\varkappa\lambda\mu\nu})^2 T_{\varrho\sigma} = \sum_i \sum_k D_{i\varrho} D_{k\sigma} \Theta_{ik},$$

wo beim Summiren rechts für i und k die Werthe $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ zu nehmen sind.

10. Die vorstehenden Resultate erlauben uns einige Aufgaben zu lösen, zu deren Behandlung die Parameterdarstellung (31) naturgemäss auffordert.

A) *Es soll die Gleichung derjenigen Sehne unserer Curve dritter Ordnung in Liniencoordinaten aufgestellt werden, welche durch einen nicht auf der Curve liegenden Punkt y hindurchgeht.*

Durch den Punkt y gehen unendlich viele Flächen des Netzes, welchem die Flächen (38) angehören; dieselben schneiden sich alle in der fraglichen Sehne, und dasselbe gilt von ihren Tangentenebenen im Punkte y; letztere bilden den Büschel

$$\varkappa(r_y^2 t_x t_y - t_y^2 r_x r_y) + \lambda(s_y^2 t_x t_y - t_y^2 s_x s_y) = 0.$$

Die Coordinaten der Sehne sind daher:

$$\varrho p_{ik} = r_y^2 (st)_{ik} s_y t_y + s_y^2 (tr)_{ik} t_y r_y + t_y^2 (rs)_{ik} r_y s_y,$$

und ihre Gleichung, d. h. die Bedingung dafür, dass sich zwei Ebenen u, v in der Sehne schneiden, ist:

(39) $$r_y^2 (stuv) s_y t_y + s_y^2 (truv) t_y r_y + t_y^2 (rsuv) r_y s_y = 0.$$

Dualistisch entsprechend erscheint *die Gleichung derjenigen Axe unserer Curve* (*Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen*), *welche in einer gegebenen Ebene v liegt*, in der Form

(39a) $$v_\varrho^2 (\sigma\tau xy) v_\sigma v_\tau + v_\sigma^2 (\tau\varrho xy) v_\tau v_\varrho + v_\tau^2 (\varrho\sigma xy) v_\sigma v_\varrho = 0,$$

worin die Symbole ϱ, σ, τ durch (38a) definirt sind.

B) *Es soll die Gleichung der durch* (31) *gegebenen Curve dritter Ordnung in Ebenencoordinaten angegeben werden.*

Ist eine Ebene v Tangentialebene der Curve, so wird letztere von der in v liegenden Axe berührt, diese Axe gehört folglich dann dem linearen Complexe (35c) an; und umgekehrt ist jede Axe, welche diesem Complexe angehört (d. h. welche zugleich Sehne ist) eine Tangente der Curve. Wir haben also nur die Bedingung dafür aufzustellen, dass die Gleichung (35c) durch die in (39a) gegebenen Coordinaten

$$p_{ik} = v_\varrho^2 v_{,} v_\tau (\sigma\tau)_{ik} + v_\sigma^2 v_\tau v_\varrho (\tau\varrho)_{ik} + v_\tau^2 v_\sigma v_\varrho (\varrho\sigma)_{ik}$$

befriedigt werde. Wir benutzen hier und im Folgenden die von Clebsch*) für Liniencoordinaten eingeführte Symbolik, setzen also

$$(40) \qquad \sum\sum D_{ik} p_{lm} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}xy) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}uv).$$

Dann ist die gesuchte Gleichung in Ebenencoordinaten u_l:

$$(41) \qquad u_\varrho^2(\sigma\tau\mathfrak{a}\mathfrak{b})u_\sigma u_\tau + u_\sigma^2(\tau\varrho\mathfrak{a}\mathfrak{b})u_\tau u_\varrho + u_\tau^2(\varrho\sigma\mathfrak{a}\mathfrak{b})u_\varrho u_\sigma = 0,$$

also von der vierten Classe, wie es sein muss.

Dualistisch entsprechend, ist *die Gleichung der von den Tangenten unserer Curve gebildeten abwickelbaren Fläche* gegeben durch:

$$(41a) \qquad r_x^2(st\mathfrak{A}\mathfrak{B})s_x t_x + s_x^2(tr\mathfrak{A}\mathfrak{B})t_x r_x + t_x^2(rs\mathfrak{A}\mathfrak{B})r_x s_x = 0.$$

C) *Es soll die Gleichung der durch* (31) *gegebenen Curve in Liniencoordinaten aufgestellt werden.*

Bei Lösung dieser Aufgabe befolgen wir einen Gedankengang, welcher demjenigen analog ist, mittelst dessen Herr Rosenow die Punktcoordinaten-Gleichung einer ebenen unicursalen Curve dritter Ordnung aus ihrer Parameterdarstellung abgeleitet hat.**) Im Punkte ξ der Curve mögen sich die Ebenen u und v schneiden; dann ist

$$u_1 f_1(\xi) + u_2 f_2(\xi) + u_3 f_3(\xi) + u_4 f_4(\xi) = 0,$$
$$v_1 f_1(\xi) + v_2 f_2(\xi) + v_3 f_3(\xi) + v_4 f_4(\xi) = 0.$$

Bestehen aber zwei Gleichungen gleichen Grades für einen Werth von ξ, so verschwindet für diesen auch die Functionaldeterminante, d. h. man hat

$$\sum\sum q_{ik}\vartheta_{ik}(\xi) = 0,$$

wo $q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k$ die Coordinaten einer durch den Punkt ξ gehenden Geraden sind. Es verschwinden ferner auch die Differentialquotienten der Functionaldeterminante nach ξ_1 und ξ_2. Setzt man also

$$(42) \qquad \vartheta_\xi^4 = \sum\sum q_{ik}\vartheta_{ik}(\xi) = \vartheta_0\xi_1^4 + 4\vartheta_1\xi_1^3\xi_2 + 6\vartheta_2\xi_1^2\xi_2^2 + 4\vartheta_3\xi_1\xi_2^3 + \vartheta_4\xi_2^4,$$

*) Mathematische Annalen Bd. II, pag. 1 und Bd. V, pag. 435.

**) Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, nach den Methoden der neueren Algebra behandelt, Breslau 1873.

so ist auch

$$(42\,a)\qquad \begin{aligned} 0 &= \vartheta_0\xi_1^3 + 3\vartheta_1\xi_1^2\xi_2 + 3\vartheta_2\xi_1\xi_2^2 + \vartheta_3\xi_2^3, \\ 0 &= \vartheta_1\xi_1^3 + 3\vartheta_2\xi_1^2\xi_2 + 3\vartheta_3\xi_1\xi_2^2 + \vartheta_4\xi_2^3. \end{aligned}$$

Sind ferner x und y zwei Punkte der Linie q, so hat man

$$\varrho x_i - \lambda y_i = f_i(\xi) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die Bedingung dafür, dass die Verbindungslinie von x und y die Curve trifft, d. h. die gesuchte Gleichung in Liniencoordinaten ist daher

$$(43)\qquad \begin{vmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & x_1 & y_1 \\ l_0 & l_1 & l_2 & l_3 & x_2 & y_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & x_3 & y_3 \\ n_0 & n_1 & n_2 & n_3 & x_4 & y_4 \\ \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & 0 & 0 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wenn $q_{12} = x_3y_4 - x_4y_3$, etc., $k_\xi^3 = k_0\xi_1^3 + 3k_1\xi_1^2\xi_2 + 3k_2\xi_1\xi_2^2 + k_3\xi_2^3$, etc. gesetzt wird, und wenn die Grössen ϑ_i durch (42) definirt werden.

Man findet ebenso die Liniencoordinatengleichung der abwickelbaren Fläche, welche von den Tangenten unserer Curve gebildet wird, indem man nur in (43) *allenthalben die Symbole k, l, m, n bez. mit x, λ, μ, ν, und x, y mit u, v vertauscht.*

11. Nachdem man mit den von Clebsch aufgestellten Relationen zwischen den Invarianten und Covarianten beliebig vieler quadratischer Formen bekannt geworden ist und sodann die in § II aufgestellten entsprechenden Relationen für ein System von beliebig vielen cubischen Formen kennen gelernt hat, wird man sofort übersehen, dass und wie sich die gewonnenen Formeln einfach auf Systeme binärer Formen n^{ter} Ordnung erweitern lassen. Es würde mehr umständlich als schwierig sein, die betreffenden Resultate hier ausführlich zusammenzustellen, und es mag dies deshalb unterbleiben.

Ist insbesondere ein System von $n+1$ binären Formen n^{ter} Ordnung gegeben, zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht, so hat man die Parameterdarstellung einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkte, welche sich in einer Mannigfaltigkeit n^{ter} Dimension und in keiner Mannigfaltigkeit niedrigerer Dimension befindet (einer „Normcurve n^{ter} Ordnung" nach Herrn Fr. Meyer). Man wird die Gleichung dieser Curve in Ebenencoordinaten, etc. in analoger Weise aufstellen können, wie dies für $n = 3$ soeben geschah. Es ist dabei zu beachten, dass neben den

Punkt-, Ebenen- und Liniencoordinaten die Coordinaten aller der Zwischengebilde zu betrachten sind, welche man in die Geometrie höherer Mannigfaltigkeiten nach Grassmann und Clebsch einführen muss.

Es soll hier nur hervorgehoben werden, dass sich bei Bildung der zwischen $n+1$ binären Formen n^{ter} Ordnung bestehenden quadratischen Relationen ein wesentlicher Unterschied geltend macht, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Man wird diese Relationen in beiden Fällen erhalten, indem man von den zu (36) analogen Gleichungen ausgeht; und man wird so im allgemeinen Falle $2n-3$ Relationen finden. Ist nun n gerade, so ist eine gewisse lineare Combination der letzteren gegeben durch das Verschwinden einer zu (16) analogen Determinante, wie dies für $n=2$ bekannt ist; bedeutet aber n eine ungerade Zahl, so verschwindet die entsprechende Determinante, wie oben für $n=3$ in Nr. 9 hervorgehoben wurde, identisch, d. h. unabhängig von den Functionen f_i. *Ist also n eine gerade Zahl, so liegt die betreffende Normcurve n^{ter} Ordnung auf einer ausgezeichneten Fläche zweiter Ordnung (Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen), und die Tangentenebenen der letzteren längs der Curve sind zugleich die Schmiegungsebenen der Berührungspunkte in Bezug auf diese Curve; ist aber n ungerade, so giebt es eine derartige Fläche zweiter Ordnung nicht, die Beziehung zwischen Punkten und Schmiegungsebenen der Curve wird vielmehr durch ein Nullsystem vermittelt.*

Auch in Betreff der simultanen Invariante von $n+1$ Formen, welche linear ist in Bezug auf die Coefficienten jeder Form, sind zwei Fälle zu unterscheiden: Ist n ungerade, so lässt sich dieselbe als ganze Function niedrigerer Invarianten darstellen, ist aber n gerade, so wird erst ihr Quadrat so darstellbar.

Bemerkt mag noch werden, dass an Stelle des Zahlenfactors 9 in Gleichung (6) und den aus ihr abgeleiteten Gleichungen im allgemeinen Falle das Product aller zur Zahl n gehörigen Binomialcoefficienten auftritt, d. h. das Product

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots i}.$$

§ IV.

Die Beziehungen zwischen binären und quaternären algebraischen Formen.

12. Die vorstehenden Untersuchungen ermöglichen es uns, mit Hülfe der binären cubischen Formen ein analoges Uebertragungsprincip zwischen den binären und quaternären Formen herzustellen, wie wir es früher (vergl. § 1) zwischen binären und ternären Formen bemerkt

haben, und somit die von den Herren Meyer und Schlesinger in Angriff genommenen Verallgemeinerungen jener früheren Untersuchungen durchzuführen, ohne dabei von canonischen Formen Gebrauch zu machen.

Ist a_ξ^3 eine beliebige binäre cubische Form, so hat man nach Gleichung (14)

$$(44) \qquad \Delta a_\xi^3 = (a\varkappa)^3 k_\xi^3 + (a\lambda)^3 l_\xi^3 + (a\mu)^3 m_\xi^3 + (a\nu)^3 n_\xi^3,$$

und folglich wird eine beliebige Form $3p^{\text{ter}}$ Ordnung a_ξ^{3p} dargestellt durch die Formel:

$$\begin{aligned}\Delta^p a_\xi^{3p} = {} & [(a\varkappa')^3 k_\xi'^3 + (a\lambda')^3 l_\xi'^3 + (a\mu')^3 m_\xi'^3 + (a\nu')^3 n_\xi'^3] \\ & \times [(a\varkappa'')^3 k_\xi''^3 + (a\lambda'')^3 l_\xi''^3 + (a\mu'')^3 m_\xi''^3 + (a\nu'')^3 n_\xi''^3] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times [(a\varkappa^{(p)})^3 k_\xi^{(p)3} + (a\lambda^{(p)})^3 l_\xi^{(p)3} + (a\mu^{(p)})^3 m_\xi^{(p)3} + (a\nu^{(p)})^3 n_\xi^{(p)3}].\end{aligned}$$

Macht man auf der rechten Seite die Substitution (31), so erhält man eine quaternäre algebraische Form p^{ter} Ordnung α_x^p, welche gleich Null gesetzt eine Fläche p^{ter} Ordnung darstellt; und letztere Fläche schneidet die durch (31) dargestellte Raumcurve dritter Ordnung in denjenigen $3p$ Punkten, welche durch die Gleichung $a_\xi^{3p} = 0$ geliefert werden. Wir setzen im Folgenden

$$\begin{aligned}(45) \quad \alpha_x^p \equiv \beta_x^p \equiv \cdots = {} & [(a\varkappa')^3 x_1 + (a\lambda')^3 x_2 + (a\mu')^3 x_3 + (a\nu')^3 x_4] \\ & \times [(a\varkappa'')^3 x_1 + (a\lambda'')^3 x_2 + (a\mu'')^3 x_3 + (a\nu'')^3 x_4] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times [(a\varkappa^{(p)})^3 x_1 + (a\lambda^{(p)})^3 x_2 + (a\mu^{(p)})^3 x_3 + (a\nu^{(p)})^3 x_4],\end{aligned}$$

so dass die Symbole α, β, ... definirt sind durch

$$(45a) \quad \alpha_x \equiv \beta_x \equiv \cdots = (a\varkappa)^3 x_1 + (a\lambda)^3 x_2 + (a\mu)^3 x_3 + (a\nu)^3 x_4.$$

13. Die Fläche $\alpha_x^p = 0$ ist offenbar der binären Form a_ξ^{3p} in bestimmter und eindeutiger Weise zugeordnet; es wird also zunächst darauf ankommen, festzustellen, wodurch diese Fläche vor den unendlich vielen anderen Flächen gleicher Ordnung ausgezeichnet ist, die ebenfalls durch die $3p$ Punkte $a_\xi^{3p} = 0$ hindurchgehen. Bilden wir zu dem Zwecke den Ausdruck $\alpha_\varrho^2 \alpha_x^{p-2}$, wo mit ϱ dieselben Symbole wie in (38a) bezeichnet sind: nach (45a) ist

$$\begin{aligned}\alpha_\varrho^2 = {} & (kk')^2 k_\eta k_\eta' (a\varkappa')^3 (a\varkappa'')^3 + (ll')^2 l_\eta l_\eta' (a\lambda')^3 (a\lambda'')^3 + (mm')^2 m_\eta m_\eta' (a\mu')^3 (a\mu'')^3 \\ & + (nn')^2 n_\eta n_\eta' (a\nu')^3 (a\nu'')^3 + 2(kl)^2 k_\eta l_\eta (a\varkappa)^3 (a\lambda)^3 + 2(km)^2 k_\eta m_\eta (a\varkappa)^3 (a\mu)^3 \\ & + 2(kn)^2 k_\eta n_\eta (a\varkappa)^3 (a\nu)^3 + 2(lm)^2 l_\eta m_\eta (a\lambda)^3 (a\mu)^3 + 2(ln)^2 l_\eta n_\eta (a\lambda)^3 (a\nu)^3 \\ & + 2(mn)^2 m_\eta n_\eta (a\mu)^3 (a\nu)^3.\end{aligned}$$

Die rechte Seite aber ist identisch gleich Null; dualistisch entsprechend zur ersten Gleichung (37), besteht nämlich die Relation

$$\sum\sum T_{ik}(\eta, \eta)\, \varphi_i(\xi)\, \varphi_k(\xi) = 0,$$

und aus der linken Seite dieser Identität entsteht der für α_ϱ^2 angegebene Ausdruck, wenn man $\xi_2 = a_1$, $\xi_1 = -a_2$ setzt. Ebenso weist man nach, dass die symbolischen Bildungen α_σ^2 und α_τ^2 identisch Null sind.

Unsere Fläche $\alpha_x^p = 0$ ist daher dadurch ausgezeichnet, dass die drei identischen Gleichungen bestehen

$$\alpha_\varrho^2 \alpha_x^{p-2} \equiv 0, \quad \alpha_\sigma^2 \alpha_x^{p-2} \equiv 0, \quad \alpha_\tau^2 \alpha_x^{p-2} \equiv 0; \tag{46}$$

sie ist also conjugirt (apolar) zu sämmtlichen Flächen zweiter Classe, welche der abwickelbaren Fläche unserer Raumcurve dritter Ordnung einbeschrieben werden können.

Dieser Satz findet sich bei Herrn Meyer a. a. O. für $p = 0$ vollständig entwickelt, und ist für den allgemeinen Fall angedeutet. Dass die Gleichungen (46) zusammen mit den $3p$ Punkten der Normcurve auch umgekehrt eine Fläche $\alpha_x^p = 0$ vollkommen bestimmen, folgern wir aus dem von Herrn Schlesinger gegebenen Satze, dass *die Fläche $\alpha_x^p = 0$ apolar ist zu allen Flächen p^{ter} Classe, welche der developpabelen Fläche unserer Normcurve dritter Ordnung einbeschrieben werden können.* Die Richtigkeit des letzteren Satzes selbst erhellt unmittelbar. Eine Fläche p^{ter} Classe $u_\mathfrak{p}^p = 0$ der erwähnten Art muss nämlich den $3p+1$ Bedingungen genügen, welche durch das identische Verschwinden der binären Form

$$\prod_{i=1}^{i=p} (\mathfrak{p}_1 \varkappa_\xi^{(i)3} + \mathfrak{p}_2 \lambda_\xi^{(i)3} + \mathfrak{p}_3 \mu_\xi^{(i)3} + \mathfrak{p}_4 \nu_\xi^{(i)3})$$

dargestellt werden. Setzt man $\xi_1 = -a_2$, $\xi_2 = a_1$, so geht diese Form wegen (45a) über in

$$\prod_{i=1}^{i=p} [\mathfrak{p}_1 (a\varkappa^{(i)})^3 + \mathfrak{p}_2 (a\lambda^{(i)})^3 + \mathfrak{p}_3 (a\mu^{(i)})^3 + \mathfrak{p}_4 (a\nu^{(i)})^3] = \alpha_\mathfrak{p}^p;$$

folglich ist $\alpha_\mathfrak{p}^p = 0$, q. e. d.

Die Form $u_\mathfrak{p}^p$ war an $3p+1$ Bedingungen geknüpft, enthält also noch

$$\tfrac{1}{6}(p+1)(p+2)(p+3) - 3p - 2$$

lineare Parameter; somit bildet die Gesammtheit der Flächen $\alpha_x^p = 0$, welche zu allen Flächen $u_\mathfrak{p}^p = 0$ apolar sind, eine lineare Schaar mit $3p$ Parametern, und eine einzelne Fläche $\alpha_x^p = 0$ ist durch $3p$ ihrer

Punkte vollkommen bestimmt. *Die im letzten Satze hervorgehobene Eigenschaft charakterisirt daher unsere Flächen* $\alpha_x^p = 0$ *vollständig.*

Wir zeigen weiter, dass diese Eigenschaft eine Folge der Gleichungen (46) ist. Man kann nämlich drei quaternäre Formen u_τ^{p-2}, u_ε^{p-2}, u_ι^{p-2} so bestimmen, dass identisch

$$u_\mathfrak{p}^p = u_\tau^{p-2} u_\varrho^2 + u_\varepsilon^{p-2} u_\sigma^2 + u_\iota^{p-2} u_\tau^2;$$

es ist dann

$$\alpha_\mathfrak{p}^p = \alpha_\tau^{p-2} \alpha_\varrho^2 + \alpha_\varepsilon^{p-2} \alpha_\sigma^2 + \alpha_\iota^{p-2} \alpha_\tau^2,$$

also gleich Null in Folge von (46), wie behauptet wurde. Es folgt hieraus, dass *die Gleichungen* (46) *mit nur*

$$\frac{1}{6}(p+1)(p+2)(p+3) - 3p - 1$$

von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent sind und ebenfalls unsere Flächen $\alpha_x^p = 0$ *vollständig charakterisiren.*

14. Die zu einer binären Form a_ξ^{3p} gehörige Fläche $\alpha_x^p = 0$ kann man benutzen, um Punktsysteme des binären Gebiets durch geometrisch anschaulichere Gebilde zu ersetzen, wie nach dem in § I Gesagten wohl nicht mehr ausgeführt zu werden braucht. So wird man die dritte Polare des Punktes η in Bezug auf die Form $a_\xi^{3p} = 0$ (also die Form $a_\xi^{3p-3} a_\eta^3 = 0$) finden, indem man unsere Normcurve als Träger des binären Werthgebiets benutzt und dieselbe zum Schnitte bringt mit der ersten Polare des Punktes η in Bezug auf die Fläche $\alpha_x^p = 0$. Ebenso wird man auch Polarenconstructionen in Bezug auf binäre Formen von den Ordnungen $3p+1$ und $2p+2$ ausführen können; man muss dann nur die Form ersetzen durch die einfach unendliche Schaar ihrer ersten Polaren bez. durch die zweifach unendliche Schaar ihrer zweiten Polaren, wie es Herr Schlesinger thut, und wie ich es für Constructionen auf dem Kegelschnitte (in der Ebene) a. a. O. angegeben hatte.

Es ist ferner selbstverständlich, dass man eine binäre Form a_ξ^{3p} auch durch die $3p$ Schmiegungsebenen ihrer $3p$ Nullpunkte repräsentiren, ihr also eine bestimmte Fläche p^{ter} Classe zuordnen kann (welche dann zu den Flächen $r_x^2 = 0$, $s_x^2 = 0$, $t_x^2 = 0$ conjugirt ist), und dass an letztere ganz entsprechende dualistische Betrachtungen anzuknüpfen sind. Es lassen sich aber auch beide Darstellungsweisen verbinden, und in dieser Beziehung möge hier noch ein Satz hervorgehoben werden.

Gegeben seien zwei binäre Formen gleicher Ordnung a_ξ^{3p} und g_ξ^{3p}, es sei $\alpha_x^p = 0$ die zu $a_\xi^{3p} = 0$ gehörige Fläche p^{ter} Ordnung, $u_\gamma^p = 0$

die zu den $3p$ Schmiegungsebenen der Punkte $g_\xi^{3p} = 0$ gehörige Fläche p^{ter} Classe, so dass nach (45a)

$$\alpha_x = (a\varkappa)^3 x_1 + (a\lambda)^3 x_2 + (a\mu)^3 x_3 + (a\nu)^3 x_4,$$
$$u_\gamma = (gk)^3 u_1 + (gl)^3 u_2 + (gm)^3 u_3 + (gn)^3 u_4.$$

Dann ist auch nach (14)

$$\alpha_\gamma^p = \prod_{i=1}^{i=p} [(a\varkappa^{(i)})^3 (gk^{(i)})^3 + (a\lambda^{(i)})^3 (gl^{(i)})^3 + (a\mu^{(i)})^3 (gm^{(i)})^3 + (a\nu^{(i)})^3 (gn^{(i)})^3]$$
$$= \Delta^p (ag)^{3p}.$$

Sind also zwei binäre Formen $3p^{ter}$ Ordnung conjugirt, so ist die den Punkten der einen zugehörige Fläche p^{ter} Ordnung conjugirt zu der Fläche p^{ter} Classe, welche den Schmiegungsebenen der andern beigeordnet ist.

15. Hiermit hätten wir auf unserem allgemeinen Wege die wichtigsten Resultate abgeleitet, auf welche sich die weiteren Untersuchungen der Herren Meyer und Schlesinger stützen. Die Allgemeinheit unserer Behandlungsweise ermöglicht es uns aber, noch wesentliche Ergänzungen hinzuzufügen, insbesondere allgemeine symbolische Formeln aufzustellen, welche den Zusammenhang zwischen binären und quaternären Formen in ähnlicher Weise vermitteln, wie die in § I mitgetheilten Relationen den analogen Zusammenhang zwischen binären und ternären Formen herstellten.

Zunächst ist klar, dass einer Fläche $\alpha_x^p = 0$, welche an die Bedingungen (46) gebunden ist, besondere Invarianteneigenschaften zukommen müssen, sobald $p > 3$. Fassen wir zuerst nur die erste Gleichung $\alpha_\varrho^2 \alpha_x^{p-2} = 0$ ins Auge. Aus ihr folgt auch, dass die Bedingung

$$\alpha_\varrho^2 \alpha_x^{p-4} \alpha_y^2 = 0 \tag{47}$$

unabhängig von x und y erfüllt sein muss; es bestehen also auch die 10 Gleichungen

$$\alpha_\varrho^2 \alpha_x^{p-4} \alpha_i \alpha_k \equiv 0 \quad \text{für} \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Aus denselben kann man die 10 Coefficienten von u_ϱ^2 eliminiren und findet, dass eine 10-reihige Determinante verschwinden muss; bedeuten $\alpha^{(i)}$ Symbole welche mit α äquivalent sind, so zerfällt diese Determinante in das Product der symbolischen Factoren

$$\alpha_x^{p-4},\ \alpha_x'^{p-4},\ \alpha_x''^{p-4},\ \ldots,\ \alpha_x^{(9)p-4}$$

und in eine Determinante, deren erste Horizontalreihe gebildet wird von den Elementen

$$\alpha_1^2,\ \alpha_2^2,\ \alpha_3^2,\ \alpha_4^2,\ \alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_4,\ \alpha_2\alpha_3,\ \alpha_2\alpha_4,\ \alpha_3\alpha_4,$$

und deren übrige Reihen die anderen Symbole $\alpha^{(i)}$ in gleicher Weise enthalten. Diese letztere Determinante kann man nach den von Herrn Hunyady gegebenen Formeln*) durch lauter symbolische Factoren von dem Typus $(\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{(4)})$ auf verschiedene Weise darstellen. Setzt man zur Abkürzung

$$(0\,1\,2\,3) = (\alpha\,\alpha'\,\alpha''\,\alpha'''), \text{ etc.},$$

so ist sie bis auf einen Zahlenfactor z. B. gleich

$$\begin{vmatrix} (1237)(4567) & (1347)(2567) & (1457)(2367) & (1257)(3467) \\ (1238)(4568) & (1348)(2568) & (1458)(2368) & (1258)(3468) \\ (1239)(4569) & (1349)(2569) & (1459)(2369) & (1259)(3469) \\ (1230)(4560) & (1340)(2560) & (1450)(2360) & (1250)(3460) \end{vmatrix}.$$

Sobald die hiermit symbolisch dargestellte Covariante von α_x^p identisch verschwindet, kann die Gleichung (47) unabhängig von x und y bestehen, kann man also eine Fläche $u_\varrho^2 = 0$ bestimmen, welche der Bedingung $\alpha_\varrho^2 \alpha_x^{p-2} \equiv 0$ genügt. Aber es soll nicht nur *eine* Fläche $u_\varrho^2 = 0$ geben, sondern es sollen zweifach unendlich viele Flächen der Art möglich sein, die eine lineare Schaar $\varkappa u_\varrho^2 + \lambda u_\sigma^2 + \mu u_\tau^2 = 0$ bilden. Dafür ist nöthig und hinreichend, dass alle achtreihigen Unterdeterminanten derjenigen Determinante verschwinden, welche soeben mittelst der Hunyady'schen Formel umgeformt wurde. Da nun die Symbole $\alpha^{(i)}$ alle unter einander äquivalent sind, so genügt es offenbar, dass die aus den ersten acht Horizontalreihen zu bildenden achtreihigen Determinanten sämmtlich verschwinden; und dies wird erreicht, wenn man annimmt, dass diejenige Determinante Null sei, welche entsteht, wenn man die Symbole $\alpha_i^{(8)}$ und $\alpha_i^{(9)}$ bez. durch willkürliche Grössen u_i und v_i ersetzt.

Die den binären Formen $3p^{ter}$ Ordnung nach Nr. 13 *beigeordneten ternären Formen α_x^p haben also die Eigenschaft, dass diejenige Covariante identisch (unabhängig von x, u und v) verschwindet, welche entsteht, wenn man in der soeben gebildeten Covariante die symbolischen Factoren $\alpha_x^{(8)p-4}$ und $\alpha_x^{(9)p-4}$ fortlässt und im Uebrigen $\alpha^{(8)}$ durch u, $\alpha^{(9)}$ durch v ersetzt. Und durch diese Eigenschaft sind die Flächen $\alpha_x^p = 0$ vollkommen charakterisirt.*

16. Wir gehen jetzt dazu über, die zu Anfang von Nr. 15 erwähnten symbolischen Relationen abzuleiten.

*) Crelle's Journal Bd. 89, p. 47, 1880. Für die im Texte benutzte Formel ist daselbst verwiesen auf eine Arbeit von Weddle im Cambridge and Dublin Math. Journal, t. V, p. 226.

Es seien α, β, γ, δ Symbole von irgend welchen quaternären Formen und a, b, c, d Symbole der zugeordneten binären Formen, dann ist nach (45a), (9) und (25a)

$$(48)\quad (\alpha\beta\gamma\delta)=\begin{vmatrix}(a\varkappa)^3 & (a\lambda)^3 & (a\mu)^3 & (a\nu)^3\\ (b\varkappa)^3 & (b\lambda)^3 & (b\mu)^3 & (b\nu)^3\\ (c\varkappa)^3 & (c\lambda)^3 & (c\mu)^3 & (c\nu)^3\\ (d\varkappa)^3 & (d\lambda)^3 & (d\mu)^3 & (d\nu)^3\end{vmatrix}$$
$$= 9(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)\cdot(\varkappa\lambda)(\varkappa\mu)(\varkappa\nu)(\lambda\mu)(\lambda\nu)(\mu\nu)$$
$$= \Delta^2(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd).$$

Da nun jede quaternäre Covariante sich aus symbolischen Factoren des Typus α_x und des Typus $(\alpha\beta\gamma)$ zusammensetzt, so folgt aus (48) und dem in Nr. 12 und 13 Gesagten, dass *jeder quaternären Covariante von solchen Formen, die der in Nr.* 15 *aufgestellten Bedingung genügen, eine bestimmte binäre zugeordnet ist, welche nur symbolische Factoren der Typen* a_ξ^3 *und* (ab) (ac) (ad) (bc) (bd) (cd) *enthält.* Contravarianten, Zwischenformen etc. erhält man, indem man einige der Symbole α, β, γ, δ, ... als Repräsentanten von Ebenencoordinaten annimmt.

Sind insbesondere a, b, c, d Symbole ein und derselben Form a_ξ^{3p}, so folgt, dass *die Punkte*

$$(ab)^2\,(ac)^2\,(ad)^2\,(bc)^2\,(bd)^2\,(cd)^2\,a_\xi^{3p-6}\,b_\xi^{3p-6}\,c_\xi^{3p-6}\,d_\xi^{3p-6}=0$$

auf der cubischen Normcurve ausgeschnitten werden durch die Hesse'sche Fläche

$$(\alpha\beta\gamma\delta)^2\alpha_x^{p-2}\beta_x^{p-2}\gamma_x^{p-2}\delta_x^{p-2}=0$$

der zu a_ξ^{3p} *gehörigen Fläche* $\alpha_x^p=0$.

17. Zu einer zweiten Formel giebt der symbolische Ausdruck

$$(\alpha\beta\gamma\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{B}_x-(\alpha\beta\gamma\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{A}_x$$

Veranlassung. Es ist nämlich nach (40)

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_x-\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_x &= \cdot\quad +D_{34}x_2+D_{42}x_3+D_{23}x_4,\\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_x-\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_x &= D_{43}x_1+\cdot\quad +D_{14}x_3+D_{31}x_4,\\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_x-\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_x &= D_{24}x_1+D_{41}x_2+\cdot\quad +D_{12}x_4,\\ \mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_x-\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_x &= D_{32}x_1+D_{12}x_2+D_{21}x_3+\cdot\ ,\end{aligned}$$

und folglich unter Benutzung von (31), (35b), (8) und (25a)

$$(49)\quad [(\alpha\beta\gamma\,\mathfrak{A})\mathfrak{B}_x-(\alpha\beta\gamma\,\mathfrak{B})\mathfrak{A}_x]=\begin{vmatrix}(a\varkappa)^3 & (a\lambda)^3 & (a\mu)^3 & (a\nu)^3\\ (b\varkappa)^3 & (b\lambda)^3 & (b\mu)^3 & (b\nu)^3\\ (c\varkappa)^3 & (c\lambda)^3 & (c\mu)^3 & (c\nu)^3\\ \varkappa_\xi^3 & \lambda_\xi^3 & \mu_\xi^3 & \nu_\xi^3\end{vmatrix}$$
$$=-\Delta^2(ab)(bc)(ca)a_\xi b_\xi c_\xi.$$

Sind insbesondere α, β, γ Symbole einer Form zweiter Ordnung, welche der binären Form a_ξ^6 beigeordnet ist, so hat man:

$$[(\alpha\beta\gamma\mathfrak{A})\mathfrak{B}_x - (\alpha\beta\gamma\mathfrak{B})\mathfrak{A}_x][(\alpha\beta\gamma\mathfrak{A}')\mathfrak{B}_x' - (\alpha\beta\gamma\mathfrak{B}')\mathfrak{A}_x'] = \Delta^4(ab)^2(bc)^2(ca)^2 a_\xi^2 b_\xi^2 c_\xi^2,$$

und hieraus leitet man sofort den Satz ab, welchen Herr Meyer (a. a. O. p. 201) über die Construction der Punkte

$$(ab)^2(bc)^2(ca)^2 a_\xi^2 b_\xi^2 c_\xi^2 = 0$$

ausgesprochen hat; denn man kann setzen:

$$[(\alpha\beta\gamma\mathfrak{A})\mathfrak{B}_x - (\alpha\beta\gamma\mathfrak{B})\mathfrak{A}_x][(\alpha\beta\gamma\mathfrak{A}')\mathfrak{B}_x' - (\alpha\beta\gamma\mathfrak{B}')\mathfrak{A}_x'] = \tau(\alpha\beta\gamma u)^2,$$

wenn u die im Nullsystem (35) zu x gehörige Ebene und τ einen unbestimmten Factor bezeichnet.

18. Auch die Determinante $(\alpha\beta\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ lässt sich einfach durch einen binären Ausdruck ersetzen. Macht man nämlich in Gleichung (16a) $\xi_1 = a_2$, $\xi_2 = -a_1$, $\eta_1 = b_2$, $\eta_2 = -b_1$, so folgt mit Rücksicht auf (9a):

$$9\Delta^2(ab)^3 = \begin{vmatrix} 0 & D_{21} & D_{31} & D_{41} & (a\varkappa)^3 \\ D_{12} & 0 & D_{32} & D_{42} & (a\lambda)^3 \\ D_{13} & D_{23} & 0 & D_{43} & (a\mu)^3 \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & 0 & (a\nu)^3 \\ (b\varkappa)^3 & (b\lambda)^3 & (b\mu)^3 & (b\nu)^3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Berechnung der Determinante rechts giebt ein Aggregat von sechs Termen, von welchen einer ist

$$[(a\varkappa)^3(b\lambda)^3 - (b\varkappa)^3(a\lambda)^3] D_{43}(D_{12}D_{34} + D_{13}D_{42} + D_{14}D_{23}) = 3\Delta D_{43}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2).$$

Folglich wird:

$$\sum(\alpha_i\beta_k - \beta_i\alpha_k)D_{lm} = (\alpha\beta\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 3\Delta(ab)^3. \tag{50}$$

Es ist also auch

$$9\Delta^2(ab)^6 = (\alpha\beta\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\alpha\beta\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'),$$

und hieraus fliesst der Satz:

*Verschwindet die Invariante $(ab)^6$ einer durch sechs Punkte einer cubischen Raumcurve dargestellten Form a_ξ^6, so ist die dieser Form beigeordnete Eläche zweiter Ordnung in Involution zu dem fundamentalen linearen Complexe.**)

*) Ueber den Begriff dieser involutorischen Lage vergl. Pasch, Crelle's Journal, Bd. 75, p. 144, sowie meinen Aufsatz über projectivische Behandlung der Mechanik starrer Körper in Bd. VII dieser Annalen, p. 63f.

Es sei hier gelegentlich bemerkt, dass sich die Invariante $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')$ des linearen Complexes selbst ebenfalls leicht als binäre Bildung darstellen lässt. Es ist nämlich nach (10)

$$(51) \qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}') = 2(D_{12}D_{34} + D_{13}D_{42} + D_{14}D_{23}) = 6\Delta.$$

19. Andere Relationen ergeben sich, wenn man die Symbole der in Nr. 9 betrachteten Flächen zweiter Ordnung bez. Classe in die quaternären Ausdrücke eingehen lässt. Wir beschränken uns hier auf einen solchen Fall, indem wir die Bildung

$$\alpha_\varrho \beta_\sigma \gamma_\tau (\varrho \sigma \tau x)$$

betrachten. Ist insbesondere $\alpha = \beta = \gamma = u$, so stellt dieselbe, gleich Null gesetzt, diejenige Ebene dar, welche von den drei Polen der Ebene u in Bezug auf die Flächen $u_\varrho^2 = 0$, $u_\sigma^2 = 0$, $u_\tau^2 = 0$ bestimmt wird. Man hat nach (31), (38a) und (45a)

$$(\varrho \sigma \tau x)\alpha_\varrho \beta_\sigma \gamma_\tau = \begin{vmatrix} k_\xi^3 & l_\xi^3 & m_\xi^3 & n_\xi^3 \\ K_1 & L_1 & M_1 & N_1 \\ K_2 & L_2 & M_2 & N_2 \\ K_3 & L_3 & M_3 & N_3 \end{vmatrix},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$K_1 = (a\varkappa)^3 T_{11}(\eta,\eta) + (a\lambda)^3 T_{12}(\eta,\eta) + (a\mu)^3 T_{13}(\eta,\eta) + (a\nu)^3 T_{14}(\eta,\eta),$$
$$K_2 = (b\varkappa)^3 T_{11}(\eta,\xi) + (b\lambda)^3 T_{12}(\eta,\xi) + (b\mu)^3 T_{13}(\eta,\xi) + (b\nu)^3 T_{14}(\eta,\xi),$$
$$K_3 = (c\varkappa)^3 T_{11}(\xi,\xi) + (c\lambda)^3 T_{12}(\xi,\xi) + (c\mu)^3 T_{13}(\xi,\xi) + (c\nu)^3 T_{14}(\xi,\xi), \text{ etc.}$$

Aus (14) folgt durch Polarenbildung

$$k_\xi^2 k_\zeta \varkappa_\eta^3 + l_\xi^2 l_\zeta \lambda_\eta^3 + m_\xi^2 m_\zeta \mu_\eta^3 + n_\xi^2 n_\zeta \nu_\eta^3 = \Delta(\xi\eta)^2(\xi\eta).$$

Hierin ersetzen wir ξ_1 durch k_2', ξ_2 durch $-k_1'$, η_2 durch a_1, η_1 durch $-a_2$, ξ durch η und multipliciren mit k_η'; dann wird die linke Seite gleich K_1 und folglich

$$K_1 = \Delta(ak)^2 a_\eta k_\eta,$$

und ebenso:

$$L_1 = \Delta(al)^2 a_\eta l_\eta, \quad M_1 = \Delta(am)^2 a_\eta m_\eta, \quad N_1 = \Delta(an)^2 a_\eta n_\eta,$$
$$K_2 = \Delta(bk)^2(b_\eta k_\zeta + b_\zeta k_\eta), \quad K_3 = \Delta(ck)^2 c_\zeta k_\zeta,$$
$$L_2 = \Delta(bl)^2(b_\eta l_\zeta + b_\zeta l_\eta), \quad L_3 = \Delta(cl)^2 c_\zeta l_\zeta, \text{ etc.}$$

Es wird somit

$$\alpha_\varrho \beta_\sigma \gamma_\tau (\varrho \sigma \tau x) = (U + V)\Delta^3,$$

wenn U die Determinante bezeichnet, deren erste Verticalreihe durch die Elemente

$$k_\xi^3, \quad (ak)^2 a_\eta k_\eta, \quad (bk)^2 b_\eta k_\zeta, \quad (ck)^2 c_\zeta k_\zeta$$

ausgefüllt ist, während V aus U entsteht, indem man in der dritten Horizontalreihe η mit ζ vertauscht.

Um U weiter zu reduciren, gehen wir von der Identität (9) aus, d. h. hier

$$\sum \pm k_\xi^3 l_\varepsilon^3 m_\pi^3 n_\vartheta^3 = -9\Delta(\xi\varepsilon)(\xi\pi)(\xi\vartheta)(\varepsilon\pi)(\varepsilon\vartheta)(\pi\vartheta).$$

Aus ihr finden wir durch Polarenbildung die Determinante

$$\sum \pm k_\zeta^3 l_\varepsilon^2 l_\eta m_\pi^2 m_\zeta n_\vartheta^2 n_\zeta,$$

und es ergiebt sich U, wenn im Resultate beiderseits

$$\varepsilon_1 = a_2, \quad \varepsilon_2 = -a_1, \quad \pi_1 = b_2, \quad \pi_2 = -b_1,$$
$$\vartheta_1 = c_2, \quad \vartheta_2 = -c_1,$$

gesetzt und mit a_η, b_η, c_ζ multiplicirt wird. Der so entstehende Ausdruck würde ziemlich complicirt werden; zur Vereinfachung nehmen wir an, dass α, β, γ äquivalente Symbole ein und derselben quaternären, also a, b, c ebenfalls äquivalente Symbole ein und derselben binären Form seien. Dann verschwindet unsere Determinante nicht nur für $\pi = \vartheta$, sondern auch für $\eta = \zeta$; somit bleiben nur Glieder stehen, welche sowohl den Factor $(\eta\zeta)$ als den Factor $(\pi\vartheta)$ enthalten, und es wird

$$\sum \pm k_\xi^3 l_\varepsilon^2 l_\eta m_\pi^2 m_\zeta n_\vartheta^2 n_\zeta = -9\Delta(\eta\zeta)(\pi\vartheta)\{2(\xi\varepsilon)(\varepsilon\zeta)(\xi\vartheta)(\xi\pi) + (\xi\varepsilon)(\xi\pi)(\varepsilon\vartheta)(\xi\zeta) + (\xi\varepsilon)(\varepsilon\pi)(\xi\zeta)(\xi\vartheta)\},$$

folglich

$$U = -9\Delta(\eta\zeta)(bc)a_\xi\{[(ac)b_\xi + (ab)c_\xi](\xi\zeta) - 2a_\zeta b_\xi c_\xi\} a_\eta b_\eta c_\zeta.$$

Vertauscht man b mit c und addirt den neuen Ausdruck zu U hinzu, so wird

$$U = -9\Delta(\eta\zeta)^2(bc)^2 a_\xi a_\eta \{(ac)(\xi\zeta) - a_\zeta c_\xi\} b_\xi.$$

Hieraus findet man V indem man gleichzeitig η mit ζ und a mit c vertauscht und das Vorzeichen ändert, also:

$$V = -9\Delta(\eta\zeta)^2(ba)^2 c_\xi c_\zeta \{(ac)(\xi\eta) + c_\eta a_\xi\} b_\xi,$$

und

$$U + V = -9\Delta(\eta\zeta)^2(bc)^2(ac)\{a_\eta(\xi\zeta) - a_\zeta(\xi\eta)\} a_\xi b_\xi$$
$$= -9\Delta(\eta\zeta)^3(bc)^2(ac)\, a_\xi^2 b_\xi,$$

also endlich

$$(\varrho\sigma\tau x)\,\alpha_\varrho \beta_\sigma \gamma_\tau = 9(\eta\zeta)^3\Delta^4(ab)^2(ac)\; b_\xi c_\xi^2. \tag{52}$$

Die Formel hat Gültigkeit, wenn α, β, γ einander äquivalente Symbole ein und derselben quaternären Form sind.

Seien insbesondere $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i$ die Coordinaten einer Ebene u,

also a, b, c Symbole einer cubischen Form a_ξ^3, so folgt aus (52) die von Herrn Sturm*) gefundene Construction der cubischen Covariante von a_ξ^3, wenn letztere Form durch drei Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung dargestellt wird. Hiermit ist dann auch indirect von Neuem die von Herrn Appell**) gegebene Construction der Hesse'schen Covariante abgeleitet. Eine directe Ableitung solcher Constructionen und Sätze, welche sich auf binäre Formen von der Ordnung $3p+1$ oder $3p+2$ beziehen, scheint mittelst unserer Methode überhaupt nicht thunlich oder nur auf Umwegen erreichbar zu sein (vgl. das in Nr. 14 Gesagte); wir gehen deshalb hier auch nicht mehr auf die zahlreichen interessanten Sätze über Systeme von binären Formen *vierter* Ordnung ein, welche man den Herren Sturm (l. c.) und Voss***) verdankt.

Freiburg i. Br., den 20. Juli 1883.

---

*) Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve, Crelle's Journal Bd. 86, 1879, p. 125.

**) Annales de l'Ecole normale, 1876, vgl. Sturm, l. c.

***) Ueber vier Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung, Math. Annalen Bd. XIII, 1878, p. 168, und: Ueber Raumcurven und Developpabele, ib. p. 232. Vergl. auch F. Meyer, op. cit. p. 110ff. und p. 272ff.

[Anm. Erst nachträglich bemerke ich, dass die in § III gegebenen Entwicklungen, insbesondere die Formeln (35), (36) und (38) sich auch in einem Aufsatze des Herrn d'Ovidio finden (Studio sulle cubiche gobbe, Memorie della R. Accademia di Torino, 1879, Serie II, t. 32); sie erscheinen daselbst aber nicht als Folgen der allgemeinen Relationen, welche wir in § II aufstellten und welche den Vortheil bieten, dass man die Verallgemeinerung auf mehr Dimensionen sofort übersieht. Herr d'Ovidio beweist auch die von den Herren Sturm und Voss gefundenen Resultate theilweise aufs Neue.

Königsberg i. Pr., den 10. November 1883.]

Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methoden.

Von

R. Mehmke in Stuttgart.

Bei der rechnerischen Auswerthung des Trägheitsmomentes von materiellen Flächen und Körpern bediente man sich bis jetzt meines Wissens ausschliesslich der gewöhnlichen Coordinatenmethoden. Es scheint nämlich der Anwendung neuerer Hülfsmittel — ich habe besonders die Möbius-Grassmann'schen Methoden im Auge — die weitverbreitete Ansicht entgegenzustehen, dass derartige „symbolische" Methoden wohl bisweilen zur Ableitung „allgemeiner" Resultate geeignet seien, dass man jedoch bei speciellen Problemen, namentlich metrischer Natur, am besten thue, zu den altgewohnten Coordinatenmethoden seine Zuflucht zu nehmen. Im Laufe einer letzten Winter gehaltenen Vorlesung über „Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf Mechanik" habe ich mich nun überzeugt, dass die Methoden der Ausdehnungslehre, wie auf allen übrigen Gebieten der Mechanik, so auch bei der Bestimmung von Schwerpunkten, Trägheitsmomenten u. s. w. mit grösstem Vortheil verwendet werden können. Von einer grossen Zahl von Beispielen, die ich mittheilen könnte, gebe ich im Folgenden zur Probe die Bestimmung des Trägheitsmomentes für die homogene *Strecke*, das homogene *Dreieck* und *Tetraeder* oder eigentlich das analoge Gebilde im Raume von $(n-1)$ Dimensionen. Uebrigens besitze ich gerade dieses Beispiel seit etwa drei Jahren. Ein bemerkenswerther Unterschied zwischen der hier angewendeten und der sonst üblichen Coordinatenmethode besteht darin, dass man gewöhnlich nicht, wie im Folgenden geschehen wird, das Trägheitsmoment sofort in Bezug auf eine ganz beliebige Axe, sondern zunächst in Bezug auf einige Axen von specieller Lage bestimmt und aus den gefundenen speciellen Resultaten erst das allgemeine zusammensetzt. Es tritt hier sogar die Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment genommen wird, ganz in Hintergrund, indem das einzige Integral, welches man auszuführen hat, jene Axe gar nicht enthält.

1.

Vorbemerkungen.

Es werde zuerst bemerkt, dass man in der Ausdehnungslehre den geometrischen Grundgebilden — Punkten, Geraden, Ebenen — Zahlencoefficienten als „*metrische Werthe*“ beilegt und dementsprechend zwei solche Gebilde erst dann als gleich betrachtet, wenn sie ausser gleicher Lage auch gleiche Coefficienten oder Masswerthe besitzen.

Nach Möbius werden mit Coefficienten versehene Punkte gerade so addirt, wie man in der Mechanik materielle Punkte zu ihrem Schwerpunkt zusammensetzt. D. h. zwei Punkte a und b mit den Coefficienten λ und μ geben zur Summe denjenigen Punkt mit dem Coefficienten $(\lambda + \mu)$, welcher die Strecke ab im Verhältniss $\mu : \lambda$ theilt. In dem besonderen Falle $\lambda + \mu = 0$ erhält man den unendlich fernen Punkt der Geraden ab mit dem Coefficienten Null. Es ist jedoch erlaubt und vortheilhaft, die Punktdifferenz $(b - a)$ durch die (nach Länge und Richtung aufgefasste) Strecke von a nach b zu ersetzen.

Das „äussere“ Product einer Geraden A und eines Punktes x giebt, wenn beide den Coefficienten 1 besitzen, die Verbindungsebene beider mit einem Coefficienten gleich dem Abstand des Punktes von der Geraden.

Das „innere“ Product zweier Ebenen B und Γ — geschrieben $\mathsf{B}|\Gamma$ — ist gleich dem Product aus ihren metrischen Werthen und dem cos des von ihnen gebildeten Flächenwinkels. So z. B. ist $Ax|Ax$ gleich dem Quadrat des metrischen Werthes von Ax, also nach dem Obigen gleich dem Quadrat der Entfernung des Punktes x von der Geraden A; ferner ist $Ay|A\varepsilon$, wenn y und ε zwei beliebige Punkte mit dem Coefficienten 1 bedeuten, gleich dem Product der Entfernungen dieser Punkte von der Geraden A, noch multiplicirt mit dem cos des Winkels, welchen die Ebenen Ay und $A\varepsilon$ einschliessen.

Soll nun das Trägheitsmoment eines materiellen Gebildes in Bezug auf eine beliebige Axe A bestimmt werden, so zerlege man das betreffende Gebilde, wie gewöhnlich, in Elemente. Sei x ein Punkt eines jener Elemente, dm die Masse des letzteren. Wofern man A sowohl als x den Masswerth 1 beilegt, so ist, wie schon bemerkt, $Ax|Ax$ das Quadrat des Abstandes von A und x, folglich wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$T = SAx|Ax \cdot dm.$$

In diesem Ausdruck können wir den zweimal auftretenden Punkt x gewissermassen heraussetzen und an den Stellen, wo x vorher stand, eine Lücke lassen:

$$T = (SA()|A()dm)\, x^2.$$

Da jedoch die Axe A bei der vorzunehmenden Summation (Integration) constant ist, so kann man auch schreiben

$$T = (A()|A()) \cdot Sx^2\,dm.$$

Es erscheint jetzt das Trägheitsmoment als Product des constanten „Lückenausdrucks"

$$L = A()|A()$$

mit dem, die Drehaxe A nicht mehr enthaltenden Integrale

$$P = Sx^2\,dm.$$

Auf die Ermittelung des letzteren Integrales kommt es stets in erster Linie an. Ist P bestimmt, so braucht man ja, um T zu finden, nur mit dem Lückenausdruck L zu multipliciren, was immer leicht auszuführen ist, wenn man berücksichtigt, dass für zwei beliebige Punkte y und z

$$(A()|A()) \cdot yz = (A()|A()) \cdot zy = Ay|Az = Az|Ay$$

wird. (S. A_2*), Nr. 353—364).

Wie Grassmann gezeigt hat (A_2, Nr. 360—364), befolgen die in einen Lückenausdruck einzusetzenden Grössen die Gesetze der algebraischen Multiplication; x^2 ist daher ein algebraisches Punktquadrat, der doppelt zu denkende Punkt x. Das Integral $Sx^2\,dm$ könnte daher etwa, als Summe von (unendlich vielen) Punktquadraten, eine quadratische Punktgrösse genannt werden. Dasselbe hat zunächst blos formale Bedeutung, erlangt jedoch einen realen Werth, sobald man es mit einem Lückenausdruck multiplicirt, dessen Lücken es auszufüllen geeignet ist.

Uebrigens stösst man nicht blos bei der Berechnung des Trägheitsmomentes auf das Integral $Sx^2\,dm$. Dasselbe hat vielmehr eine allgemeinere, sehr fundamentale Bedeutung. Es giebt z. B. einen Lückenausdruck, mit welchem multiplicirt, das Integral sofort die Energie des Körpers (materiellen Gebildes) bei einer beliebigen Schraubenbewegung liefert; ein gewisser anderer Lückenausdruck hat die Eigenschaft, das Integral in die mechanische Summe der Elementarkräfte zu verwandeln, welche durch eine gegebene Schraubenbewegung des Körpers hervorgerufen werden; auch gelangt man sehr leicht von jenem Integral zu dem von Hesse eingeführten „imaginären Bilde" des Körpers sowie zu den verschiedenen Arten von Trägheitsellipsoiden. Ich kann hierauf an dieser Stelle nicht weiter eingehen, sondern muss mich vorläufig auf die obigen Andeutungen beschränken.

*) Wie üblich, soll Grassmann's „Lineale Ausdehnungslehre" von 1844 mit A_1, diejenige von 1862 mit A_2 angeführt werden.

2.

Ausführung des Integrales $Sx^2\,dm$ für ein homogenes $(n-1)$ dimensionales n-Eck.

Statt für die Strecke, das Dreieck oder Tetraeder, bestimmen wir das Integral Sx^2dm sogleich für einen mit homogener Masse erfüllten Theil eines Raumes von $(n-1)$ Dimensionen, welcher durch n beliebige (nicht in einem Raum niederer Dimension enthaltene) Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und die sie verbindenden Räume $(n-2)$ter Dimension begrenzt ist. Sei x ein Punkt dieses $(n-1)$-fach ausgedehnten Körpers; er trage, ebenso wie die Punkte a, den Coefficienten 1. Dann lässt x sich aus den Punkten a linear ableiten (A_1, §§ 107, 110) d. h. in der Form darstellen

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

wobei der über die Coefficienten gemachten Voraussetzung zufolge

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

ist.

Es wird

$$Sx^2 dm = S(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)^2\, dm$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} a_i a_k \cdot S\lambda_i \lambda_k\, dm,$$

wobei die Integrale der rechten Seite über den betrachteten Körper auszudehnen sind. Jene Integrale sind in dem allgemeineren enthalten

$$S\lambda_1^{\mu_1}\lambda_2^{\mu_2}\cdots\lambda_n^{\mu_n}\,dm.$$

Um letzteres auszuwerthen, bevorzugen wir eine der Ecken, etwa a_1, und schreiben unter Benützung von $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_n$:

$$x = a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_1) + \cdots + \lambda_n(a_n - a_1).$$

Nun zerlegen wir den Körper in Elemente durch $(n-2)$dimensionale Räume, welche je zu $(n-2)$ der von a_1 ausgehenden Kanten a_1a_2, a_1a_3, $\cdots$, a_1a_n parallel sind. Das an x anstossende Element, das $(n-1)$dimensionale Analogon eines Parallelepipeds im gewöhnlichen Raum, hat die von x ausgehenden Kanten

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_2}\, d\lambda_2 = (a_2 - a_1)\, d\lambda_2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_3}\, d\lambda_3 = (a_3 - a_1)\, d\lambda_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_n}\, d\lambda_n = (a_n - a_1)\, d\lambda_n,$$

zu welchen die übrigen Kanten parallel sind.

Der Inhalt des fraglichen Elementes ist daher (A_1, §§ 36, 109):

$$[a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)]\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \cdots d\lambda_n$$
$$= [a_1 a_2 \cdots a_n]\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \cdots d\lambda_n.$$

Nun ist $[a_1 a_2 \cdots a_n]$ das $(n-1)!$ fache von dem Inhalt des in Rede stehenden Körpers (A_1, § 111); wenn folglich dm die Masse des an x stossenden Elementes, m diejenige des ganzen Körpers, σ die specifische Masse bedeutet, so hat man

$$dm = \sigma[a_1 a_2 \cdots a_n]\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \cdots d\lambda_n,$$
$$(n-1)!\, m = \sigma[a_1 a_2 \cdots a_n],$$

also

$$dm = (n-1)!\, m\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \cdots d\lambda_n.$$

Daher wird

$$S\lambda_1^{\mu_1}\lambda_2^{\mu_2}\cdots\lambda_n^{\mu_n}\, dm$$
$$= (n-1)!\, m S(1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_n)^{\mu_1}\lambda_2^{\mu_2}\cdots\lambda_n^{\mu_n}\, d\lambda_2 \cdots d\lambda_n.$$

Um die Grenzen des Integrales zu bestimmen, bemerke man, dass x dann und nur dann innerhalb des fraglichen Körpers liegt, wenn die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ sämmtlich positiv sind (A_1, § 110). Das obige Integral ist daher über alle positiven Werthe der Integrationsveränderlichen zu erstrecken, für welche

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_n > 0$$

ist.

Nach einem bekannten Satz von Liouville ist nun (s. Meyer, bestimmte Integrale, S. 591) unter den eben angegebenen Bedingungen

$$S(1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_n)^{\mu_1}\lambda_2^{\mu_2}\cdots\lambda_n^{\mu_n}\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \cdots d\lambda_n$$
$$= \frac{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_n!}{(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n+n-1)!}.$$

Mithin erhalten wir

$$S\lambda_1^{\mu_1}\lambda_2^{\mu_2}\cdots\lambda_n^{\mu_n}\, dm = \frac{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_n!\,(n-1)!}{(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n+n-1)!}\, m.$$

Hieraus folgt insbesondere

$$S\lambda_i^2\, dm = \frac{2m}{n(n+1)},$$
$$S\lambda_i\lambda_k\, dm = \frac{m}{n(n+1)}.$$

Das gesuchte Integral ist demnach

$$Sx^2\, dm = \frac{m}{n(n+1)}\left(2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i,k=1}^{n} a_i a_k\right),$$

wo in der zweiten Summe i und k stets von einander verschieden sein müssen.

Die quadratische Punktgrösse $Sx^2 dm$ erscheint hier als Summe von n Punktquadraten a_i^2 und $\frac{n(n-1)}{2}$ Punktepaaren $a_i a_k$. Dieselbe wird nachher auf eine Summe von $(n+1)$, resp. n Punktquadraten zurückgeführt werden.

3.

Trägheitsmoment der homogenen Strecke, des Dreiecks und Tetraeders.

Durch Specialisirung des soeben gefundenen Resultates erhält man für die Strecke $(n = 2)$

$$Sx^2\, dm = \frac{m}{3}(a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2),$$

für das Dreieck $(n = 3)$

$$Sx^2\, dm = \frac{m}{6}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2),$$

endlich für das Tetraeder $(n = 4)$

$$Sx^2\, dm = \frac{m}{10}(a_1^2 + \cdots + a_4^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_3 a_4).$$

Um schliesslich die gesuchten Trägheitsmomente zu erhalten, müssen, wie schon bekannt, die obigen Ausdrücke mit dem Lückenausdruck $L = A()|A()$ multiplicirt werden. Da

$$La_i^2 = Aa_i|Aa_i, \quad La_i a_k = Aa_i|Aa_k,$$

so ist das Ergebniss folgendes:

Bedeutet α_i den Abstand der Ecke a_i einer homogenen Strecke resp. eines homogenen Dreiecks oder Tetraeders mit der Masse m von einer beliebigen Axe A, φ_{ik} den von den Ebenen Aa_i und Aa_k eingeschlossenen Winkel, so ist in Bezug auf jene Axe das Trägheitsmoment

der *Strecke* gleich

$$\frac{m}{3}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 \cos\varphi_{12}),$$

des *Dreiecks* gleich

$$\frac{m}{6}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3 \cos\varphi_{23} + \cdots + \alpha_1\alpha_2 \cos\varphi_{12}),$$

des *Tetraeders* gleich

$$\frac{m}{10}(\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_4^2 + \alpha_1\alpha_2\cos\varphi_{12} + \alpha_1\alpha_3\cos\varphi_{13} + \cdots + \alpha_3\alpha_4\cos\varphi_{34}).$$

Es lassen sich aber viel einfachere Ausdrücke aufstellen. Gehen wir zur Betrachtung des $(n-1)$ dimensionalen n-Ecks zurück. Es wurde für dasselbe gefunden

$$Sx^2 dm = \frac{2m}{n(n+1)}(a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n).$$

Ist nun s der Schwerpunkt des Körpers (zugleich der Schwerpunkt seiner n Ecken), so hat man

$$ns = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

also

$$n^2s^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_{n-1}a_n,$$

oder

$$2(a_1a_2 + \cdots + a_{n-1}a_n) = n^2s^2 - (a_1^2 + \cdots + a_n^2).$$

Folglich wird

$$Sx^2\,dm = \frac{m}{n(n+1)}\,(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + n^2s^2).$$

Hieraus folgt für $n = 2, 3$ und 4:

Ist σ der Abstand des Schwerpunktes einer homogenen Strecke, resp. eines homogenen Dreiecks oder Tetraeders von einer beliebigen Axe und bedeutet, wie früher, a_i den Abstand der Ecke a_i von derselben Axe, m die Masse der Strecke, resp. des Dreiecks oder Tetraeders, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf jene Axe

für die Strecke:

$$= \frac{m}{6}\,(a_1^2 + a_2^2 + 4\sigma^2),$$

für das Dreieck:

$$= \frac{m}{12}\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 9\sigma^2),$$

für das Tetraeder:

$$= \frac{m}{20}\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 16\sigma^2).$$

Nach einem Satz von Reye (s. Schlömilch's Zeitschrift Bd. X) kann jeder Körper auf mannigfache Arten durck vier materielle Punkte (eine ebene materielle Fläche durch drei, eine materielle Strecke durch zwei solche) ersetzt werden, welche ihm hinsichtlich des Trägheitsmomentes in Bezug auf jede beliebige Axe äquivalent sind. Unter den bei (der Strecke, resp.) dem Dreieck und Tetraeder sich ergebenden Reductionen giebt es (eine resp.) zwei besonders bemerkenswerthe, die noch angeführt werden sollen. Der erwähnte Reye'sche Satz beruht auf der Thatsache, dass in einem Gebiet von $(n-1)$ Dimensionen eine quadratische Punktgrösse, wie z. B. das Integral Sx^2dm, auf unzählige Arten durch eine Summe von n Punktquadraten ersetzt werden kann.

Versuchen wir die Reduction von Sx^2dm, indem wir n Punkte $b_1, b_2, \cdots, b_n$ durch die Gleichungen einführen

$$(1+\lambda)\,b_i = a_i + \lambda s, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Durch Quadriren erhält man

$$(1+\lambda)^2 b_i^2 = a_i^2 + 2\lambda a_i s + \lambda^2 s^2,$$

also

$$(1+\lambda)^2 \sum b_i^2 = \sum a_i^2 + 2\lambda \sum a_i s + n\lambda^2 s^2.$$

Da jedoch

$$ns = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

also

$$\sum a_i s = ns^2$$

ist, so hat man

$$(1+\lambda)^2 \sum b_i^2 = \sum a_i^2 + (2n\lambda + n\lambda^2)\, s^2.$$

Die rechte Seite stimmt mit

$$\sum a_i^2 + n^2 s^2$$

überein, wenn

$$n\lambda^2 + 2n\lambda = n^2$$

oder

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1+n}$$

ist.

Setzt man also

$$\pm\sqrt{1+n}\cdot b_i = a_i + (-1 \pm \sqrt{1+n})\, s,$$

oder

$$b_i = s \pm \frac{a_i - s}{\sqrt{1+n}},$$

so ergiebt sich

$$Sx^2 dm = \frac{m}{n(n+1)}\left(\sum a_i^2 + n^2 s^2\right) = \frac{m}{n}\,(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Der betrachtete $(n-1)$ fach ausgedehnte Körper ist also den n Massenpunkten $b_1, b_2 \cdots b_n$ äquivalent, wobei sich diese Punkte in die ganze Masse des Körpers gleichmässig zu theilen haben.

Für $n = 2$ z. B. erhält man als eines der Punktepaare, durch welches die homogene materielle Strecke $a_1 a_2$ ersetzt werden kann

$$b_1 = s + \frac{a_1 - s}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\, a_1 + (\sqrt{3}-1)\, a_2}{2\sqrt{3}},$$

$$b_2 = s + \frac{a_2 - s}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\, a_1 + (\sqrt{3}+1)\, a_2}{2\sqrt{3}}.$$

Die Punkte b liegen also symmetrisch zur Mitte und theilen die Strecke $a_1 a_2$ im Verhältniss $(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)$.

Setzt man ferner $n = 3$ und nimmt in dem Ausdruck für b_i das untere Zeichen, so kommt

$$b_i = s - \frac{a_i - s}{2} = \frac{3s - a_i}{2},$$

oder da

$$3s = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$b_i = \frac{a_{i+1} + a_{i+2}}{2}.$$

Die Punkte b_i sind daher in diesem Fall die Seitenmitten des Dreiecks $a_1 a_2 a_3$. Also: *Das Trägheitsmoment eines homogenen Dreiecks in Bezug auf eine beliebige Axe ist gleich dem Trägheitsmoment der Seitenmitten, wenn jeder von diesen ein Drittel der Masse des Dreiecks zuertheilt wird.*

Man findet diesen Satz in Schell's Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Auflage, I, S. 137*).

Wählt man in der Gleichung für b_i das obere Zeichen, so kommt (immer noch für $n = 3$)

$$b_i = s + \frac{a_i - s}{2} = \frac{s + a_i}{2},$$

d. h. b_i ist jetzt der Halbirungspunkt der Strecke $s a_i$. Also:

Ein homogenes Dreieck ist hinsichtlich des Trägheitsmomentes äquivalent den drei Punkten, welche die oberen Abschnitte seiner Schwerlinien halbiren, wenn diese Punkte je ein Drittel der Masse des Dreiecks erhalten.

Für $n = 4$ ergiebt sich:

$$b_i = s \pm \frac{a_i - s}{\sqrt{5}}.$$

Also: *Zieht man vom Schwerpunkt s eines Tetraeders nach seinen Ecken $a_1 \cdots a_4$ gerade Linien und trägt auf diesen von s aus nach beiden Seiten gewisse Strecken ab, nämlich auf $s a_i$ eine Strecke gleich $s a_i : \sqrt{5}$, so erhält man* (in den Endpunkten der abgetragenen Strecken) *zwei Systeme von je vier Punkten, welche dem* (mit homogener Masse erfüllt gedachten) *Tetraeder hinsichtlich des Trägheitsmomentes äquivalent sind.*

Stuttgart, Juli 1883.

---

*) Herr Klein hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass der vorhergehende Satz zuerst von Reye gefunden worden ist. (s. Reye, „Einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren", Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XIX). In einer Mittheilung („Einfache Darstellung der Trägheitsmomente von Körpern"), welche demnächst in Schlömilch's Zeitschrift erscheinen wird, stelle ich mehrere, den Reye'schen analoge Sätze für eine Anzahl von Körpern auf. (Bemerkung während des Drucks, November 1883).

Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

1. In dem endlichen Intervalle (a, b) sei eine beliebige Punktmenge x' definirt. Nun betrachte man ein System von Theilungen dieses Intervalles von der Art, dass jede durch Zerlegung der in der vorausgehenden vorkommenden Theilintervalle von (a, b) entsteht und zwar nach einem solchen Gesetze, dass von einer bestimmten Theilung $\mathfrak{T}_m$ angefangen alle folgenden das gegebene Intervall (a, b) in Theile zerlegen, deren jeder kleiner ist als eine vorgegebene Zahl δ. Führt man im Intervalle (a, b) ein System von unbegrenzt vielen solchen Theilungen: $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n, \ldots$ aus und zählt nach jeder Theilung diejenigen Intervalle zusammen, die Punkte der gegebenen Menge x' enthalten, so erhält man Streckensummen $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, welche der Relation genügen $S_1 \geqq S_2 \geqq \cdots \geqq S_n$. *Demnach existirt ein endlicher Grenzwerth* $\lim_{n=+\infty} S_n = L$, *wobei* $L \geqq 0$. Zugleich ist $S_n \geqq L$.

2. Die soeben definirte Zahl L ist von dem betrachteten Systeme von Theilungen $\mathfrak{T}_n$ unabhängig, so dass *zu jeder im Intervalle* (a, b) *befindlichen Punktmenge* x' *eine bestimmte Zahl* $L \geqq 0$ *gehört, welche ihre Intervallgrenze heissen mag.*

Wendet man anstatt des Systemes $\mathfrak{T}_n$ ein anderes von denselben Eigenschaften: $\mathfrak{T}_n'$ an, so ergiebt sich damit auf dem oben bezeichneten Wege eine Zahl $L' \geqq 0$, von der gezeigt werden kann, dass sie gleich L ist. Durch Vereinigung der Theilungen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_1'$; $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_2'$; $\ldots$; $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$ erhält man ein drittes System von Theilungen $\mathfrak{T}_n''$ mit dem Grenzwerthe L''. Dabei ist $S_n \geqq S_n''$, also $L \geqq L''$. Da $\lim S_n' = L''$ ($\lim n = +\infty$), so existirt eine bestimmte Theilung $\mathfrak{T}_m''$, so dass

$$L'' + \varepsilon > S_m'', \tag{1}$$

wie klein auch die positive Zahl ε sein mag. Die Theilung $\mathfrak{T}_m''$, welche sowohl die Theilpunkte von $\mathfrak{T}_m$ als auch die von $\mathfrak{T}_m'$ enthält, möge im Ganzen p Intervalle MN liefern, die Punkte der Menge x' enthalten.

Ihre Summe ist eben S_m''. Construirt man in (a, b) noch die Punkte der Theilungen $\mathfrak{T}_{m+1}, \mathfrak{T}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{T}_{m+r}$, so ergeben sich wieder diejenigen Intervalle, deren Summen oben mit $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots, S_{m+r}$ bezeichnet sind. Da ausserhalb der Intervalle MN kein Intervall der Summe S_{m+r} fallen kann, so folgt unmittelbar, wenn Δ_{m+r} das grösste Intervall, welches nach Ausführung der Theilung $\mathfrak{T}_{m+r}$ in (a, b) noch vorhanden ist, bedeutet:

$$S_m'' + 2p\Delta_{m+r} > S_{m+r} \geq L$$

und nach (1)

$$L'' + \varepsilon + 2p\Delta_{m+r} > L.$$

Nimmt man r so gross, dass

$$2p\Delta_{m+r} < \varepsilon,$$

so folgt

$$L'' + 2\varepsilon > L \geq L''$$

und somit $L'' = L$. Ebenso erschliesst man $L'' = L'$ somit $L = L'$.

3. Denkt man sich das Intervall (a, b) in beliebig viele Theile $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ getheilt, und die Summe S derjenigen gebildet, welche Punkte der Menge x' enthalten; so erscheint S als Function der Veränderlichen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ in unbegrenzter Anzahl, die mit Ausnahme der Relation

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_k = b - a \qquad (b > a)$$

von einander völlig unabhängig sind. Man sagt, eine solche Function nähert sich bei unbegrenzter Abnahme der δ_r einem endlichen Grenzwerthe L, falls zu jeder beliebigen positiven Zahl ε eine Zahl Δ gehört in der Art, dass immer $|S - L| < \varepsilon$, wenn nur jedes der Intervalle δ_r kleiner ist als Δ*).

Auch in dem hier betrachteten Falle hat man $\lim S = L$ für $\lim \delta_r = 0$. Es ist zweckmässig, bei dem Beweise dieses Satzes den Satz von Nr. 2 nicht als bekannt vorauszusetzen. Wir nehmen demnach nur an, dass der *einem* bestimmten Systeme von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$ entsprechende Grenzwerth L vorhanden sei, so dass für $n > m$

(2) $$L \leq S_n < L + \varepsilon.$$

Die Anzahl der in S_n zusammengefassten Intervalle der Theilung $\mathfrak{T}_n$ sei p_n, das kleinste der durch sie gelieferten Intervalle sei E_n, das grösste Δ_n. Für die zunächst beliebige Theilung $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ sollen p, E, Δ die analoge Bedeutung haben. Indem man n so gross nehmen kann, dass $\Delta_n \leq \mathsf{E}$, so folgt, dass jedes der Intervalle in S_n entweder vollständig innerhalb eines der in S vorkommenden liegt oder doch nur mit *einem* Ende über ein solches Intervall hinausragt. Es ist demnach sicher

(3) $$S_n < S + 2p\Delta_n$$

*) Vgl. diese Annalen Bd. XVIII, p. 270.

d. i. da Δ_n beliebig klein sein kann $L < S + \varepsilon$, also $L \leqq S$. Nehmen wir nunmehr an, dass $\Delta \leqq \mathsf{E}_n$, so ergiebt sich auf die nämliche Art

$$S < S_n + 2 p_n \Delta \tag{4}$$

und nach (2)

$$0 \leqq S - L < \varepsilon + 2 p_n \Delta.$$

Nimmt man n so gross an, dass (2) besteht und macht Δ so klein, dass sowohl $\Delta \leqq \mathsf{E}_n$ als auch $2 p_n \Delta < \varepsilon$ gilt, so folgt schliesslich, was zu beweisen war:

$$0 \leqq S - L < 2\varepsilon.$$

4. Diejenigen Punktmengen wozu der Grenzwerth $L = 0$ gehört, stimmen überein mit den von Herrn A. Harnack als *discret* bezeichneten Mengen*). Nach seiner Definition lassen sich die Punkte einer discreten Menge in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen, deren Summe $S < \varepsilon$. Es ist somit $L < \varepsilon$ d. i. $L = 0$.

Falls $L > 0$, kann man die Punktmenge nach Hrn. Harnack's Vorschläge passend als eine *lineare* bezeichnen. Unter denselben sind die in allen Theilen des Intervalles (a, b) überall-dichten Punktmengen durch den Grenzwerth $L = b - a$ charakterisirt.

5. Es ist offenbar, dass die in Nr. 1 angestellte Betrachtung auch auf *Punktmengen, die in einem ebenen, von einfachen Rändern begrenzten endlichen Flächenstücke* $\mathfrak{F}$ *sich befinden*, ausgedehnt werden kann. Wir schliessen $\mathfrak{F}$ durch gerade Linien ein, theilen dieses Polygon in *geradlinig begrenzte Zellen* und bilden die Summe derjenigen Zellen, welche Punkte der gegebenen Menge enthalten. Dann wird jedem Systeme von Theilungen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$, deren jeder Theilchen stets in einem Theile der vorhergehenden vollständig enthalten sind, ein endlicher Grenzwerth L entsprechen: $\lim_{n=+\infty} S_n = L$.

Nun ist zu zeigen, dass wenn $\mathfrak{F}$ auf beliebige Weise in Theile $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ zerlegt wird, die Summe S derjenigen Flächenstücke, welche Punkte der Menge enthalten, bei abnehmenden Δ_t einem endlichen Grenzwerthe $L \geqq 0$ zustrebe, welche man die *Flächengrenze der ebenen Punktmenge* nennen mag.

Würde man die Theile Δ_t durch Parallele zu zwei festen Geraden herstellen, so dass $\Delta_t = \delta_r \varepsilon_s \sin \omega$, so wäre nachzuweisen, dass jeder positiven Zahl ε Zahlen Δ, E zugeordnet werden können, in der Art, dass $|S - L| < \varepsilon$ wenn nur alle $\delta_r < \Delta$, und alle $\varepsilon_s < \mathsf{E}$. Es ist nicht schwierig, diesen Satz zu zeigen. Wir wollen aber etwas allgemeiner verfahren, indem wir bezüglich der Zellen Δ_t nur voraussetzen, dass sie gewöhnliche Polygone seien. Um auszudrücken, dass dieselben

*) Vergl. diese Annalen Bd. XIX, p. 238. — Herr P. du Bois-Reymond nennt sie „integrabel" (Allg. Functionentheorie I, p. 190) und erwähnt a. a. O., dass solche Punktmengen dem Satze in Nr. 2 genügen.

nach den beiden Dimensionen der Ebene unendlich klein werden, lassen wir den grössten Abstand b_t zweier Punkte des Umfanges der Zelle Δ_t unter jede Grösse sinken. Der Kürze halber mag die Länge b_t, die entweder eine Diagonale oder eine Seite des Polygones Δ_t sein muss, als die grösste Sehne desselben bezeichnet werden. Man wird leicht bemerken, dass die Fläche Δ_t jedenfalls kleiner ist als ein Quadrat von der Seite b_t: $\Delta_t < b_t^2$. Es soll nun gezeigt werden, dass jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\beta > 0$ entspricht in der Art, dass $|S - L| < \varepsilon$, *wenn nur die Theile Δ_t gewöhnliche Polygone sind, deren grösste Sehne kleiner als β ist.*

Ausgehend, wie in Nr. 3, von dem Grenzwerthe L, welcher *einem* Systeme von Theilungen $\mathfrak{T}_n$ entspricht, kann man wieder die Relation (2) ansetzen. Es seien ferner B_n die grösste Sehne aller durch die Theilung $\mathfrak{T}_n$ hervorgebrachten Stücke, E_n das kleinste unter ihnen, p_n die Anzahl der in S_n eintretenden Zellen, Q_n der Gesammtumfang derselben. Bezüglich einer zunächst willkürlichen Theilung $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k)$ haben B, E, p, Q die analoge Bedeutung, während q_t den Umfang einer Zelle Δ_t bezeichnen soll. Nimmt man n so gross an, dass sämmtliche der Theilung $\mathfrak{T}_n$ entsprechenden Stücke E an Grösse nicht übertreffen, so wird jedes derselben entweder völlig innerhalb eines der Stücke Δ_t liegen oder in ein, vielleicht auch in mehrere Δ_t eintreten, in keinem Falle aber zwei derselben vollständig überziehen. Es ist ferner klar, dass keine in S_n vorkommende Zelle ganz ausserhalb aller in S zusammengefassten Zellen Δ_t liegen kann und umgekehrt. — Von dem aus Theilen von Zellen, die zur Theilung $\mathfrak{T}_n$ gehören, gebildeten Saume, der eine Zelle Δ_t umgiebt, kann man behaupten, dass er unter der Grenze $\mathsf{B}_n q_t + \pi B_n^2$ liegt.*) Mithin ergiebt sich sofort die Relation

$$S_n < S + \mathsf{B}_n Q + \pi p \mathsf{B}_n^2, \tag{5}$$

und daraus nach (2) $L < S + \varepsilon$, da B_n beliebig klein gemacht werden kann. Es ist somit $L \leqq S$.

Setzt man nunmehr voraus, dass sämmtliche $\Delta_t \leqq \mathsf{E}_n$ seien, so kann man auf dieselbe Art schliessen:

$$S < S_n + \mathsf{B} Q_n + \pi p_n \mathsf{B}^2, \tag{6}$$

und ferner nach (2)

$$0 \leqq S - L < \varepsilon + \mathsf{B} Q_n + \pi p_n \mathsf{B}^2.$$

Hat man nun n so gross angenommen, dass die Relation (2) gilt, und

---

*) Um das einzusehen, denke man sich über den Seiten eines *convexen* Polygones Δ_t nach *aussen* Rechtecke von der Höhe B_n errichtet und verbinde ihre ausserhalb der Zelle Δ_t liegenden Ecken durch Kreisbögen vom Radius B_n, welche von den Ecken der Zelle zu beschreiben sind. — Die Relation gilt übrigens auch, falls das Polygon Δ_t nicht convex ist.

denkt sich B so klein, dass sowohl $\Delta_t < B^2 < E_n$ als auch $B Q_n + \pi p_n B^2 < \varepsilon$ sind, so folgt, wie oben, $0 \leqq S - L < 2\varepsilon$.*)

Ist die Flächengrenze L gleich Null, so wird die Punktmenge als *discret***); falls $L > 0$, als *eben* bezeichnet werden können.

6. Die Theilungen des Gebietes $\mathfrak{F}$ werden meist durch zwei Curvensysteme bewerkstelligt. Bezeichnen x, y Parallelcoordinaten, so setzt man

$$x = \varphi(p, q), \qquad y = \psi(p, q),$$

wobei p, ψ stetige Functionen von p, q sein sollen. Jedem Werthsysteme p, q entspricht *ein* System x, y und umgekehrt, so dass an Stelle des Gebietes $\mathfrak{F}$ ein anderes $\mathfrak{G}$ in p, q gesetzt werden kann. Die Paare p, q; $p + \Delta p, q$; $p, q + \Delta q$; $p + \Delta p, q + \Delta q$ bestimmen ein Viereck $M M' M'' M'''$. Damit die Seiten und Diagonalen desselben unter einer Zahl β liegen, braucht man nur für $|\Delta p|$, $|\Delta q|$ solche Grenzen A, B festzusetzen, dass die Differenzen der Coordinaten der eben genannten Punkte dem absoluten Betrage nach eine gewisse Zahl β' nicht erreichen. Sind $x\ y$, $x'\ y'$ u. s. w. die Coordinaten von M, M' u. s. w., so hat man

$$x' - x = \Delta p \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \varrho'(\Delta p) \right\}, \quad x'' - x = \Delta q \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \varrho''(\Delta q) \right\}$$

$$x''' - x = (x''' - x'' - x' + x) + (x'' - x) + (x' - x),$$

$$x''' - x'' - x' + x = \Delta p\, \Delta q \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} + X(\Delta p, \Delta q) \right\}.$$

Aus diesen Formeln wird man Grenzen A, B ableiten können, wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q}$ endliche Functionen im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}$ darstellen und wenn die Formeln

$$\lim_{\Delta p = 0} \varrho'(\Delta p) = 0, \qquad \lim_{\Delta q = 0} \varrho''(\Delta q) = 0, \qquad \lim_{\Delta p = 0,\ \Delta q = 0} X(\Delta p, \Delta q) = 0$$

in dem Sinne bestehen, dass ϱ', ϱ'', X sich jedem Grenzwerthe 0 *gleichmässig für alle Stellen* p, q *des Gebietes* $\mathfrak{G}$ nähern. Die genannten Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn die Functionen $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q}$ in dem Gebiete $\mathfrak{G}$ mit Einschluss seiner Begrenzung stetig sind.

Innsbruck, 26. Juli 1883.

---

*) Die hier benutzte Methode, die Existenz des Grenzwerthes L zu beweisen, ist auch zur strengen Begründung eines fundamentalen Satzes in der Theorie der Doppelintegrale (vgl. z. B. A. Harnack, Elemente der Differential- und Integralrechnung p. 310) brauchbar.

**) Dass der Begriff einer discreten Punktmenge in der Ebene der Begründung bedürfe und worauf es dabei im Wesentlichen ankomme, theilte mir schon vor einiger Zeit Herr C. Adler mit.

RADCLIFFE LIBRARY
UNIVERSITY
6 MAR
MUSEUM
OXFORD

Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades.

Von

A. Voss in Dresden.

Durch die Gleichung:

$$\sum y_i f_i = 0 \tag{1}$$

in welcher die f_i homogene Functionen n^{ter} Ordnung der Variabelen x_1, x_2, x_3 sind, zwischen denen die Identität:

$$\sum x_i f_i = 0 \tag{2}$$

besteht, wird jedem Punkte der Ebene eine durch ihn gehende Gerade (1), die *Tangente* des Systems, zugeordnet; x heisse ihr *Berührungspunkt.* Durch Differentiation der Identität (2) und mit Hülfe des Euler'schen Theorems erhält man die weiteren Identitäten:

$$\begin{aligned} f_k + \sum x_i f_{ik} &= 0, \\ -nf_k + \sum x_i f_{ki} &= 0, \\ \sum (x_i f_{ikl}) + f_{kl} + f_{lk} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

in welchen die Differentialquotienten durch Indices bezeichnet sind, so dass $f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $f_{ikl} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}$, etc. ist.*) Man hat also auch für beliebige y:

$$\begin{aligned} \sum x_i f_{ikl}\, y_k y_l \quad &+ 2 \sum y_l y_k f_{kl} \quad = 0, \\ \sum x_i f_{iklm}\, y_k y_l y_m &+ 3 \sum y_l y_k y_m f_{klm} = 0. \end{aligned}$$

*) Jedes Summenzeichen bezieht sich immer auf alle diejenigen Indices, welche doppelt unter demselben vorkommen.

Aus (3) folgt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} (n+1)f_1 &= x_2(f_{12}-f_{21}) + x_3(f_{13}-f_{31}),\\ (n+1)f_2 &= x_1(f_{21}-f_{12}) + x_3(f_{23}-f_{32}),\\ (n+1)f_3 &= x_1(f_{31}-f_{13}) + x_2(f_{32}-f_{23}) \end{aligned}$$

mithin:

$$f_1(f_{32}-f_{23}) + f_2(f_{13}-f_{31}) + f_3(f_{21}-f_{12}) = 0.$$

Das ist die Bedingung der Integrabilität der Differentialgleichung

$$(5)\qquad \sum f_i\,dx_i = 0.$$

Da dieselbe identisch erfüllt ist, so wird:

$$\mathsf{M}f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

und F ist eine homogene Function 0^{ter} Ordnung, $F = \text{const.}$ die Gleichung des der Gleichung (1) zugehörigen Curvensystems. Ein solches, im allgemeinen transcendentes System, das Integral der Differentialgleichung (5), hat Eigenschaften, welche auf's engste mit bekannten Eigenschaften der algebraischen Curven zusammenhängen. Dieselben sind von einem anderen Gesichtspunkte aus bereits in allgemeinerer Form von Clebsch und insbesondere in Bezug auf den hier vorliegenden Fall von Herrn Lindemann untersucht worden.*) Denn aus den Identitäten (4) ersieht man direct, dass sich die f_i in der Form

$$(6)\qquad \begin{aligned} f_1 &= x_2F_3 - x_3F_2,\\ f_2 &= x_3F_1 - x_1F_3,\\ f_3 &= x_1F_2 - x_2F_1 \end{aligned}$$

darstellen lassen, wobei nun die F_i beliebige homogene Functionen $n-1^{\text{ten}}$ Grades sein werden.**) Und durch Einführung von Liniencoordinaten u_i erhält man dann die Gleichung eines Connexes $[n-1, 1]$***)

$$\sum u_i F_i = 0.$$

So wie sich nun die geometrischen Verhältnisse des durch eine Differentialgleichung (5) definirten Systemes als Consequenz der Connextheorie ansehen lassen, so kann man andererseits dieselben auch als eine Erweiterung der bekannten Gesichtspunkte der algebraischen Curventheorie betrachten. Es schien mir nützlich, auch diesen Weg einzuschlagen, auf dem die wichtigsten Covarianten der Curventheorie

*) Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, p. 1001 u. ff.

**) Vgl. den Beweis des Herrn Darboux hierfür, Bull. des Sc. Math. 1878, p. 67.

***) Herr Lindemann untersucht den dualistisch entsprechenden Fall $[1, n-1]$.

eine anschauliche Bedeutung in der Lehre von solchen linearen Differentialgleichungen gewinnen. Resultate, die sich aus den Untersuchungen des Herrn Lindemann unmittelbar ergeben, habe ich nur kurz berührt, manche Analogien auch nur kurz angedeutet; Anwendungen der eigentlichen Charakteristikentheorie, wie sie von Herrn Fouret bereits in ausgiebiger Weise behandelt sind,*) ganz ausgeschlossen; im § 4 endlich habe ich einige Sätze über algebraische Integrale linearer Differentialgleichungen hinzugefügt, welche, abgesehen von der Untersuchung über die Hesse'sche Curve derselben in § 2, für die Discussion derselben nützlich erscheinen und zu denen ich durch die instructive Arbeit des Herrn Darboux**) über algebraische Differentialgleichungen dieser Art veranlasst bin.

1.

Polarentheorie.

Setzt man in dem Ausdrucke:

$$\sum u_i f_i = \sum u_i (a_{ix})^{n-1}$$

an Stelle von x $x + \lambda y$, so ergeben sich durch Entwicklung nach Potenzen von λ die Formen:

$$\sum u_i (a_{ix})^{n-k-1} (a_{iy})^k.$$

Es erscheint angemessen, dieselben auch hier als *Polaren* von y zu bezeichnen. Für $k = 0$ hat man die n^{te} Polare von y, die gegebene Form selbst; die $n - 1^{te}$ Polare von y ist:

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0,$$

allgemein die $n - k^{te}$ Polare von y

$$\sum u_i (a_{ix})^{n-k-1} (a_{iy})^k = 0.$$

Alsdann gilt der allgemeine Satz:

*Geht die m^{te} Polare von y durch einen Punkt x, so geht umgekehrt die $n - m + 1^{te}$ Polare von x durch den Punkt y.****)

Denn die m^{te} Polare von y ist:

$$\sum u_i (a_{ix})^{m-1} (a_{iy})^{n-m} = 0; \qquad u_1 = y_2 x_3 - y_3 x_2$$

und die $n - m + 1^{te}$ Polare von x:

$$\sum v_i (a_{is})^{n-m} (a_{ix})^{m-1} = 0; \qquad v_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2,$$

*) Fouret. Sur les systèmes généraux descourb es planes. Bull. de la société math. II, p. 72, 96.

**) Darboux. Mémoire sur les équations différentielles du prémier ordre et du prémier degré. Bull. des Sc. math. 1878.

***) Weitere Reciprocitätssätze allgemeiner Art finden hier indess nicht statt.

und die beiden linken Seiten dieser Gleichungen stimmen bis auf das Vorzeichen überein, wenn in der zweiten statt z, y gesetzt wird.

Die n^{te} Polare von y hat im Punkte y einen Doppelpunkt, wenn die drei Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = 0$$

bestehen. *Der Ort der Doppelpunkte der n^{ten} Polaren ist die Jacobi'sche Curve $3(n-1)^{ter}$ Ordnung des Systems:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

während die Punkte y selbst eine Curve Σ_1 $3(n-1)^{2\,ter}$ Ordnung bilden.

Die conische Polare von x:

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0 \tag{6}$$

hat dagegen einen Doppelpunkt, wenn die Hesse'sche Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2f_{11} & f_{12}+f_{21} & f_{13}+f_{31} \\ f_{12}+f_{21} & 2f_{22} & f_{23}+f_{32} \\ f_{13}+f_{31} & f_{23}+f_{32} & 2f_{33} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Der Ort dieser Doppelpunkte ist eine Curve Σ_3 von der $3(n-1)^{2\,ten}$ Ordnung. Ausserdem hat man noch die von den Punkten y, für welche:

$$\sum y_i f_{ki} = 0$$

gebildete Curve Σ_2, deren Ordnung ebenfalls $3(n-1)^2$ ist.

Hesse'sche und Jacobi'sche Curve des Systems sind identisch. Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Identität:

$$2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_1 \\ a_{12}+a_{21} & 2a_{22} & a_2 \\ a & a_2 & 0 \end{vmatrix},$$

vermöge der man unmittelbar die identische Gleichung:

$$2(n-1)^2\Delta = -n\Delta'$$

gewinnt. Die drei genannten Curven sind daher eindeutig den Punkten der Hesse'schen Curve zugeordnet, haben also auch sämmtlich mit dieser dasselbe Geschlecht.

Die gerade Polare von x, $\Sigma y_i f_i = 0$ ist die diesem Punkte zugehörige Tangente. Weiter hat man:

Die Berührungspunkte der durch einen Punkt y gehenden Geraden des Systems liegen auf der n^{ten} Polare von y, also auf einer Curve n^{ter} Ordnung, welche, wie man unmittelbar sieht, *von der dem Punkte y zugehörigen Tangente in diesem selbst berührt wird.*

Da jede Gerade durch den Punkt y in $n-1$ weiteren Punkten von der n^{ten} Polare dieses Punktes getroffen wird, folgt:

Jede Gerade ist in $n-1$ ihrer Punkte Tangente des Systems, und ferner: Die Tangenten, welche sich vom Pole y an die n^{ten} Polare desselben ziehen lassen, sind stationäre oder Wendetangenten des Systems.

Da die Zahl solcher Tangenten $n(n-1)-2$ ist, so hat man:

Die von den Wendetangenten des Systems umhüllte Curve S ist von der $(n+1)(n-2)$ Classe. Und auch diese Curve ist eindeutig auf die Hesse'sche Curve bezogen, da ja überhaupt allen Punkten derselben stationäre Tangenten zugehören.

Für einen Punkt der Hesse'schen Curve zerfällt aber auch die conische Polare in zwei gerade Linien, die zugehörige Wendetangente und eine andere Gerade, die *Wendegerade*; beide schneiden sich in einem Punkte der Curve Σ_2. Denn aus den Gleichungen:

$$f_{ik} + f_{ki} = \alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i$$

welche für $\Delta' = 0$ bestehen müssen, folgt durch Multiplication mit den x_i und Addition:

$$(n-1) f_k = \alpha_x \beta_k + \alpha_k \beta_x,$$
$$0 = \alpha_x \beta_x.$$

mithin ist $\alpha_x = 0$ und $\alpha_k = f_k$.

Die Hesse'sche Curve ist also gleichzeitig der Ort der Doppelpunkte der n^{ten} Polaren, sowie der Ort der Punkte, deren conische Polaren einen Doppelpunkt haben, endlich der Ort der Punkte mit stationären Tangenten.

Auf jeder Wendetangente des Systems liegen nunmehr vier ungezeichnete Punkte, nämlich x und die entsprechenden Punkte der Curven Σ_1, Σ_2, Σ_3. Für diese vier Punkte gilt der Satz:

Die vier ausgezeichneten Punkte auf jeder Wendetangente haben das constante Doppelverhältniss $\frac{n-1}{n}$.

Denn man bezeichne den Punkt von Σ_1 durch y, den von Σ_2 durch z, den von Σ_3 durch ζ, so ist

$$z = x + \lambda y,$$
$$\zeta = x + \mu y,$$
$$\sum y_i f_{ik} = 0.$$

Damit aber wird:

$$\sum z_i f_{ki} = n f_k + \lambda \sum y_i (f_{ik} + f_{ki}) = 0,$$
$$\sum \zeta_i (f_{ik} + f_{ki}) = (n-1) f_k + \mu \sum y_i (f_{ik} + f_{ki}) = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{n}{n-1}.$$

Ich erwähne noch das Analogon eines in der Curventheorie wichtigen Satzes. Unter dem *Tangentialpunkt* der cubischen Polare von x:

$$\sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0$$

hat man den Punkt zu verstehen, in welchem dieselbe von der dem Punkte x zugehörigen Tangente getroffen wird. Unter der *Polare eines Punktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve* verstehe man die Gerade

$$\sum y_i \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i} = 0$$

falls in jedem Gliede von $\frac{\partial \Delta'}{\partial x_i}$ an Stelle des Differentialquotienten

$$f_{ikl} + f_{kil}$$

der dreigliedrige Ausdruck:

$$f_{ikl} + f_{kil} + f_{lik}$$

gesetzt wird. Alsdann gilt der Satz, dessen Beweis hier jedoch nicht ausgeführt werden soll:

Die Polare der Hesse'schen Curve in Bezug auf jeden Punkt x der Ebene geht durch den zu x gehörigen Tangentialpunkt der cubischen Polare dieses Punktes.

2.

Die singulären Punkte des Systems und die Singularitäten der Hesse'schen Curve.

Als singuläre Punkte des Systems sind alle diejenigen zu bezeichnen, für welche gleichzeitig die f_i verschwinden. *Die Zahl dieser singulären Punkte ist:*

$$n^2 - n + 1.$$

Jede durch einen singulären Punkt gehende Gerade ist als uneigentliche Tangente des Systems anzusehen, während zwei von demselben auslaufende Geraden im allgemeinen eigentliche (stationäre) Tangenten des Systems werden; sie sollen als *singuläre Richtungen* des betreffenden Punktes bezeichnet werden; das Product ihrer Gleichungen ist durch:

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0$$

gegeben. Diese Polare kann ganz unbestimmt werden, ohne dass sich die Ordnung des singulären Punktes erhöht, falls nämlich die sämmtlichen Coefficienten:

$$f_{ik} + f_{ki}$$

verschwinden. Alsdann finden drei singuläre Richtungen statt, bestimmt durch das Verschwinden der cubischen Polare

$$\sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0$$

und ebenso wird auf die biquadratische Polare von x zu recurriren sein, wenn die sämmtlichen

$$f_{ikl} + f_{kil} + f_{lik}$$

verschwinden.

Bestehen andererseits für einen singulären Punkt die Relationen:

$$f_{ik} = \alpha_k \beta_i$$

so haben die drei Curven $f_i = 0$ in demselben die gemeinsame Tangente

$$\alpha_y = 0.$$

Ein solcher Punkt hat die Bedeutung von *zwei unendlich benachbarten singulären Punkten* (mit bestimmter Tangente); von demselben gehen nur zwei singuläre Richtungen aus, die auch zusammenfallen können. Wenn endlich alle f_{ik} verschwinden, so entsteht der *doppelte singuläre Punkt*, welcher in der Zahl $n^2 - n + 1$ vierfach zu rechnen ist, von demselben werden wieder drei singuläre Richtungen ausgehen.

Die n^{ten} Polare jedes Punktes y geht durch alle einfachen singulären Punkte hindurch, ohne indess selbst dann, wenn die beiden singulären Richtungen zusammenfallen, dieselben zu berühren. (Vgl. den Rückkehrpunkt in der Curventheorie). Die n^{ten} Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Büschel, dessen n^2 Grundpunkte die singulären und die $n - 1$ der Geraden zugeordneten Punkte sind.

Um das Verhalten der Hesse'schen Curve in einem singulären Punkte zu untersuchen, bringe man dieselbe auf die Form:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\Delta c_x d_x}{(n-1)^2} = \begin{vmatrix} 2f_{11} & f_{12}+f_{21} & f_{13}+f_{31} & f_1 & d_1 \\ f_{12}+f_{21} & 2f_{22} & f_{23}+f_{32} & f_2 & d_2 \\ f_{13}+f_{31} & f_{23}+f_{32} & 2f_{33} & f_3 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

oder auf die folgende:

$$\text{(b)} \qquad \frac{-\Delta c_x d_x}{n(n-1)} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 & d_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 & d_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in dieser Functionaldeterminante die vierte Verticalreihe

durch beliebige Grössen a_i, ebenso die fünfte Horizontalreihe durch Grössen b_i, so soll die entstehende Form durch

$$\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$$

und die hieraus durch Weglassung der beiden letzten Reihen entstehende durch:

$$\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden. Man gewinnt dann sofort den Satz:

In einem einfachen singulären Punkte hat die Hesse'sche Curve einen Doppelpunkt, dessen Tangenten mit den singulären Richtungen zusammenfallen. Denn die Gleichung der zweiten Polare von Δ liefert bei Benutzung von (b):

$$c_x d_x \sum \frac{\partial^2 \Delta\, y_i\, y_k}{\partial x_i \partial x_k} \equiv \begin{vmatrix} d \\ c \end{vmatrix} \sum y_i y_k f_{ik}\,.$$

Die Hesse'sche Curve wird einen dreifachen Punkt erhalten, wenn der singuläre Punkt als Vereinigung von zwei unendlich nahen anzusehen ist, und umgekehrt verschwindet nur dann der Determinantenfactor identisch. Dass die Singularität auch keine höhere wird, erkennt man durch Bildung der dritten Polare:

$$\sum \frac{\partial^3 \Delta\, y_m y_n y_l}{\partial x_m \partial x_n \partial x_l}$$

Werden nämlich die Formen:

$$\sum \frac{\partial^2 f_i\, y_m y_n}{\partial x_m \partial x_n}, \qquad \sum \frac{\partial^2 f_i\, y_m}{\partial x_k \partial x_m}$$

durch Φ_i, Ψ_{ik} bezeichnet und setzt man, den Bedingungen $f_{ik} = \beta_i \alpha_k$ entsprechend,

$$\sum \frac{\partial f_i\, y_m}{\partial x_m} = \beta_i \alpha_y\,,$$

so ergiebt sich durch directe Bildung der dritten Differentialquotienten für die soeben bezeichnete Polare der Ausdruck:

$$3 a_y \left\{ \begin{vmatrix} \Phi & d \\ c & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & d \\ c & \Phi \end{vmatrix} \right\} + 6 \alpha_y^2 \left\| \begin{matrix} \beta & d \\ c & \beta \end{matrix} \right\| = 0,$$

wobei in dem dritten durch zwei verticale Striche eingeklammerten Symbole an Stelle der f_{ik} die ψ_{ik} einzutragen sind.

Setzt man noch für die f_{ik} ihre Werthe $\beta_i \alpha_k$ ein, so verschwindet das zweite Symbol, während das erste den Werth:

$$(c\,\beta\,\alpha)\,(\Phi\,d\,\beta)$$

erhält. Hieraus ergiebt sich:

Die Hesse'sche Curve hat an einer Stelle, in welcher zwei singuläre Punkte unendlich benachbart sind, einen dreifachen Punkt von welchem ein Zweig die Richtung, nach welcher sich die beiden singulären Punkte vereinigt haben, zur Tangente hat. In dem besonderen Falle, wo die β dem α proportional sind, also die beiden singulären Richtungen zusammenfallen, werden auch zwei Zweige der Hesse'schen Curve diese Richtung zur Tangente haben, während die Tangente des dritten durch

$$\begin{Vmatrix} \alpha & d \\ c & \alpha \end{Vmatrix} = 0$$

*gegeben ist.**)

Wenn die beiden singulären Richtungen eines einfachen singulären Punktes unbestimmt werden, so erhält man für die cubische Polare der Hesse'schen Curve:

$$\sum \frac{\partial^3 \Delta' y_i y_k y_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix},$$

wenn zur Abkürzung

$$\sum (f_{ikl} + f_{kil})\, y_l = u_{ik}$$

gesetzt wird.

Vermöge der Gleichungen:

$$\sum u_{ik} x_i = n - 1 \sum f_{kl} y_l,$$
$$\sum u_{ik} x_i x_k = 0,$$

---

*) Die obige Untersuchung zeigt zugleich, dass auch das Verhalten der Hesse'schen Determinante einer ternären Form $f = 0$ im Doppel- und Rückkehrpunkte derselben leicht ganz allgemein ermittelt werden kann (vgl. Clebsch-Lindemann Vorlesungen p. 356 ff.) Denn aus der Identität:

$$c_x d_x \Delta = (n-1)^2 \begin{vmatrix} f & d \\ c & f \end{vmatrix} + n(n-1) f \begin{vmatrix} d \\ c \end{vmatrix}$$

erhält man durch Differentiation für den gewöhnlichen Doppelpunkt:

$$c_x d_x \sum \frac{\partial^2 \Delta y_k y_l}{\partial x_i \partial x_k} = (n-1)(n-2) \begin{vmatrix} d \\ c \end{vmatrix} \sum y_i y_k f_{ik},$$

wodurch das Verhalten der Hesse'schen Curve im Doppelpunkt charakterisirt ist. Für den Fall des Rückkehrpunktes $f_{ik} = \alpha_i \alpha_k$ verschwindet der Determinantenfactor, bei der Bildung der dritten Polare erhält man aber:

$$c_x d_x \sum \frac{\partial^3 \Delta y_i y_k y_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_i} = -3(n-1) \left\{ 2(n-1) \begin{Vmatrix} \alpha & d \\ c & \beta \end{Vmatrix} + 3n \sum y_i \frac{\partial \begin{vmatrix} d \\ c \end{vmatrix}}{\partial x_i} \right\} \alpha_y^2,$$

womit das bekannte Verhalten der Curve im Rückkehrpunkte ebenfalls erwiesen ist.

$$\sum u_{ik} x_i y_k = 0,$$
$$\sum u_{ik} y_i y_k = 2 \sum f_{ikl} y_i y_k y_l$$

aber zeigt man leicht, indem man die obige Determinante mit dem Quadrate von

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix}$$

multiplicirt, dass jene Polare sich auf die cubische Polare

$$\sum y_i y_k y_l f_{ikl}$$

reducirt. Man hat also:

In einem singulären Punkte, dessen conische Polare unbestimmt ist, hat die Hesse'sche Curve diesen dreifachen Punkt, dessen Zweige die singulären Richtungen zu Tangenten haben.

Wenn endlich alle Differentialquotienten der f_i verschwinden, so zeigt eine ähnliche Behandlung, *dass die Hesse'sche Curve einen fünffachen Punkt hat, in welchem drei Zweige zu Tangenten die drei singulären Richtungen haben;* man erhält nämlich:

$$c_x d_x \sum \frac{\partial^5 \Delta y_k y_l y_m y_n y_s}{\partial x_s \partial x_k \partial x_l \partial x_m \partial x_n} \equiv 30n \sum y_i y_k y_l f_{ikm} \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & d_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & d_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}$$

wenn zur Abkürzung

$$\sum f_{ikl} y_i = v_{kl}$$

gesetzt wird.

Dieselben Resultate kann man auch durch das bekannte Verfahren gewinnen, vermöge dessen man die Hesse'sche Curve in einem singulären Punkte zu untersuchen pflegt, der mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt. Hierbei werden wegen der Identität (1) freilich specielle Formen der Functionen f_i vorausgesetzt. Aber es lässt sich folgender Satz aufstellen:

Wenn bei einer linearen Substitution mit der Determinante δ die Form:

$$\sum y_i f_i$$

mit der Functionaldeterminante Δ durch Multiplication mit δ in die entsprechende Form

$$\sum y_i \varphi_i$$

mit der Functionaldeterminante D übergeht, so geht auch D durch Multiplication mit δ in Δ über.

Man kann denselben als eine unmittelbare Consequenz der Invariantentheorie betrachten; einen directen Beweis derselben erhält man durch Multiplication von D mit δ^2, wobei $\delta\Delta$ entsteht. Hiernach aber ist der Fall, dass ein singulärer Punkt gerade mit einem der Elemente des Coordinatendreiecks zusammenfällt, für das Verhalten der beiden Formen $\Sigma y_i f_i$ und Δ ganz gleichgültig.

Man bringe nun Δ in die Form:

$$x_3^2\Delta \equiv f_1^2 f_{22} + f_2^2 f_{11} - f_1 f_2 (f_{12} + f_{21})$$

und setze:

$$f_1 = \quad x_2 S + \sum x_3^{n-k-1-t}\varphi_{k+t+1},$$

$$f_2 = -x_1 S + \sum x_3^{n-k-1-t}\psi_{k+t+1},$$

wo

$$S = \sum_{i=0}^{i=k-1} v_i x_3^{n-i-1}$$

und die v_i, φ_{k+t+1}, ψ_{k+t+1}, binäre Formen von x_1, x_2 des durch den Index angezeigten Grades bedeuten. Die dem Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zugehörigen singulären Richtungen erhält man, wenn man für $y_3 = 0$ und $x_1 = \lambda y_1$, $y_2 = \lambda y_2$ in der Form $\Sigma y_i f_i$ den Coefficienten der ersten auftretenden Potenz von λ aufsucht. Dieselben sind daher durch:

$$H_{k+2} = x_1 \varphi_{k+1} + x_2 \psi_{k+2}$$

gegeben; man hat also einen Punkt, von welchem $k+2$ singuläre Richtungen auslaufen.

Setzt man zur Abkürzung

$$H_{k+t+2} = x_1 \varphi_{k+t+1} + x_2 \psi_{k+t+1},$$

so erhält man für $x_3^2\Delta$ den Ausdruck:

$$\sum x_3^{2n-k-t-1}\left[(k+t+1)S - (x_2 S_2 + x_1 S_1)\right] H_{k+t+2}\, S$$

$$+ \sum x_3^{2n-2k-t-t'-2}\left[H_{k+t+2}\left\{S_1 \psi_{k+t'+1} - S_2 \varphi_{k+t'+1} + (\varphi_{k+t'+1,2} - \psi_{k+t'+1,2})S\right\}\right.$$

$$\left. + 2S(k+t'+1)\left\{\varphi_{k+t+1}\psi_{k+t'+1} - \varphi_{k+t'+1}\psi_{k+t+1}\right\}\right]$$

$$+ \sum x_3^{3n-3k-t-t'-t''-3} \mathsf{M},$$

falls zur Abkürzung

$$\frac{\partial \varphi_{k+m}}{\partial x_i} = \varphi_{k+m,i}, \qquad \frac{\partial \psi_{k+m}}{\partial x_i} = \psi_{k+m,i},$$

$$-\mathsf{M} = \begin{vmatrix} \varphi_{k+t''+1,1} & \varphi_{k+t''+1,2} & \varphi_{k+t+1} \\ \psi_{k+t''+1,1} & \psi_{k+t''+1,2} & \psi_{k+t+1} \\ \varphi_{k+t'+1} & \psi_{k+t'+1} & 0 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird. Setzt man jetzt:

$$S_1 = \sum v_{i1}\, x^{n-i-1}, \qquad S_2 = \sum v_{i2}\, x^{n-i-1}$$

so wird:

$$(k+t+1)\, S - (x_2 S_2 + x_1 S_1) = \sum (k+t+1-i)\, v_i x^{n-i-1}$$

und man erhält für $x_3{}^2\Delta$

$$\sum x_3^{3(n-1)-k-t-i-j} (k+t+1-i)\, v_i v_j H_{k+t+2}$$
$$+ \sum x_3^{3(n-1)-2k-t-t'-i} X_{k+t+2} \{ v_{i1}\, \psi_{k+t'+1} - v_{i2}\, \varphi_{k+t'+1} + v_i(\varphi_{k+t+1,2} - \psi_{k+t+1,1}) \}$$
$$+ \sum 2 x_3^{3(n-1)-2k-t-t'-i} v_i (t'-t) \{ \varphi_{k+t+1}\, \psi_{k+t'+1} - \varphi_{k+t'+1}\, \psi_{k+t+1} \}$$
$$+ \sum x_3^{3(n-1)-3k-t-t'-t''} \mathsf{M}.$$

Aus dieser Entwicklung erhält man die Glieder mit den höchsten Potenzen von x_3, falls alle t, t', t'', i, j, gleich Null genommen werden.

Verschwindet nun v_0 nicht, so beginnt die Entwicklung von $x_3{}^3\Delta$ mit:

$$x_3^{3(n-1)-k} (k+1)\, v_0{}^2 X_{k+2}\,.$$

Das heisst, *die Hesse'sche Curve hat einen $k+2$-fachen Punkt, dessen Tangenten mit den singulären Richtungen desselben coincidiren.*

Verschwinden aber alle v_i von v_0 bis v_r, wo $r < k-1$, so wird die Entwicklung beginnen mit

$$x_3^{3(n-1)-k-2(r+1)} (k-r)\, v_{r+1}^2\, X_{k+2}.$$

In diesem Falle *hat also die Hesse'sche Curve einen $k+2(r+2)$-fachen Punkt, von welchem $k+2$ Tangenten ausgehen, welche durch die singulären Richtungen dargestellt werden, während ausserdem noch $r+1$ doppelt zu rechnende Tangenten vorhanden sind, die durch $v_{r+1} = 0$ bestimmt sind.*

Und ist endlich $k = r+1$, so wird die Entwickelung beginnen mit:

$$x_3^{3(n-1)-3(r+1)} X_{k+2} \left[v_k^2 + v_{k,1}\, \psi_{k+1} - v_{k,2}\, \varphi_{k+1} + v_k (\varphi_{k+1,2} - \psi_{k+1,1}) + \frac{1}{k+1} \{ \varphi_{k+1,1}\, \psi_{k+1,2} - \varphi_{k+1,2}\, \psi_{k+1,1} \} \right].$$

Die Hesse'sche Curve hat dann einen $3k+2$-fachen Punkt, von welchem wieder $k+2$ Zweige zu Tangenten die singulären Richtungen haben, während die Tangenten der übrigen durch den Factor von X_{k+2} gegeben sind.

3.

Die Steiner-Cayley'sche Curve des Systems und die Curven Σ.

Die Curve Σ_1, der Ort der Punkte, deren n^{te} Polaren einen Doppelpunkt haben, mag die Steiner'sche Curve, die von den Wendetangenten umhüllte Curve die Cayley'sche Curve des

Systems heissen. *Die Steiner'sche Curve ist mit der Cayley'schen identisch.* Denn aus:

$$\sum y_i f_{ik} = 0$$

folgt:

$$\sum dy_i f_{ik} + \sum y_i f_{ikl}\, dx_l = 0$$

und durch Multiplication mit x_k und Addition:

$$\sum dy_i f_i = 0,$$

womit gezeigt ist, dass die Tangente der Steiner'schen Curve eben die zugehörige Wendetangente von x ist. Da nun das Geschlecht der Curve mit dem der Hesse'schen übereinstimmt, letztere aber ausser den $n^2 - n + 1$ in die singulären Punkte fallenden Knotenpunkten im allgemeinen keine weiteren Singularitäten haben kann, mithin das Geschlecht $\frac{1}{2}(7n-18)(n-1)$ besitzt, so erhält man für die charakteristischen Zahlen der Steiner'schen Curve:

$$\begin{aligned}
\text{Classe} &= (n+1)(n-2),\\
\text{Ordnung} &= 3(n-1)^2,\\
\text{Geschlecht} &= \tfrac{1}{2}(7n-18)(n-1),\\
\text{Spitzen} &= 12(n-1)(n-2),\\
\text{Wendepunkte} &= 3(n-3)(2n-1),\\
\text{Doppelpunkte} &= n^2 - n + 1 + \tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n+11),\\
\text{Doppeltangenten} &= \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+5n-2),
\end{aligned}$$

welche von Herrn Lindemann*) bereits angegeben sind.

Bei specieller Form der Functionen F_i kann die Hesse'sche Curve auch in nicht singulären Punkten Knoten haben. Nach den obigen Untersuchungen ist es leicht, die Modificationen anzugeben, welche in den angegebenen Zahlwerthen entstehen, falls die Natur der singulären Punkte eine weitere Erniedrigung des Geschlechtes der Hesse'schen Curve herbeiführt. Dabei kann die Classe der Cayley'schen Curve keine Erniedrigung erfahren, so lange nicht die n^{te} Polare eines jeden Punktes in den singulären Punkten vielfache Punkte erhält, also ein solcher mindestens ein doppelter singulärer Punkt wird. Unter Umständen kann aber selbst für den Fall, dass nur einfache singuläre Punkte vorhanden sind, die Ordnung dieser letzteren Curve sich erniedrigen. Unter ihrer Ordnung hat man nämlich die Zahl der Punkte zu verstehen, für welche das System der in der Matrix

*) a. a. O. p. 1005.

$$m_1 = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & a_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & a_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & a_3 \end{Vmatrix}$$

enthaltenen Determinanten $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3\ \Delta_4$ verschwindet, falls die a_i Coordinaten einer beliebigen Geraden sind. Nun schneiden sich $\Delta_1 = 0$ und $\Delta_2 = 0$ in $4(n-1)^2$ Punkten; von diesen ist die Zahl $(n-1)^2$ der Punkte zu entfernen, für die die Matrix

$$m_2 = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{Vmatrix}$$

verschwindet. Damit ergiebt sich als Ordnung $3(n-1)^2$; wenn aber zwei singuläre Punkte sich unendlich nahe gerückt sind, also $f_{ik} = \beta_i \alpha_k$ wird, verschwinden alle Determinanten von m_1, während im allgemeinen keine der von m_2 verschwindet. Setzt man noch:

$$\sum c_i \Delta_i = \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad u_{ik} = \sum f_{ikl}\, y_l$$

so wird:

$$-\sum y_l \frac{\partial \Omega}{\partial x_l} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & a_1 & \beta_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & a_2 & \beta_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & a_3 & \beta_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Und da

$$\sum x_k u_{ik} = (n-1)\, \beta_i \alpha_y$$

so wird

$$\sum y_l \frac{\partial \Omega}{\partial x_l} = \frac{c_x}{(n-1)\, \alpha_y} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & a_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & a_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{32} & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Damit ist bewiesen, dass sich in einem solchen singulären Punkte die Curven $\Delta_i = 0$ sämmtlich berühren. Somit hat man:

Rücken sich zwei singuläre Punkte unendlich nahe, so wird die Steiner'sche Curve aus der doppelt zählenden singulären Tangente — der Verbindungslinie jener unendlich nahen Punkte — und einer Curve $3(n-1)^2 - 2^{\text{ter}}$ *Ordnung bestehen.**)

Bezeichnet man daher mit α die Anzahl der Paare unendlich naher singulärer Punkte, mit γ die Zahl derjenigen singulären Punkte, in denen die conische Polare unbestimmt wird, endlich mit δ die Zahl

*) Ein analoger Satz gilt für die Steiner'sche Curve einer ebenen Curve mit Rückkehrpunkt.

anderweitiger Doppelpunkte der Hesse'schen Curve, so sind die drei ersten Zahlen durch folgende zu ersetzen:

$$\begin{aligned} \text{Classe} &= (n+1)(n-2), \\ \text{Ordnung} &= 3(n-1)^2 - 2\alpha, \\ \text{Geschlecht} &= \tfrac{1}{2}(7n-18)(n-1) - \alpha - 2\gamma - \delta, \end{aligned}$$

aus denen sich dann die übrigen berechnen lassen.

Die Wendetangenten der Steiner'schen Curve sind zugleich doppelt stationäre oder Undulationstangenten des Systems und Tangenten der Hesse'schen Curve. Beide Curven haben daher ein reducibeles System gemeinsamer Tangenten.

Auf demselben Wege ergeben sich aber die Charaktere der von den Wendegeraden umhüllten Curve Σ_4. Denn die Zahl der Durchschnittspunkte der Curven

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0, \qquad \Delta = 0$$

für beliebige Werthe der y ist gleich der Anzahl der Wendetangenten des Systems vermehrt um die Zahl der Wendegeraden, welche durch einen willkürlichen Punkt y gehen, mithin der Summe der Classen von Σ_1 und Σ_4. Und damit ergeben sich folgende Charakteristiken von Σ_4;

$$\begin{aligned} \text{Classe} &= (n-1)(2n-3) + 2, \\ \text{Ordnung} &= (11n-13)(n-2), \\ \text{Rückkehrpunkte} &= 9(n-1)(3n-7), \\ \text{Wendepunkte} &= 0. \end{aligned}$$

Gemeinsame Punkte der Curven Σ_1, Σ_2, Σ_3 sind zunächst die n^2-n+1 singulären Punkte des Systems. In dieser aber haben sie, wie man aus ihrer Entstehung und aus ihrer eindeutigen Zuordnung zur Hesse'schen Curve folgert, Doppelpunkte. Ueberhaupt gilt der Satz:

Die Curven Σ_1, Σ_2, Σ_3 und die Hesse'sche Curve haben in den singulären Punkten Doppelpunkte mit gemeinsamen Tangentenrichtungen.

Um dies z. B. für die Cayley'sche Curve zu beweisen, differentiire man die Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = 0,$$

während man auf dem einen Aste der Hesse'schen Curve fortschreitet, so dass:

$$\sum dy_i f_{ik} + f_{ikl} y_i dx_i = 0,$$

$$\sum f_{ik} dx_i dx_k = 0.$$

Setzt man nun für y_i die x_i, so ergiebt sich:

$$\sum dy_i f_{ik} - (f_{ki} + f_{ik})\, dx_i = 0,$$

und hieraus durch Multiplication mit den dx_k und Addition:

$$\sum dy_i\, dx_k f_{ik} = 2 \sum f_{ki}\, dx_k\, dx_i = 0.$$

Da sich die Incremente dy_i linear aus den beiden Tangentenrichtungen dx_k und dx_k des Doppelpunktes der Hesse'schen Curve zusammensetzen lassen, so hat man:

$$dy_i = \alpha\, dx_i + \beta\, dx_i'.$$

Setzt man diese Werthe in die eben gefundene Gleichung ein, so ergiebt sich $\beta = 0$, mithin wird

$$dy_i = \alpha\, dx_i.$$

Die drei Curven haben aber eine Reihe weiterer Punkte gemein. Wenn nämlich Σ_1 und Σ_3 einen entsprechenden Punkt gemein haben, so muss zufolge der oben bewiesenen Doppelverhältnissrelation auch Σ_2 durch denselben Punkt gehen. Um die Anzahl dieser Punkte zu bestimmen, hat man zu untersuchen, wie oft die 6 Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = 0, \quad \sum y_i f_{ki} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

gleichzeitig bestehen können.

Man erhält aus ihnen aber

$$y_1 : y_2 : y_3 = f_{23} - f_{32} : f_{31} - f_{13} : f_{12} - f_{21}.$$

Jene gemeinsamen Punkte sind also durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen:

$$\begin{aligned} L_1 &= f_{11}(f_{23} - f_{32}) + f_{12}(f_{31} - f_{13}) + f_{13}(f_{11} - f_{21}) = 0, \\ L_2 &= f_{21}(f_{23} - f_{32}) + f_{22}(f_{31} - f_{13}) + f_{23}(f_{12} - f_{21}) = 0, \\ L_3 &= f_{31}(f_{23} - f_{32}) + f_{32}(f_{31} - f_{13}) + f_{33}(f_{12} - f_{21}) = 0 \end{aligned}$$

charakterisirt, aus denen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} L_1' &= f_{11}(f_{23} - f_{32}) + f_{21}(f_{31} - f_{13}) + f_{31}(f_{12} - f_{21}) = 0, \\ L_2' &= f_{12}(f_{23} - f_{32}) + f_{22}(f_{31} - f_{13}) + f_{32}(f_{12} - f_{21}) = 0, \\ L_3' &= f_{13}(f_{23} - f_{32}) + f_{23}(f_{31} - f_{13}) + f_{33}(f_{12} - f_{21}) = 0 \end{aligned}$$

sich ergeben. Ausserdem ist:

$$L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \equiv f_1(f_{23} - f_{32}) + f_2(f_{31} - f_{13}) + f_3(f_{12} - f_{21})$$

also identisch Null. Da ferner die Curven L jeden singulären Punkt einfach gemein haben, so ergiebt sich als Zahl der gemeinsamen Lösungen:

$$4(n-1)^2 - 2(n-1) + 1 - (n^2 - n + 1) = 3(n-1)(n-2).$$

Man zeigt ferner, dass den Curven Σ_2, Σ_3 keine Rückkehrpunkte zukommen können. Denn Doppelpunkte derselben entstehen dadurch, dass zu zwei verschieden Punkten A_1, A_2 der Hesse'schen Curve ein und derselbe Punkt a jener Curven gehört, Rückkehrpunkte könnten aber nur dadurch entstehen, dass A_1 und A_2 unendlich benachbart sind. Dann aber ist a gleichzeitig ein Punkt der Steiner'schen Curve, und es könnten etwaige Rückkehrpunkte nur zu den soeben bestimmten Punkten gehören. Andererseits aber sieht man direct, dass für diese die Bedingungen eines Rückkehrpunktes noch nicht erfüllt sind. Man hat daher den Satz:

Die drei Curven Σ_1, Σ_2, Σ_3 haben ausser den gemeinsamen singulären Punkten noch $3(n-1)(n-2)$ *gemeinsame Berührungspunkte* und ferner:

Die Curven Σ_2, Σ_3 werden von den Wendetangenten der Steiner'schen Curve berührt.

Endlich hat man als Charakteristiken der Curven Σ_2, Σ_3:

$$\begin{aligned}
\text{Ordnung} &= 3(n-1)^2,\\
\text{Geschlecht} &= \tfrac{1}{2}(7n-18)(n-1),\\
\text{Rückkehrpunkte} &= 0,\\
\text{Klasse} &= (13n-11)(n-2),\\
\text{Doppelpunkte} &= n^2 - n + 1 + \tfrac{9}{2}(n-2)[n^2(n-2)+1],\\
\text{Wendepunkte} &= 3(10n^2 - 31n + 19) \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass mehrere der oben bestimmten Zahlen für die Steiner'sche Curve sich auch direct analytisch herleiten lassen. *Zunächst erhält man die Gleichung dieser Curve in Liniencoordinaten;* sie ist die in Bezug auf λ gebildete Discriminante der Gleichung:

$$\sum u_i F_i = 0,$$

falls an Stelle der x_i die $x_i + \lambda y_i$ gesetzt werden. Die *Gleichung dieser Curve in Punktcoordinaten* ist, wie schon Herr Lindemann*) bemerkt, die Discriminante der Form $\Sigma u_i F_i = 0$, in dem Sinne, dass

*) a. a. O. p. 1005.

die Resultante der gleich Null gesetzten Differentialquotienten derselben gebildet wird.

Ein willkürlicher Punkt y auf der Tangente des Systems im Punkte x, etwa derjenige, welcher durch die Gerade

$$a_y = 0$$

ausgeschnitten wird, hat die Coordinaten:

$$y_i = F_i a_x - x_i \sum a_i F_i;$$

dieselben können also überhaupt in der Form

$$y_i = \varrho x_i + \nu F_i$$

dargestellt werden. Ferner ist die Gleichung der Tangente im Punkte x

$$\sum u_i F_i = 0$$

und die $n-2$ Punkte, zu denen dieselbe wieder als Tangente gehört, erhält man, wenn man in dieser Gleichung an Stelle von x zuerst $x + \lambda y$ und dann an Stelle von y die Coordinaten irgend eines Punktes der Tangente einträgt. Dies kommt, wie man sieht, darauf hinaus, dass an Stelle von y einfach F, an Stelle von x aber $\varrho x + \nu F$ geschrieben wird. Man erhält so zur Bestimmung jener $n-2$ Punkte die Gleichung:

$$S = 0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ [F_1] & [F_2] & [F_3] \end{vmatrix},$$

wobei:

$$[F_i] = \varrho^{n-1} F_i + \varrho^{n-2} \nu \sum F_k F_{ik} + \varrho^{n-3} \frac{\nu^2}{2} \sum F_k F_i F_{ik} + \cdots.$$

Damit also im Punkte x eine stationäre Tangente stattfinde, muss der Factor von ϱ^{n-2} in S verschwinden, oder:

$$\Delta = \sum \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1k} & F_{2k} & F_{3k} \end{vmatrix} F_k = \sum f_i F_k F_{ik} = 0$$

sein. Dies ist die Gleichung der Hesse'schen Curve. Und die Stellen, in denen die stationäre Tangente zur Undulationstangente wird, sind durch das Bestehen der weiteren Gleichung:

$$U = \sum F_k F_i \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1ki} & F_{2ki} & F_{3ki} \end{vmatrix} = 0$$

charakterisirt. Berücksichtigt man, dass die Curven $\Delta = 0$ und $U = 0$

in den singulären Punkten Doppelpunkte mit gemeinsamen Tangentenrichtungen haben, so erhält man als Zahl der Undulationstangenten, wie oben:

$$3(n-1)(4n-5) - 6(n^2 - n + 1) = 3(n-3)(2n-1).$$

Und soll endlich eine Gerade Doppeltangente der Steiner'schen Curve werden, so muss die Discriminante der Gleichung $S = 0$ in Bezug auf ϱ, nachdem die Glieder mit ϱ^{n-1} und ϱ^{n-2} entfernt sind, verschwinden. Diese stellt eine neue Covariante vor, welche die Hesse'sche Curve ausser in den singulären Punkten in den Punktepaaren schneidet, welche zu Doppeltangenten Veranlassung geben. Eine einfache Betrachtung dieser Discriminante zeigt, dass dieselbe vom Grade $(n-4)(4n-5+n^2-n+1)$ ist, und dass von der Zahl ihrer Schnittpunkte mit der Hesse'schen Curve:

$$3(n-1)(n-4)(n^2+3n-4)$$

für die singulären Punkte $2(2n+3)(n-4)(n^2-n+1)$ abzuziehen ist, wonach sich die doppelte Zahl der Doppeltangenten ergiebt.

Die Cayley'-Steiner'sche Curve steht endlich in merkwürdiger Beziehung zu einer Reihe von Curvensystemen sehr allgemeiner Art. Schreitet man nämlich von einem Punkte P, dem die Tangente A zugehört, nach seinem benachbarten Punkte P' fort, so dreht sich die zu P' gehörige Tangente um einen auf A liegenden Punkt Q. *Die Punkte Q entsprechen projectiv dem Strahlbüschel PP'.* Aber diese Projectivität wird eine specielle, wenn P ein Punkt der Hesse'schen Curve ist. Somit hat man:

Die Tangente jedes Punktes, welcher einem Punkte P der Hesse'schen Curve benachbart ist, geht durch den zu P gehörigen Punkt der Cayley'schen Curve.

Der analytische Beweis dieses Satzes ergiebt sich daraus, dass die Gleichung einer zur Tangente in x unendlich benachbarten Tangente ist

$$\sum z_i f_i + \sum z_i f_{ik} dx_k = 0$$

und dass diese Gleichung bei beliebigen dx_k erfüllt ist, sobald x ein Punkt der Hesse'schen und z der zugehörige Punkt y der Cayley'schen Curve ist.

Es sei nun eine Curve m. Ordnung C_m gegeben, welche durch die singulären Punkte des Systems im ganzen mit α Zweigen hindurchgeht. Die den Punkten von C_m zugehörigen Tangenten des Systems umhüllen eine Curve Γ. *Die Classe von Γ ist $nm - \alpha$,* denn sie ist gleich der Zahl der eigentlichen Schnittpunkte von C_m mit der n. Polare eines beliebigen Punktes y. Die Ordnung von Γ ist gleich

der Zahl der Curven in einem Büschel von n-Polaren, welche die C_m berühren, die Anzahl ihrer Doppel- und Rückkehrpunkte gleich der Anzahl der Polaren, welche C_m doppelt berühren, resp. osculiren. Diese Zahlen kann man aber auf anderem Wege bestimmen. *Das Geschlecht von* Γ *ist nämlich gleich dem Geschlechte* p *von* C_m, und die *Zahl der Wendetangenten von* Γ *ist gleich Null*, falls nicht C_m die Hesse'sche Curve in einem Punkte durchsetzt, wo C_m zugleich die diesem zugehörige Tangente berührt. Es ist daher z. B. die Ordnung von Γ gleich:

$$2p + 2[nm - \alpha - 1].$$

Da nun C_m die Hesse'sche Curve in $3(n-1)m - 2\alpha$ Punkten trifft, so hat man in Verbindung mit dem obigen Satze:

Jede Curve Γ *berührt die Cayley'sche Curve in* $3(n-1)m - 2\alpha$ *Punkten, hat aber mit derselben*

$$(n+1)(n-2)(nm-\alpha) - 6(n-1)m + 4\alpha$$

weitere Tangenten gemein.

Ist insbesondere C_m eine Gerade, welche durch keinen singulären Punkt geht, so ist Γ eine rationale Curve n. Classe, $2(n-1)$. Ordnung und die soeben bestimmte Zahl wird

$$(n-3)[(n+1)^2 - 3].$$

Sie giebt die Ordnung der Curve an, welche von den $n-3$ auf jeder Tangente der Cayley'schen Curve befindlichen Punkten gebildet wird, in denen diese wieder Tangente des Systems ist*):

4.

Ueber algebraische Integrale der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades.

Im Folgenden soll es sich um die Eigenschaften algebraischer Integrale einer solchen Differentialgleichung handeln. Natürlich kann aus rein geometrischen Untersuchungen keine Entscheidung über die Frage gewonnen werden, wann überhaupt particuläre Integrale dieser Art auftreten. Aber für das Verhalten eines solchen Integrales zu den singulären Punkten der Differentialgleichung lassen sich einige Sätze aufstellen, welche bei der geringen Kenntniss, die man von den

*) Das System der Curven Γ für $m = 1$ ist bereits von Herrn Lindemann betrachtet a. a. O. p. 1006. Aus der im Texte ausgesprochenen Eigenschaft der Cayley'schen Curve ergeben sich ebenfalls unmittelbar die weiteren p. 1006 ausgeführten Betrachtungen.

algebraischen Integralen überhaupt hat, vielleicht nicht ganz ohne Interesse sind.

Da die Hesse'sche Curve der Ort der Inflexionen der Integralcurven ist, so hat man zunächst:

Particuläre lineare Integrale der Differentialgleichung sind als Factoren in der Hesse'schen Determinante derselben enthalten. Der Satz kann nicht umgekehrt werden, da ja auch die Wendungspunkte des zu der Differentialgleichung gehörigen Systems auf Geraden sich befinden können*), man kann ihn indess benutzen, um wenigstens alle linearen Integrale zu finden.

Es möge nun vorausgesetzt werden, dass die singulären Punkte einfach sind, dass in denselben keine Unbestimmtheit der conischen Polare stattfindet, und auch im Allgemeinen keine zwei unendlich benachbart sind. Nun gilt offenbar der Satz:

Wenn in einem singulären Punkte nicht mehr als zwei singuläre Richtungen existiren, so sind sie zugleich Tangenten der von demselben ausgehenden Integralcurven.

Derselbe gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn die conische Polare unbestimmt wird. Dann sind zunächst drei singuläre Richtungen vorhanden, aber diese sind nur die Tangenten solcher Integralcurven, welche mit Inflexionen durch diesen singulären Punkt gehen, während ausserdem in jeder beliebigen Richtung Integralcurven durch denselben laufen können. Ein Beispiel für diesen Fall liefert die lineare Differentialgleichung eines Kegelschnittbüschels, dessen Hesse'sche Curve aus den 6 in dem Büschel enthaltenen Geraden besteht; die Grundpunkte des Büschels sind dann singuläre Punkte der eben genannten Art. — Es habe nun die Differentialgleichung ein particuläres oder allgemeines algebraisches Integral p. Ordnung, q. Classe, welches in den singulären Punkten vielfache Punkte besitzt, deren Multiplicität im Ganzen durch α bezeichnet werden mag. Da die Berührungspunkte der von einem Punkte y gezogenen Tangenten auf der n Polare von y liegen, welche

*) Ein Beispiel hierfür findet sich in dem Aufsatze des Herrn Darboux a. a. O. p. 126. In Bezug auf das Zerfallen der Hesse'schen Curve finden überhaupt noch besondere Umstände statt; so namentlich in dem von Herrn Darboux behandelten Falle $n = 3$. Findet hier z. B. eine Unbestimmtheit der conischen Polare statt, so sind die drei singulären Richtungen des betreffenden Punktes zugleich Integralcurven, mithin zerfällt die Hesse'sche Curve dann in drei Gerade und eine Curve dritter Ordnung. Andererseits kann überhaupt die Hesse'sche Curve in einem nicht singulären Punkte nie einen Doppelpunkt haben, ohne zugleich zu zerfallen. Denn Doppelpunkte derselben geben zu Undulationspunkten von Integralcurven Veranlassung; für $n = 3$ bedingt aber das Auftreten eines solchen Punktes immer ein geradliniges Integral.

durch jeden singulären Punkt einfach hindurchgeht, so hat man die Relation*):

$$(1) \qquad np - \alpha = q.$$

Von den zahlreichen Folgerungen aus dieser allgemeinen Gleichung seien einige erwähnt.

Für $p = 1$, $q = 0$ folgt $\alpha = n$. Mithin:

Jedes (particuläre) lineare Integral muss durch n singuläre Punkte gehen.

Und umgekehrt folgt der Satz des Herrn Darboux:

Befinden sich n singuläre Punkte auf einer Geraden, so ist dieselbe ein Integral der Differentialgleichung. Denn auf einer Geraden können sich überhaupt nur $n - 1$ Punkte befinden, in denen sie Tangente des Systems ist; geht sie aber durch n singuläre Punkte, so ist sie in n Punkten also in allen Tangente des Systems, mithin eine Integralcurve.

Ebenso hat man für $p = 2$, $q = 2$, $\alpha = 2(n - 1)$.

Jede Integralcurve zweiter Ordnung muss durch $2(n - 1)$ singuläre Punkte hindurchgehen.

Nach Herrn Darboux können nie mehr als np singuläre Punkte sich auf einer nicht zerfallenden Curve p. Ordnung befinden. $2n - 1$ singuläre Punkte können auf einem Kegelschnitt liegen, ein solcher kann dann nicht Integralcurve sein.

Endlich hat man für $q = p(p - 1)$:

Eine Integralcurve ohne singuläre Punkte muss stets durch

$$\alpha = p(n - p + 1)$$

singuläre Punkte der Differentialgleichung hindurchgehen.

Von grösserem Interesse erscheint der folgende Satz:

Jedes particuläre algebraische Integral muss mindestens durch n verschiedene singuläre Punkte der Differentialgleichung gehen.

Denn es sei $\varphi = 0$ ein solches vom p^{ten} Grade; wie Herr Darboux bemerkt, muss dann die Identität

$$\sum \varphi_i F_i = K\varphi$$

bestehen, in welcher K eine ganze homogene Function $n - 2^{\text{ten}}$ Grades sein wird. Nun ist für jeden singulären Punkt

*) Eine dieser nahe verwandte ist auf analytischem Wege für particuläre Integrale von Herrn Darboux hergeleitet (a. a. O. p. 87), doch liefert dieselbe nur eine untere Grenze für die Zahl α. Für den Fall, dass zwei singuläre Punkte unendlich benachbart sind, berührt jede Polare die zugehörige singuläre Richtung; da nun die Integralcurve möglicherweise Zweige besitzen kann, welche diese Richtung wieder in specieller Weise zur Tangente haben, so kann die Relation des Textes noch einer Modification bedürfen.

$$F_i = \lambda x_i,$$

also wird $p\lambda\varphi = K\varphi$. Für diejenigen singulären Punkte, in denen φ nicht verschwindet, muss daher die Gleichung bestehen:

$$K = \lambda p.$$

Die 3 Curven:

$$\psi_i = pF_i - Kx_i = 0$$

müssen also mindestens durch alle nicht auf φ gelegenen singulären Punkte hindurchgehen; enthält φ $n - \alpha$ derselben, so müssen die übrigen

$$(n-1)^2 + \alpha$$

sämmtlich dem System der Curven $n-1$. Grades ψ angehören. Dann aber müssen dieselben eine Curve M gemeinsam haben, so dass

$$pF_i = Kx_i + M\chi_i.$$

Mithin haben auch die f_i den gemeinsamen Factor M, was einer selbstverständlichen Voraussetzung widerspricht. Damit ist bewiesen, dass α Null oder negativ sein muss. Ich erwähne die Folgerung:

Ein particuläres algebraisches Integral ohne Singularitäten ist höchstens von der n^{ten} Ordnung. Dass dieser Grad auch wirklich erreicht werden kann, zeigt die Betrachtung der Differentialgleichung eines Curvenbüschels von der Form $\varphi + \lambda(a_x^n) = 0$, wo a_x eine lineare Function ist.

Ein particuläres Integral p^{ter} Ordnung gehe nun durch α singuläre Punkte so hindurch, dass in dem i^{ten} derselben ε_i Zweige eine der singulären Richtungen berühren, durch β weitere so, dass in dem i^{ten} derselben nach den beiden singulären Richtungen je d_i und δ_i-fache Zweige vorhanden sind. Dabei möge angenommen werden, dass ein k_i-facher Punkt mit zusammenfallenden Punkten für $\frac{1}{2}k_i(k_i-1)$ Doppelpunkte und $k_i - 1$ Rückkehrpunkte zu rechnen ist. Die Relation 1) geht dann, wenn man das Geschlecht der Curve durch P bezeichnet, in die folgende über:

$$\alpha + 2\beta = p(n-2) - 2(P-1). \tag{2}$$

Und da $\alpha + \beta \geqq n$, so folgt:

$$\beta \lessgtr p(n-2) - n - 2(P-1).$$

Die Gleichung (2) kann man auch durch Betrachtung der Hesse'schen Curve gewinnen. Da nämlich die Inflexionspunkte der Integralcurven sich in den nicht nothwendig in den singulären Punkten befindlichen Schnittpunkten mit der Hesse'schen Curve des Systems befinden, so erhält man vermöge der Plücker'schen Formeln eine

Relation für die Anzahl dieser Punkte, welche mit der abgeleiteten (2) übereinstimmt. Diese Uebereinstimmung findet aber nicht mehr statt, wenn unter den singulären Punkten sich auch unendlich nahe Paare befinden, da die Hesse'sche Curve in den singulären Punkten dann nur eine der singulären Richtungen berührt. Man erhält also wirklich zwei verschiedene Relationen für das Verhalten einer Integralcurve; ich theile dieselben nicht mit, da die Bedingungen ihrer Anwendbarkeit sich nicht unmittelbar übersehen lassen.

Dresden, im Juli 1883.

Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, dessen eines Ende von einem Kräftepaar angegriffen wird*).

Von

W. Hess in München.

(Mit einer lithographirten Tafel.)

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines im Verhältniss zu seiner Länge sehr dünnen elastischen Stabes, auf dessen eines Ende irgend welche Kräfte einwirken, während das andere Ende festgehalten bleibt, sind zuerst von Kirchhoff**) aufgestellt worden. Kirchhoff hat hierbei darauf aufmerksam gemacht, dass diese Bedingungen die nämliche Form besitzen wie die Gleichungen, welche die Bewegung eines um einen festen Punkt rotirenden starren Körpers definiren. Durch diese Uebereinstimmung der zwei verschiedenen Probleme scheint somit nicht nur die Möglichkeit geboten, die expliciten Formeln, welche für verschiedene Fälle der Drehung bereits aufgestellt sind, direct zur Ermittlung der Gleichgewichtszustände des elastischen Stabes zu verwerthen, sondern auch Schritt für Schritt jedem Vorgange bei der Rotation des Körpers den entsprechenden für die Deformation des Stabes gegenüberzustellen und vielleicht umgekehrt aus der wechselseitigen Beziehung beider Probleme zu neuen Fragen für das erstere zu gelangen. Eine Untersuchung über das Gleichgewicht eines allgemeinen elastischen Stabes dürfte nun, da die bekannteren Arbeiten über diesen Gegenstand***) sich mit einem in allen Richtungen gleich

*) Ein Auszug aus dieser Untersuchung ist erschienen in den Sitzungsberichten der bayer. Acad. d. Wissensch. 1883. 82—110.

**) Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. Crelle's J. Bd. 56. 285—313.

***) Hierher sind vor allem zu rechnen die Untersuchungen über die „elastische Linie" von Bernoulli und Euler [De curvis elasticis Lausanne u. Genf. 1744. 4°], Abhandlungen von Binet [Comptes rendus. Bd. 18. 1115—1119], Wantzel [ibid. 1197—1201] u. A. Vgl. die Literaturangabe in Navier: de la résistance des corps solides, XII—XXII. Paris, bei Dunod. 1874. 8°.

biegsamen Draht oder mit Specialfällen beschäftigen, noch nicht erfolgt sein, zudem nicht im Anschlusse an das Rotationsproblem. Ich habe mich daher mit der Frage näher beschäftigt, und zwar vorerst unter der Annahme, dass auf das freie Ende des Stabes nur ein Kräftepaar einwirke. Das Analogon hierzu findet sich in der Drehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt, welche Art der Bewegung durch die Verbindung der analytischen Arbeiten Jacobi's*) mit den bekannten Anschauungsweisen Poinsot's**), wie ich sie in meiner Doctordissertation***) versucht habe, hinreichend klar behandelt sein dürfte.

Die Untersuchung gliedert sich im Wesentlichen in zwei Theile. Zuerst werden die Ausdrücke für die Grösse der Biegung und Drillung in jedem der einzelnen Querschnitte untersucht. Diesen Grössen entsprechen bei der Bewegung die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsaxen des Körpers durch den Schwerpunkt. Wie sich nun aus den letzteren nach Poinsot zwei Kegel construiren lassen, durch deren successives Abrollen ein deutliches Bild für die Drehung gewonnen wird, so können aus den Grössen der Biegung und Drillung zwei windschiefe Flächen erzeugt werden, durch deren successives Aufeinanderbiegen die Ueberführung des geraden und ungedrillten elastischen Stabes in seinen gebogenen und gedrillten Gleichgewichtszustand versinnlicht wird. Alle Ausführungen über Winkelgeschwindigkeiten bezw. die Poinsot'schen Kegel sind übertragbar auf die Deformationsgrössen der Biegung und Drillung bezw. die windschiefen Flächen. Dagegen können Fragen, welche sich auf die Form des gebogenen Stabes beziehen, durch die Betrachtung des Rotationsproblems nicht beantwortet werden. Mit diesen, insbesondere mit der Aufstellung der Gleichungen der gebogenen elastischen Centrallinie, mit den verschiedenen Typen der letzteren und mit speciellen Fällen des Problems befasst sich die zweite Hälfte der Abhandlung.

Die Resultate der Untersuchung finden sich bei den einzelnen Paragraphen genauer besprochen. Hervorgehoben mag nur noch werden, dass das vorliegende Problem der Biegung und Drillung eines elastischen Stabes sowohl für den allgemeinen Fall als für Specialfälle viel ausgedehnter ist als jenes der Bewegung — hauptsächlich aus dem Grunde, weil die zwei Widerstände des Stabes gegen Biegung von dem Widerstande gegen Drillung individuell ebenso verschieden sind, wie Biegung und Drillung selbst, während die 3 Hauptträgheitsmomente des Körpers, welchen diese Deformationswiderstände entsprechen, Grössen derselben

*) Sur la rotation d'un corps. Op. II. 139—197.

**) Théorie nouvelle de la rotation des corps. Liouv. J. 1851. 9—129, 289—336.

***) Das Rollen einer Fläche 2. Grades auf einer invariablen Ebene. München 1880 oder Progr. der Kreisrealsch. München 1881.

Art sind. Während es für die letzteren genügt, eine einzige Anordnung hinsichtlich ihrer Grösse zu treffen, sind bei dem vorliegenden Problem die 3 Möglichkeiten zu unterscheiden, dass der Widerstand gegen Drillung unter den 3 Widerständen der numerisch kleinste, mittelste oder grösste ist.

Fixirung des Problems.

1.

Wir denken uns einen geraden und ungedrillten elastischen Stab, dessen Querschnitt im Vergleich zur Länge L des Stabes sehr dünn (unendlich dünn) ist — einen *Draht* — halten das eine Ende fest und lassen auf den Querschnitt des freien Endes ein Kräftepaar von der Intensität l einwirken, dessen Axe eine beliebige Richtung besitzt. Dann wird die gerade elastische Centrallinie oder die Axe des Stabes, d. i. die Verbindungslinie der Massenmittelpunkte der einzelnen Querschnitte, in eine Curve gebogen und gleichzeitig der Querschnitt jedes Punktes P der Centrallinie um die Tangente der letzteren in P gedreht — der Stab erscheint gebogen und gedrillt.

Wählt man die Tangente zur Axe Z', die Hauptträgheitsaxen des Querschnittes zu Axen X', Y', so bilden $X'Y'Z'$ das rechtw. Coordinatensystem der 3 *Hauptaxen* des Stabes. Nach diesen können die Widerstände wirkend gedacht werden, welche der Stab der beabsichtigten Deformation entgegensetzt, nach X', Y' die Hauptwiderstände gegen *Biegung*, nach Z' der Hauptwiderstand gegen *Drillung*.

Vor der Einwirkung des Kräftepaars l werden die Axen Z' alle in die gerade Stabaxe fallen, die Axen X', Y' unter sich parallel sein. Nach der Deformation werden die Lagen der 3 Hauptaxen, je nach der Bogenentfernung s ihres Anfangspunktes P vom freien Endquerschnitt, andere und andere werden, also abhängig von s sein. Dieselben sind bekannt, sobald ihre Neigungscosinus

$$a, b, c;\ a', b', c';\ a'', b'', c''$$

gegen die 3 festen Coordinatenaxen

$$X;\ Y;\ Z$$

eines mit $X'Y'Z'$ congruenten Systems in Functionen von s vorliegen.

Nun führt die Bestimmung der a, b, c nach Kirchhoff zunächst auf dieselben Gleichungen, wie sie bei der Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt O auftreten, nämlich auf die Euler'schen Gleichungen*):

*) Wir entnahmen dieselben dem Buche von Clebsch: Theorie der Elastic. fest. Körp. 1862. 211. Abgesehen von anderer Bezeichnung der Grössen A, B, C;

$$A \cdot \frac{dp}{ds} + (B - C)\, qr = 0,$$

$$(1) \qquad B \cdot \frac{dq}{ds} + (C - A)\, rp = 0,$$

$$C \cdot \frac{dr}{ds} + (A - B)\, pq = 0.$$

Es entsprechen hierbei

den 3 Hauptträgheitsaxen X', Y', Z' durch den Schwerpunkt O des rotirenden Körpers

den Hauptträgheitsmomenten A, B, C des Körpers um X', Y', Z'

dem zur Bewegung anregenden Kräftepaar l

der Fortschreitung ds in der Zeit s (s gerechnet von der Anfangszeit $s_0 = 0$ an)

den Winkelgeschwindigkeitscomponenten p, q, r um die 3 Hauptaxen X', Y', Z' zur Zeit s

den Componenten Ap, Bq, Cr des momentan anregenden Kräftepaars um X', Y', Z', welche gerade geeignet sind, die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r um diese Axen hervorzubringen

die 3 Hauptaxen X', Y' (gegen Biegung) und Z' (gegen Drillung) durch einen Punkt P der elastischen Centrallinie des Stabes;

die *Hauptwiderstandsmomente* A, B und C des Stabes gegen Biegung um X', Y' und gegen Drillung um Z';

das auf den freien Endquerschnitt einwirkende Kräftpaar l;

die Fortschreitung ds auf dem Bogen s der Centrallinie (s gerechnet vom freien Ende $s_0 = 0$ an);

die *Krümmungs*componenten*) p, q der Biegung um X', Y' und r der Drillung um Z' für die Bogenentfernung s;

die Componenten Ap, Bq, Cr des in einem Punkt P der elast. Centrallinie durch das afficirende Paar l hervorgerufenen Kräftepaars, welches, die *Spannung* in diesem Punkte anzeigend, gerade geeignet ist, die Krümmungscomponenten p, q, r daselbst zu erzeugen.

Aus der Analogie zwischen den Componenten der Drehgeschwindigkeit und der Krümmung folgt, dass die letzteren Componenten ganz ebenso zusammengesetzt und zerlegt werden dürfen wie die ersteren. Es bedeuten daher, je nach dem vorliegenden Problem:

---

p, q, r unterscheiden sich unsere Formeln von denen Clebsch's dadurch, dass wir ds statt $-ds$ zu setzen haben, da wir den Bogen s vom freien Ende an zählen, während Cl. denselben vom festen Ende ab rechnet. Die Kräftepaare sind rechts drehend zu denken.

*) „Krümmung" steht hier für „Deformation"; der in der Curventheorie übliche Begriff „Krümmung" ist durch „Biegung" ersetzt. Cf. Thomson u. Tait, Handbuch der theor. Physik, Nr. 593 u. ff. 1874.

$\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ die Grösse der Winkelgeschwindigkeit zur Zeit s längs der instantanen Drehungsaxe Θ,

$l = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$ die Grösse des zur Zeit s anregenden Kräftepaars längs der instantanen Kräftepaaraxe l,

$\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ die Componente der instantanen Winkelgeschwindigkeit Θ bezüglich der Hauptebene $X'Y'$ zur Zeit s,

$\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ die Grösse der Krümmung d. i. der gesammten Deformation in einem Punkte von der Bogenentfernung s längs der *instantanen Krümmungsaxe* Θ;

$l = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$ die Grösse der in der Bogenentfernung s entstehenden Spannung längs der instantanen *Spannungsaxe* l;

$\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ die Componente der instantanen Krümmung Θ bezüglich der Querschnittsebene $X'Y'$ d. i. die Grösse reiner Biegung für die Entfernung s.

Hat man die Euler'schen Differentialgleichungen gelöst, so dienen die Relationen

$$(2) \qquad da = (br - cq) \cdot ds, \qquad da' = (b'r - c'q) \cdot ds,$$
$$da'' = (b''r - c''q) \cdot ds \text{ u. s. w.}$$

zur Bestimmung der 9 Neigungscosinus $a, b, c, \ldots, c''$. Die letzteren hängen übrigens durch die der orthogonalen Substitution entspringenden Bedingungen zusammen:

$$(3) \quad a = b'c'' - b''c', \quad a' = b''c - bc'', \quad a'' = bc' - b'c \text{ u. s. w.}$$

Die Tangente Z' eines Punktes P der elastischen Centrallinie bildet mit den festen Coordinatenaxen X, Y, Z Winkel, deren Cosinus bezw. c, c', c'' sind. Für die Coordinaten x, y, z des Punktes P bezüglich dieses Systems hat man also die Differentialgleichungen

$$(4) \qquad dx = c \cdot ds, \quad dy = c' \cdot ds, \quad dz = c'' \cdot ds.$$

Integrirt man dieselben, so erhält man die Coordinaten x, y, z in Functionen von s d. h. die Gleichungen der gebogenen Centrallinie. Sind aber für einen Punkt P der letzteren die Grössen p, q, r der Biegung und Drillung bekannt, sind ferner die Lagen der 3 durch ihn gehenden Hauptaxen X', Y', Z' gegen ein festes Coordinatensystem X, Y, Z gegeben und ist überdies jede Coordinate von P bezüglich dieses Systems durch s ausgedrückt, so ist der Gleichgewichtszustand des elastischen Stabes im Wesentlichen als bekannt zu betrachten.

Krümmungsverhältnisse der einzelnen Querschnitte.

2.

Aus den Euler'schen Gleichungen lassen sich durch Multiplication mit Ap, Bq, Cr; a, b, c; $a' \ldots c''$ und jedesmalige Addition

unter Berücksichtigung der Relationen (2) folgende Integralgleichungen ableiten:

$$(5) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const.} = l^2.$$

$$(6) \qquad \begin{cases} Apa + Bqb + Crc = \text{const.} = l_1, \\ Apa' + Bqb' + Crc' = \text{const.} = l_2, \\ Apa'' + Bqb'' + Crc'' = \text{const.} = l_3 = \sqrt{l^2 - l_1^2 - l_2^2}. \end{cases}$$

Dieselben ergeben für die Rotation den Satz: „Das den Körper angreifende Kräftepaar l bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung nach Intensität und Stellung constant. Die Ebene desselben ist eine invariable Ebene, die Axe eine invariable Axe des Raumes." Dieser Satz lautet, auf den Stab übertragen:

Die in jedem Querschnitt vermöge der Einwirkung des den freien Endquerschnitt angreifenden Kräftepaares l zu Tage tretende Spannung ist repräsentirt durch ein Kräftepaar, welches mit l constante Grösse und Stellung besitzt. Die Ebene und Axe des letzteren besitzen also im Raume invariable Stellung und Richtung.

Multiplicirt man die Euler'schen Gleichungen mit p, q, r und addirt, so wird

$$(7) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.} = h,$$

was auch geschrieben werden kann

$$(8) \qquad \Theta \cdot \cos(\Theta l) = \text{const.} = \frac{h}{l}.$$

Dies heisst für das Rotationsproblem: „Die Componenten der instantanen Drehgeschwindigkeit Θ längs der invariablen Axe des anregenden Kräftepaars l bleibt für die ganze Dauer der Bewegung constant." Direct übertragen ergiebt sich:

Die Componente der Krümmung Θ eines Querschnittes auf die invariable Richtung der Spannung l in demselben ist für alle Querschnitte constant.

Hieraus darf natürlich nicht geschlossen werden, dass die Projection der elastischen Centrallinie auf die zur Axe l senkrecht stehende invariable Ebene ein Kreis sei. Denn die um l wirkend gedachte Krümmungscomponente $\frac{h}{l}$ setzt sich zusammen aus Biegung und Drillung, ist also nicht eine Grösse reiner Biegung. Da die Biegungsaxen für einen Punkt der Centrallinie stets in den Querschnitt fallen, so können Biegungen auch nur um Axen, welche in der Querschnittsebene gezogen werden, also auf dem Bogenelement ds senkrecht stehen, nach der Methode der Projection zusammengesetzt und zerlegt werden. Will man die Grösse reiner Biegung wissen, welche längs einer beliebigen Geraden zum Vorschein kommt, so genügt eine einfache Multiplication mit dem Cosinus des Neigungswinkels nicht,

sondern es sind successive die zwei leicht nachweisbaren Sätze anzuwenden: „Die Biegung der Projection einer Raumcurve auf eine Ebene, welche mit der Schmiegungsebene den Winkel α einschliesst, ist gleich der Biegung der Raumcurve, multiplicirt mit $\cos\alpha$ oder $\sec^2\alpha$, je nachdem die Ebene dem Bogenelement ds oder der Hauptnormale im betrachteten Curvenpunkte parallel ist."

Fasst man die Grössen p, q, r der mit der Zeit s veränderlichen Winkelgeschwindigkeit des rotirenden Körpers als Coordinaten eines Punktes P bezüglich der 3 Hauptaxen X', Y', Z' auf, indem man eben vom Schwerpunkt O aus auf jeder instantanen Drehungsaxe die Winkelgeschwindigkeit Θ der Drehung als Strecke aufträgt, so repräsentiren die Gleichungen (5) und (7) zwei Ellipsoide, von denen das letztere das Poinsot'sche *Centralellipsoid* ist. Die Axen desselben sind identisch mit den 3 Hauptträgheitsaxen, ihre Längen proportional den Quadratwurzeln aus den Hauptträgheitsmomenten A, B, C. Die durch das Zusammenbestehen vorgenannter Gleichungen definirte Raumcurve 4. Ordnung ist die Poinsot'sche *Polodie* und der sich ergebende Kegel zweiten Grades

$$Ap^2(Ah - l^2) + Bq^2(Bh - l^2) + Cr^2(Ch - l^2) = 0 \tag{9}$$

der Kegel der Polodie.

Construirt man ganz ebenso aus den mit dem Bogen s veränderlichen Krümmungscomponenten p, q, r die augenblickliche Krümmungsaxe Θ, so sind alle diese Axen den Erzeugenden eines Kegels 2. Grades (9) parallel und bilden in ihrer Gesammtheit eine windschiefe Fläche, diejenige der Polodie*). Trägt man auf jeder Axe Θ die Grösse der Krümmung Θ vom Punkte P der Centrallinie aus als Strecke auf, so liegen die Endpunkte aller solcher Strecken auf einer transcendenten Curve, der Polodie*). Näheres hierüber s. Paragraph 5.

3.

Der Poinsot'sche Kegel (9) der Polodie ist immer reell, es können also die 3 in seiner Gleichung auftretenden Differenzen nicht alle das gleiche Vorzeichen besitzen. Setzen wir $A > B > C$ voraus, was wegen der Gleichartigkeit der Trägheitsmomente erlaubt ist, so folgt also:

$$Ah - l^2 > 0, \quad Ch - l^2 < 0, \quad Bh - l^2 \gtrless 0,$$

d. h.: „Der Kegel der Polodie ist niemals um die Axe des mittleren Trägheitsmomentes beschrieben, sondern lediglich um jene des grössten oder kleinsten Momentes."

Für den Stab darf nicht willkürlich $A > B > C$ angenommen werden, weil der Widerstand des Stabes gegen Drillung von anderen

*) Unter Beibehaltung der Bezeichnungen Poinsot's.

Einflüssen abhängig ist als einer der Widerstände gegen Biegung*). Es muss also unterschieden werden, ob der erstere unter den 3 Hauptwiderständen überhaupt der kleinste, mittelste oder grösste ist. Wir setzen deshalb nach einander

$$A > B > C; \quad B > C > A; \quad C > A > B.$$

Für die erste Festsetzung ergiebt sich dann, da auch hier der Kegel (9) stets reell ist, wie oben

$$Ah - l^2 > 0, \quad Ch - l^2 < 0, \quad Bh - l^2 \gtrless 0,$$

und analog für die beiden andern Annahmen. Dies bedeutet:

„Der Kegel 2. Grades, dessen Erzeugenden die für die Ruhelage des Stabes verzeichneten Krümmungsaxen parallel sind, scheint niemals um die Axe des numerisch mittleren der 3 Hauptwiderstände beschrieben, sondern lediglich um jene des grössten oder kleinsten Widerstandes".

Construirt man, wie aus p, q, r die instantane Drehungsaxe Θ, so aus den Componenten Ap, Bq, Cr die Axe des momentan wirkenden Kräftepaars l bezüglich des ruhend angenommenen Körpers, so erhält man wieder einen Kegel 2. Grades, den Kegel der Kräftepaaraxen. Derselbe ist wieder nur um die Hauptaxe grössten oder kleinsten Trägheitsmomentes beschrieben, weshalb man passend die Anfangslage der Axe des anregenden Paares in derjenigen Hauptebene des Centralellipsoids annimmt, welche von den Hauptaxen grössten und kleinsten Momentes gebildet wird. Die Anfangslage der instantanen Drehungsaxe fällt dann in dieselbe Ebene.

Construirt man aus den Spannungscomponenten Ap, Bq, Cr für jeden Punkt P der undeformirten elastischen Centrallinie des Stabes die Axe der auftretenden Spannung l, so sind dieselben wieder den Erzeugenden eines Kegels 2. Grades parallel und bilden in ihrer Gesammtheit wieder eine windschiefe Fläche, die windschiefe Fläche der Kräftepaaraxen. Da der erwähnte Kegel stets um die Hauptaxe des grössten oder kleinsten Hauptwiderstandes beschrieben ist, so wird die Axe des auf den freien Endquerschnitt einwirkenden Kräftepaares l am Besten in der von diesen 2 Hauptaxen gebildeten Ebene angenommen. Dieselbe fällt beispielsweise in den freien Querschnitt, wenn der Widerstand gegen Torsion der numerisch mittelste unter den 3 Widerständen ist.

Die bei der Festsetzung der Grössenordnung $A > B > C$ sich ergebenden Ungleichungen

$$Ah - l^2 > 0, \quad Ch - l^2 < 0, \quad Bh - l^2 \gtrless 0$$

gaben Aufschluss über die Lage der Kegel 2. Ordnung, deren Erzeugenden von den instantanen Drehungsaxen gebildet wurden resp.

*) Clebsch a. a. O. p. 196.

den instantanen Krümmungsaxen parallel waren. Dieselben können nun auch anders ausgelegt werden; sie bedeuten für die Rotation: „Der Abstand der invariablen Ebene vom Mittelpunkte des Centralellipsoids kann niemals grösser sein als die grösste, niemals kleiner als die kleinste Halbaxe des Ellipsoids, wohl aber grösser oder kleiner als die mittlere Halbaxe.“ Eine ähnliche Deutung könnte auch für das Problem des Stabes acceptirt werden, indem man für einen Punkt P der elastischen Centrallinie das dem Centralellipsoid entsprechende Ellipsoid (7) verzeichnet. Man kann jedoch die Ungleichungen in einem dem Wesen des elastischen Stabes mehr angepassten Sinne erklären, indem man statt $Ah - l^2 > 0$ u. s. w. schreibt:

$$\frac{Ap}{l} > \frac{p}{\frac{h}{l}} \text{ u. s. w., oder auch } \frac{h}{l} \cdot \frac{Ap}{l} > p \text{ u. s. w.}$$

Unter Berücksichtigung der Relation (8) folgen daraus die beiden Sätze:

Das Verhältniss der Spannungscomponente längs der Hauptaxe grössten; kleinsten; mittelsten Widerstandes zur unveränderlichen Spannung längs der Kräftepaaraxe ist für alle Punkte grösser; kleiner; grösser oder kleiner als das Verhältniss der nach denselben Axen geschätzten Krümmungsantheile. — Die Projection der in der invariablen Richtung der Spannungsaxen auftretenden constanten Krümmung $\frac{h}{l}$ auf die Axe grössten; kleinsten; mittelsten Widerstandes ist grösser; kleiner; grösser oder kleiner als die daselbst zum Vorschein kommende Krümmungscomponente.

Da für $Bh - l^2 > 0$ der Kegel der instantanen Drehungsaxen um die Axe Z' des Hauptträgheitsmomentes C, für $Bh - l^2 < 0$ um die Axe X' des Momentes A beschrieben erscheint, so kann im ersteren Falle die Componente r, im letzteren p niemals 0 werden. Es müssen also, da die Euler'schen Gleichungen p, q, r als mit sinam u, cosam u, Δ am u proportional erscheinen lassen ($u = n \cdot s$, n constant), in diesen Fällen r bezw. p proportional mit Δ am u sein. Da überdies die gewählte Anfangslage der Kräftepaaraxe in die Ebene $X'Z'$ fällt, ist $Bq_0 = 0$, also $q_0 = 0$ d. h. q proportional sinam u, und zwar für beide Fälle $Bh - l^2 \gtrless 0$. Durch Einsetzen der elliptischen Functionen in die Gleichungen (1), (5) und (7) folgen für p, q, r leicht die Werthe, welche sich in der Jacobi'schen Arbeit „sur la rotation“ vorfinden. Jacobi begreift übrigens die zwei Unterscheidungen $Bh - l^2 \gtrless 0$ in eine einzige, indem er für $Bh - l^2 > 0$ die Reihenfolge $A > B > C$, für $Bh - l^2 < 0$ $A < B < C$ annimmt. Damit sind freilich zwei verschiedene Centralellipsoide bestimmt; will man bei der Annahme $A > B > C$, also bei dem einmal gewählten Centralellipsoid bleiben, so müssen beim Uebergang

von $Bh - l^2 > 0$ auf $Bh - l^2 < 0$ in den Jacobi'schen Formeln p und r, A und C, X' und Z' vertauscht werden.

Da für das Problem des Stabes ganz dieselben Erwägungen bezüglich des Kegels Platz greifen, dessen Erzeugende den instantanen Krümmungsaxen parallel sind, so brauchen die Jacobi'schen Ausdrücke von p, q, r für $A > B > C$ nur abgeschrieben zu werden. Durch cyclische Vertauschung der Grössen A, B, C und p, q, r erhält man die Formeln für $B > C > A$, $C > A > B$. Wählen wir die Axe des den freien Querschnitt $s = 0$ angreifenden Kräftepaares in dem von den positiven Hälften der Hauptaxen grössten und kleinsten Widerstandes gebildeten Quadranten, was übrigens mit der bei der Drehung von Jacobi gewählten Anfangslage nicht übereinstimmt, so werden p, q, r ausgedrückt, wie folgt:

I. $A > B > C$. 1. $Bh - l^2 > 0$.

$$p = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}} \cdot \operatorname{cos\,am}\, u = \frac{l}{A} \sin\varphi_0 \cdot \operatorname{cos\,am}\, u,$$

$$q = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}} \cdot \operatorname{sin\,am}\, u = \frac{l}{A} \cdot \sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}} \sin\varphi_0 \cdot \operatorname{sin\,am}\, u,$$

$$r = \sqrt{\frac{Ah - l^2}{C(A-C)}} \cdot \Delta\,\operatorname{am}\, u = \frac{l}{C} \cos\varphi_0 \cdot \Delta\,\operatorname{am}\, u.$$

2. $Bh - l^2 < 0$.

$$p = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}} \cdot \Delta\,\operatorname{am}\, u = \frac{l}{A} \sin\varphi_0 \cdot \Delta\,\operatorname{am}\, u,$$

$$q = \sqrt{\frac{Ah - l^2}{B(A-B)}} \cdot \operatorname{sin\,am}\, u = \frac{l}{C} \cdot \sqrt{\frac{C(A-C)}{B(A-B)}} \cos\varphi_0 \cdot \operatorname{sin\,am}\, u,$$

$$r = \sqrt{\frac{Ah - l^2}{C(A-C)}} \cdot \operatorname{cos\,am}\, u = \frac{l}{C} \cos\varphi_0 \cdot \operatorname{cos\,am}\, u.$$

II. $B > C > A$. 1. $Ch - l^2 > 0$.

$$p = \sqrt{\frac{Bh - l^2}{A(B-A)}} \cdot \Delta\,\operatorname{am}\, u = \frac{l}{A} \cos\varphi_0 \cdot \Delta\,\operatorname{am}\, u,$$

$$q = \sqrt{\frac{l^2 - Ah}{B(B-A)}} \cdot \operatorname{cos\,am}\, u = \frac{l}{B} \sin\varphi_0 \cdot \operatorname{cos\,am}\, u,$$

$$r = \sqrt{\frac{l^2 - Ah}{C(C-A)}} \cdot \operatorname{sin\,am}\, u = \frac{l}{B} \cdot \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}} \sin\varphi_0 \cdot \operatorname{sin\,am}\, u,$$

(10)

2. $Ch - l^2 < 0$.

$$p = \sqrt{\frac{Bh - l^2}{A(B-A)}} \cdot \operatorname{cos\,am}\, u = \frac{l}{A} \cos\varphi_0 \cdot \operatorname{cos\,am}\, u,$$

$$q = \sqrt{\frac{l^2 - Ah}{B(B-A)}} \cdot \Delta\,\operatorname{am}\, u = \frac{l}{B} \sin\varphi_0 \cdot \Delta\,\operatorname{am}\, u,$$

$$r = \sqrt{\frac{Bh - l^2}{C(B-C)}} \cdot \operatorname{sin\,am}\, u = \frac{l}{A} \cdot \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(B-C)}} \cos\varphi_0 \cdot \operatorname{sin\,am}\, u,$$

III. $C>A>B$. 1. $Ah-l^2>0$.

$$p=\sqrt{\frac{l^2-Bh}{A(A-B)}}\cdot\operatorname{sn}\operatorname{am}u=\frac{l}{C}\cdot\sqrt{\frac{C(C-B)}{A(A-B)}}\sin\varphi_0\cdot\operatorname{sn}\operatorname{am}u,$$

$$q=\sqrt{\frac{Ch-l^2}{B(C-B)}}\cdot\Delta\operatorname{am}u=\frac{l}{B}\cos\varphi_0\cdot\Delta\operatorname{am}u,$$

$$r=\sqrt{\frac{l^2-Bh}{C(C-B)}}\cdot\operatorname{cn}\operatorname{am}u=\frac{l}{C}\sin\varphi_0\cdot\operatorname{cn}\operatorname{am}u.$$

2. $Ah-l^2>0$.

$$p=\sqrt{\frac{Ch-l^2}{A(C-A)}}\cdot\operatorname{sn}\operatorname{am}u=\frac{l}{B}\cdot\sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)}}\cos\varphi_0\cdot\operatorname{sn}\operatorname{am}u,$$

$$q=\sqrt{\frac{Ch-l^2}{B(C-B)}}\cdot\operatorname{cn}\operatorname{am}u=\frac{l}{B}\cos\varphi_0\cdot\operatorname{cn}\operatorname{am}u,$$

$$r=\sqrt{\frac{l^2-Bh}{C(C-A)}}\cdot\Delta\operatorname{am}u=\frac{l}{C}\sin\varphi_0\cdot\Delta\operatorname{am}u.$$

Der Modul $\varkappa$ und die Constante n in $u=n\cdot s$ sind für

$A>B>C$. 1. $Bh-l^2>0$.

$$\varkappa=\sqrt{\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}}=\sqrt{\frac{C(A-B)}{A(B-C)}}\operatorname{tg}\varphi_0,$$

$$n=\sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}=\frac{1}{C}\cdot\sqrt{\frac{(B-C)(A-C)}{AB}}\cos\varphi_0.$$

2. $Bh-l^2<0$.

$$\varkappa=\sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{(A-B)(l^2-Ch)}}=\sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}}\operatorname{cotg}\varphi_0,$$

$$n=\sqrt{\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{ABC}}=\frac{1}{A}\cdot\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{BC}}\sin\varphi_0.$$

Hierin bedeutet φ_0 den Winkel, welchen die Axe des angreifenden Paares, die ja in die Ebene aus den Hauptaxen grössten und kleinsten Widerstandes fällt, mit der Hauptaxe kleinsten Widerstandes bildet. Für $A>B>C$ und $Bh-l^2>0$ werden dann im freien Endquerschnitt $Bq_0=0$, $Ap_0=l\cdot\sin\varphi_0$, $Cr_0=l\cdot\cos\varphi_0$ und zufolge der Gleichungen (5), (7)

$$Ah-l^2=\frac{l^2}{C}(A-C)\cdot\cos^2\varphi_0,\quad l^2-Ch=\frac{l^2}{A}(A-C)\cdot\sin^2\varphi_0.$$

Nennt man allgemein die Winkel der Kräftepaaraxe mit den 3 Hauptaxen X', Y', Z' bezw. μ, ν, ϱ, so kann, da aus (5), (7)

$$Bh-l^2=Ap_0^2(A-B)-Cr_0^2(B-C)=\cos^2\mu\cdot\frac{A-B}{A}-\cos^2\varrho\cdot\frac{B-C}{C}$$

folgt, statt

$$Bh-l^2\gtrless 0$$

geschrieben werden

$$\frac{\cos\mu}{\cos\varrho} \gtreqless \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}}.$$

Es entscheidet also über den Fall, ob $Bh - l^2 \gtreqless 0$ sei, die Richtung der Kräftepaaraxe. *Ist dieselbe in einer derjenigen 2 Ebenen gelegen, welche, durch die Hauptaxe Y' mittlerer Biegung gehend, die Gleichung*

$$\frac{x'}{y'} = \pm\sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}}$$

besitzen, so ist $Bh - l^2 = 0$ *und es tritt ein Specialfall ein* (s. § 10). Für die 5 andern Festsetzungen gelten die gleichen Ueberlegungen.

4.

Aus den Gleichungen für p, q, r folgt zunächst, dass letztere im Allgemeinen periodisch sind mit der Periode $4K$ von u, bis auf das Vorzeichen jedoch auch für u und $2K \pm u$ gleiche Werthe annehmen, so dass die absoluten Grössen der Biegung und Drillung nur berechnet zu werden brauchen für ein Stabstück, dessen Länge durch die Parameterwerte u und K festgelegt, also $\frac{K}{n}$ ist. Je nach der Wahl einer der obigen 6 Festsetzungen ergeben sich für die Krümmung des elastischen Stabes verschiedene Eigenthümlichkeiten. Die Art und Weise ihrer Aenderung ersieht man in leicht verständlicher Abkürzung aus folgenden Tabellen, welche für $A > B > C$, $Bh - l^2 > 0$ und $Bh - l^2 < 0$ aufgestellt werden können:

	$u=0$	$<K$	$=K$	$<2K$	$=2K$	$<3K$	$=3K$	$<4K$	$=4K$
1.	$+p_{max}$	$+p$	0	$-p$	$-p_{max}$	$-p$	0	$+p$	$+p_{max}$
	0	$+q$	$+q_{max}$	$+q$	0	$-q$	$-q_{max}$	$-q$	0
	$+r_{max}$	$+r$	$+r_{min}$	$+r$	$+r_{max}$	$+r$	$+r_{min}$	$+r$	$+r_{max}$
2.	$+p_{max}$	$+p$	$+p_{min}$	$+p$	$+p_{max}$	$+p$	$+p_{min}$	$+p$	$+p_{max}$
	0	$+q$	$+q_{max}$	$+q$	0	$-q$	$-q_{max}$	$-q$	0
	$+r_{max}$	$+r$	0	$-r$	$-r_{max}$	$-r$	0	$+r$	$+r_{max}$

Aehnliche Tabellen gelten für die andern 4 Unterscheidungsfälle. Dieselben lassen erkennen:

„Ist der Widerstand des Stabes gegen Torsion unter den 3 Hauptwiderständen der mittelste (II), so kann die Drillung des Stabes nicht fortwährend im nämlichen Sinne erfolgt sein, sondern es existiren nothwendig Querschnitte, zu deren beiden Seiten der Stab im entgegengesetzten Sinne tortirt erscheint. Diese Querschnitte selbst haben keine Drehung in ihrer Ebene erfahren und für alle Querschnitte,

welche von ihnen nach links oder rechts gleichweit entfernt liegen, ist die absolute Grösse der Drillung die gleiche." — „Ist der Widerstand gegen Torsion unter den 3 Hauptwiderständen der kleinste (I) oder grösste (III), so kann in einem der beiden Unterfälle (I, 1 und III, 2*) der Sinn der Torsion niemals wechseln: sämmtliche Querschnitte des Stabes erscheinen im nämlichen Sinne verdreht und es wechselt die Grösse der Torsion zwischen einem Minimum und einem Maximum. In den anderen Unterfällen (I, 2 und III, 1) wechselt dagegen die Richtung der Drillung wieder."

Aehnliche Sätze ergeben sich für jede Biegungscomponente. Ist ein Widerstand gegen Biegung unter den 3 Widerständen der numerisch mittelste, so muss der Sinn der Biegung längs der Axe desselben immer durch 0 hindurchwechseln; da, wo die Biegungscomponente 0 wird, ist die Hauptebene aus der kritischen Axe und der Torsionsaxe Schmiegungsebene der elastischen Centrallinie geworden. Ist ein Biegungswiderstand der numerisch kleinste oder grösste Widerstand, so kann wieder in je einem der 2 Unterfälle der Sinn der Biegungscomponente wechseln, im andern nicht.

Was die Intensitäten der Krümmungscomponenten anlangt, so ist die nach der Hauptaxe des grössten oder kleinsten Widerstandes wirkende Componente um so grösser, je kleiner dieser Widerstand ist, je stärker das anregende Kräftepaar und je kleiner die Neigung der Kräftepaaraxe gegen die bespr. Hauptaxe gewählt wird. Diese Sätze gelten dabei, für welchen Unterfall man sich auch entscheidet. Die Componente der Krümmung längs der Hauptaxe mittleren Widerstandes wächst der Intensität nach für die zwei zu unterscheidenden Unterfälle verschieden: für den ersten, wenn das anregende Kräftepaar und die Neigung seiner Axe gegen die Axe kleinsten Widerstandes wächst, wenn die beiden extremen Widerstände grösser und der mittlere kleiner werden — für den zweiten, wenn das anregende Kräftepaar und die Neigung seiner Axe gegen die Axe grössten Widerstandes wächst und wenn die beiden extremen Widerstände kleiner werden. Dagegen wächst die Componente in diesem Unterfalle mit zunehmendem mittleren Widerstand nur dann, wenn dieser grösser als die Hälfte des grössten Widerstandes ist; ist der mittlere Widerstand kleiner als die Hälfte des grössten, so sinkt die Componente bei der Zunahme des mittleren Widerstandes.

Die aus den Krümmungscomponenten p, q, r sich zusammensetzende Gesammtkrümmung $\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ wird für alle Fälle ein Maximum für das freie Ende und für jene Punkte des Stabes, deren Parameterwerthe u geraden Vielfachen von $2K$ gleich sind, ein

*) Die geom. Bedeutung s. im vorigen Paragraphen.

Minimum für die durch ungerade Vielfache von u bedingten Punkte. Die Intensität derselben vergrössert sich mit zunehmender Stärke des Kräftepaars, mit abnehmender jedes der 3 Widerstände und des Neigungswinkels zwischen der Kräftepaaraxe und der Hauptaxe kleinsten Widerstandes.

Die Grössen $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ reiner Biegung wird in den durch die Parameterwerthe $u = 0,\ 2K,\ 4K \ldots$ festgelegten Punkten der elast. Centrallinie Maximum, wenn der Drillungswiderstand unter den 3 Widerständen der mittelste, Minimum, sobald er der kleinste ist. Ist der Widerstand gegen Drillung der numerisch stärkste, so tritt Maximum oder Minimum ein, je nachdem derselbe grösser oder kleiner als die Summe der Biegungswiderstände ist. Für $n = K, 3K, 5K \ldots$ treten dann bezw. Minima oder Maxima auf. Die Intensität der Biegung wächst im Allgemeinen für eine Vergrösserung der Intensität des anregenden Kräftepaars und für eine Verminderung der 3 Hauptwiderstände; bei zunehmendem Neigungswinkel der Kräftepaaraxe gegen die Axe des kleinsten Widerstandes kann dagegen die Biegungsstärke zu oder abnehmen.

Die Ueberführung des geraden und ungedrillten elastischen Stabes in seine Gleichgewichtslage durch das Aufeinanderbiegen zweier windschiefen Flächen.

5.

Der um seinen Schwerpunkt O rotirende starre Körper drehe sich während eines unendlich kleinen Zeittheilchens ds um die instantane Drehungsaxe $O\Theta$, mit der Winkelgeschwindigkeit Θ_1, so wird dadurch eine der Axe $O\Theta_1$ benachbarte Axe $O\Theta_2$ in eine Lage $O\vartheta_2$ übergeführt und nunmehr selbst instantane Drehungsaxe. Der Körper rotirt um sie mit der Winkelgeschwindigkeit Θ_2; durch die nunmehrige Rotation wird eine Nachbarlage $O\Theta_3$ von $O\Theta_2$ nach $O\vartheta_3$ versetzt, um im nächsten Augenblicke Drehungsaxe zu werden, u. s. f. Es scheint so, als ob der Kegel $O\Theta_1\Theta_2O_3 \ldots$ der instanten Drehaxen, welchen man für den ruhend gedachten Körper aus den Componenten p, q, r construiren kann, auf einem andern festen Kegel $O\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \ldots$ des Raumes ohne Gleiten abrolle, indem er mit letzterem in jedem Augenblicke eine Erzeugende, die instantane Drehungsaxe, gemein hat. Der Kegel $O\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \ldots$ ist der bereits in Paragraph 2 erwähnte Poinsot'sche Kegel der Polodie, der Kegel $O\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \ldots$ ist der Poinsot'sche Kegel der *Herpolodie*. Die Endpunkte $\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \ldots$ bezw. $\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 \ldots$ der instantanen Drehungsaxen bilden die Curven der Polodie und Herpolodie; von denselben ist die Polodie eine Raumcurve 4. Ordnung, gelegen auf dem Centralellipsoid, die Herpolodie

eine ebene, transcendente Curve ohne Wendepunkte*), gelegen in der invariablen Ebene des angreifenden Kräftepaars.

Denkt man sich für jeden Punkt P der elastischen Centrallinie des geraden und ungedrillten Stabes aus den Krümmungscomponenten p, q, r die instantane Krümmung Θ nach Grösse und Richtung verzeichnet, so giebt die entstandene Linie $P\Theta$ die Axe an, um welche das Bogenelement ds deformiert wird, zugleich auch die Grösse der Deformation. Dreht man nun, vom freien Ende P_1 anfangend, das Bogenelement $\overline{P_1 P_2}$ längs der Krümmungsaxe $P_1\Theta_1$ um die vorgeschriebene Grösse $\Theta_1 \cdot ds$ (indem man etwa das Bogenelement um die Biegungsgrösse $\Theta_1' \cdot ds$ längs der Axe reiner Biegung und hierauf um die Drillungsgrösse $r_1 \cdot ds$ längs der Stabaxe dreht), hält $\overline{P_1 P_2}$ fest und dreht $\overline{P_2 P_3}$ längs $P_2 O_2$ um $\Theta_2 \cdot ds$, hält wieder $\overline{P_2 P_3}$ fest und dreht $\overline{P_3 P_4}$ längs $P_3\Theta_3$ um $\Theta_3 \cdot ds$ u. s. w., so wird durch diese successiven Drehungen die gerade elastische Centrallinie in ihre Gleichgewichtslage übergeführt und jeder Querschnitt in seiner Ebene gedreht. Die Krümmungsaxen $P_1\Theta_1$, $P_2\Theta_2$, $P_3\Theta_3$, ..., welche vorher eine windschiefe Fläche, die in § 2 erwähnte Fläche der Polodie, bildeten, liegen nunmehr auf einer neuen, windschiefen Fläche, deren Leitlinie die gebogene, elastische Centrallinie ist. Wir nennen dieselbe nach dem Poinsot'schen Kegel der Herpolodie die *windschiefe Fläche der Herpolodie*, die von den Endpunkten der instantanen Krümmungsaxen gebildeten transcendenten Curven analog Polodie und Herpolodie. Wir sehen also:

*Die Ueberführung eines geraden und ungedrillten elastischen Stabes, dessen eines Ende von Kräften***) angegriffen wird, in seine Gleichgewichtslage kann versinnlicht werden durch das Aufbiegen einer biegsamen windschiefen Fläche auf eine feste windschiefe Fläche, mit welcher die erstere in jedem Augenblicke eine Erzeugende, die instantane Krümmungsaxe, gemein hat. Die Leitlinien der beiden Flächen sind die gerade und die gebogene elastische Centrallinie des Stabes.*

In unserem Falle der Einwirkung eines blossen Kräftepaares sind die Erzeugenden der windschiefen Fläche parallel den Erzeugenden eines Kegels zweiten Grades, jene der festen windschiefen Fläche parallel den Erzeugenden eines transcendenten Kegels. Die Coordinaten der Polodie für das Rotationsproblem sind bezüglich der drei Hauptträgheitsaxen $O\,X'\,Y'\,Z'$ direct

$$x' = p, \quad y' = q, \quad z' = r,$$

die Gleichungen des Kegels der Polodie

*) Vgl. meine oben citirte Dissertation.

**) Dieser Satz gilt allgemein.

$$x' = \omega \cdot p, \quad y' = \omega \cdot q, \quad z' = \omega \cdot r,$$

worin ω eine willkürliche Constante bedeutet, deren Elimination in Verbindung mit der Elimination von u, durch welche p, q, r laut (10) ausgedrückt sind, wieder die Gleichung des Kegels in der Form (9) erscheinen lässt. Durchläuft ω eine Reihe von Werthen, so erhält man Curven, welche der Polodie ($\omega = 1$) ähnlich sind, und deren jede natürlich als Polodie betrachtet werden könnte.

Für den geraden elastischen Stab sind die Gleichungen der Polodie, d. i. der Curve der Endpunkte der instantanen Krümmungsaxen bezüglich des im freien Endquerschnitt festgelegten Systems der Hauptaxen $X'\ Y'\ Z'$

$$x' = p, \quad y' = q, \quad z' + s = r. \tag{12}$$

In diese Gleichungen sind $s = \frac{u}{n}$ und die Werthe der Grössen p, q, r aus den Gleichungen (10) einzusetzen. Da die Substitution auf sechsfache Art vollzogen werden kann, so lassen sich also für die Polodie 6 verschiedene Typen aufzählen, die jedoch auf 3 wesentlich verschiedene sich zusammenziehen lassen, dadurch charakterisirt, dass in der Gleichung $z' + s = r$ für die Drillungsgrösse r einmal die Function sin am u, das anderemal cos am u, das drittemal Δ am u eingeführt werden kann. Die Gleichungen zeigen:

Die Polodie für den elastischen Stab ist eine transcendente Curve, welche auf einem um die gerade Stabaxe beschriebenen Cylinder zweiten Grades gelegen ist. Die Projection derselben auf die Ebene des Querschnittes $X'\ Y'$ d. i. das Profil des Cylinders ist eine Vollellipse, sobald der Torsionswiderstand der kleinste oder grösste ist und zugleich der Sinn der Drillung niemals durch 0 hindurch wechselt (I, 1 *und* III, 2 *von* (10))*); *die Projection ist ein Ellipsenbogen, sobald der Torsionswiderstand wieder der kleinste oder grösste ist, aber Querschnitte vorkommen, welche in ihrer Ebene nicht gedreht wurden* (I, 3 *und* III, 1); *die Projection ist ein Hyperbelbogen jedesmal, wenn der Torsionswiderstand unter den* 3 *Hauptwiderständen der mittelste ist* (II). *Die Projectionen der Polodie auf die zwei andern Hauptebenen $Y'Z'$ und $Z'X$ sind wellenförmige nach Art der Sinuslinie verlaufende Curven. Dieselben schneiden entweder die Stabaxe gar nicht* [*für die Ebene $Y'Z'$ in den Fällen* II, 2 *und* III, 1 *Fig.* 3] *oder sie schneiden die Axe; hiebei können sich sämmtliche Wendepunkte auf derselben Seite der Axe* [I, 2 *und* II, 1 *Fig.* 2] *oder auf verschiedenen Seiten der letzteren* [I, 1 *und* III, 2 *Fig.* 1] *befinden.*

Aus den Gleichungen (12) der Polodie können jene der biegsamen

*) Geom. Bedeutung, s. § 3.

windschiefen Fläche oder der Fläche der Polodie leicht durch Hinzunahme eines Proportionalitätsfactors ω abgeleitet werden.

$$(13) \qquad x' = \omega \cdot p, \quad y' = \omega \cdot q, \quad z' + \frac{u}{n} = \omega \cdot r.$$

Durch Variirung von ω gewinnt man eine ganze Schaar von Curven, welche der Polodie ähnlich sind, und deren jede als Polodie aufgefasst werden kann. Durch Elimination der Grösse ω und der in p, q, r auftretenden Variabeln u ergiebt sich die Gleichung der Fläche transcendent in Cartesischen Coordinaten.

Die Bildung der Gleichung der Herpolodie und ihrer windschiefen Flächen erfordert die Kenntniss der Gleichungen der gebogenen elastischen Centrallinie. Sind die Coordinaten eines Punktes P der letzteren bezüglich des festen Coordinatensystems $X\,Y\,Z$ bezw. x, y, z, jene des entsprechenden Herpolodiepunktes d. i. des Endpunktes der in P existirenden Krümmungsaxe Θ bezw. ξ, η, ζ, so sind die Gleichungen der Herpolodie

$$\begin{aligned} \xi - x &= ap + bq + cr, \\ \eta - y &= a'p + b'q + c'r, \\ \zeta - z &= a''p + b''q + c''r = \text{const.} = \frac{h}{l}, \end{aligned}$$

worin $a, b, c, \ldots, c''$ die im § 1 erwähnten Neigungscosinus der Coordinatensysteme $X\,Y\,Z$ und $X'\,Y'\,Z'$ bedeuten. Die Gleichungen der windschiefen Fläche der Herpolodie ergeben sich aus den vorstehenden wieder durch Hinzufügen eines Factors ω. Die in beiden Gleichungssystemen auftretenden Functionen lassen übrigens die ersteren transcendent und derart complicirt erscheinen, welche die wirkliche Aufstellung in Function von u als zwecklos erscheinen lässt.

Die Krümmung des ganzen Stabes.

6.

Um die Gestalt der Curve zu finden, in welche die elastische Centrallinie gebogen wird, erinnern wir uns des Wesens der Krümmungscomponenten p, q, r. Dieselben waren im allgemeinen periodisch mit der Periode $4K$ von u; es ist also *die gebogene elastische Centrallinie des Stabes eine periodisch verlaufende Curve. Alle Punkte, deren Parameterwerthe sich um Vielfache der Grösse $4K$ unterscheiden, besitzen gleiche Krümmungsverhältnisse, alle durch solche Punkte abgegrenzten Curvenstücke sind congruent.*

Die Grösse der Biegung $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ kann nie 0 werden, ausser wenn $p = q = 0$ ist. Dies tritt aber nach den Gleichungen (1) nur ein, wenn das wirkende Kräftepaar um die Torsionsaxe gedreht hat, und es bleibt dann $p = q = 0$. Sieht man von diesem speciellen Falle,

in welchem die elastische Centrallinie gerade bleibt und also unendlich viele Wendepunkte besitzt, ab, so kann man sagen:

Die gebogene elastische Centrallinie enthält keine Wendepunkte.

Unter den Projectionen derselben ist jene auf die invariable Ebene des Kräftepaars die einfachste. Nehmen wir, um dieselbe zu betrachten, die invariable Richtung der Kräftepaaraxe zur Axe Z, die Kräftepaarebene also zur Ebene $X\,Y$ unseres festen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt im freien Ende liegen mag, so folgt für die Neigungscosinus a'', b'', c'' der Hauptaxen X', Y', Z' gegen die Axe Z sofort

$$a'' = \frac{Ap}{l}, \quad b'' = \frac{Bq}{l}, \quad c'' = \frac{Cr}{l}. \tag{14}$$

Bildet man die Biegungsgrösse für einen Punkt der Projection der Centrallinie auf die Ebene $X\,Y$ nach den Gesichtspunkten, wie sie im § 2 gelegentlich der Besprechung über Zusammensetzung und Zerlegung von Biegungen aufgeführt sind, so erhält man nach einiger Rechnung

$$\Theta_{xy} = \frac{a''p + b''q}{\sqrt{1 - c''^2}^3} = l^2 \cdot \frac{h - Cr^2}{\sqrt{l^2 - C^2r^2}^3}; \tag{15}$$

damit die Biegung Θ_{xy} constant wäre, müsste r constant, damit dieselbe 0 wäre, r speciell gleich $\sqrt{\frac{h}{C}}$ sein. Die letztere Annahme führt wieder auf den Fall $p = q = 0$ d. h. den Fall der blossen Torsion. $r =$ constans setzt $p = 0$, $q =$ constans oder umgekehrt voraus, was zufolge (1) bei der Gleichheit der zwei Biegungswiderstände A, B für ein beliebig gestelltes Kräftepaar, bei der Ungleichheit derselben aber nur für ein solches erfüllt sein kann, welches sich um eine der Hauptaxen X', Y' des Querschnitts gedreht hat; der erste Fall repräsentirt die Biegung eines isotropen Stabes in eine Schraubenlinie, der zweite diejenige des allgemeinen Stabes in einen Kreis (s. später). Abgesehen von diesen Specialfällen

kann die Projection der elastischen Centrallinie auf die Ebene des angreifenden Kräftepaars nie ein Kreis werden. Ebensowenig kann dieselbe einzelne Wendepunkte besitzen.

Da Θ_{xy} wegen des Quadrates von r periodisch ist mit der Periode $2K$ von u und eine Untersuchung auf die Unmöglichkeit eines Maximums oder Minimums der Biegung Θ_{xy} zwischen zwei aufeinanderfolgenden Periodenwerthen hinweist, so ist also

die Projection der elastischen Centrallinie auf die invariable Ebene eine in immer demselben Sinne gebogene transcendente Curve, deren durch 2 Periodenwerthe abgegrenzten Stücke congruent sind und an dem einen Ende ein Maximum, an dem andern ein Minimum der Biegung aufweisen. (Fig. 10).

Die Projectionen der Stabcurve auf die andern festen Coordinatenebenen YZ und ZX — und damit auf eine beliebige Ebene des Raumes — kann erst dann untersucht werden, wenn man die Neigungscosinus a, b, c, a', b', c' in u gebildet hat. Es lauten nämlich die Biegungsgrössen Θ_{yz}, Θ_{zx} ganz der Grösse Θ_{xy} entsprechend, indem eben statt a'', b'' die Cosinus a, b bezw. a', b' einzusetzen sind. Dieselben zeigen:

Die elastische Centrallinie kann, ausgenommen die schon erwähnten Fälle der Kreisbiegung und der reinen Torsion, keine ebene Curve werden. Ihre Projectionen auf andere Ebenen als die invariable Kräftepaarebene sind nicht periodisch. Auf einen Kreiscylinder insbesondere kann die elastische Centrallinie nur im Falle der Kreis- resp. Schraubenbiegung aufgeschraubt werden.

7.

Wie unter den Projectionen der gebogenen elastischen Centrallinie jene auf die invariable Ebene XY, so ist unter den Coordinaten eines Punktes P derselben die Coordinate z am einfachsten, welche den Abstand des Punktes von jener Ebene angiebt. Nach (14) ist der Cosinus c'' des Neigungswinkels der Tangente PZ' gegen die Kräftepaaraxe Z,

$$c'' = \frac{C}{l} \cdot r,$$

proportional der Drillung r, es gelten sonach für denselben alle Erwägungen, welche im § 4 über das Verhalten von r angestellt werden konnten. Insbesondere ist c'' nach (10) sechserlei Werthe fähig, von denen 3 wesentlich verschieden sind; diesen letzteren entsprechend werden für die Coordinate (4)

$$z = \int c'' \cdot ds = \frac{C}{ln} \cdot \int r \cdot du$$

3 verschiedene Formen auftreten, je nachdem eben in r die Functionen sin am u, cos am u, Δ am u eingehen. Nun ist

$$\int \sin \text{ am } u \cdot du = \frac{1}{\varkappa} ln\,(\Delta \text{ am } u - \varkappa \cdot \cos \text{ am } u),$$

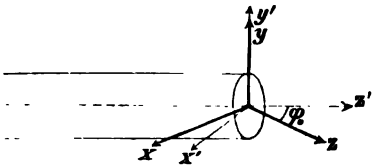
$$\int \cos \text{ am } u \cdot du = \frac{1}{\varkappa} \arcsin\,(\varkappa \sin \text{ am } u),$$

$$\int \Delta \text{ am } u \cdot du = \arcsin\,(\sin \text{ am } u) = \text{am } u.$$

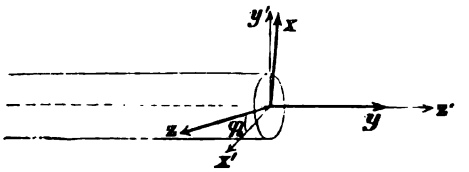
Die zu den rechten Seiten tretenden Integrationsconstanten bestimmen sich durch die specielle Wahl des Coordinatensystems. Bekanntlich wurde die Axe des Kräftepaars in der Ebene der Hauptaxen kleinsten und grössten Widerstandes angenommen. Nennt man dieselbe ein für

allemal Z*), die invariable Ebene also XY, und wählt die Y-Axe so, dass dieselbe mit der im freien Endquerschnitt gezogenen Hauptaxe mittleren Widerstandes zusammenfällt, so wird für alle 3 Fälle Congruenz der Coordinatensysteme XYZ und $X'Y'Z'$ erreicht. Ueber die relative Lage derselben geben die folgenden Figuren Aufschluss:

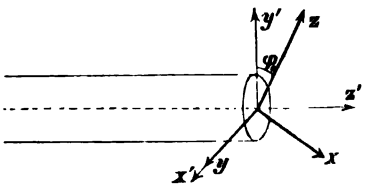
I.



II.



III.



Die Werthe der Coordinaten s ergeben sich aus folgender Tabelle:

I. $A>B>C$.		1. $Bh-l^2>0$,	2. $Bh-l^2<0$,
		$G\cdot s=\mathrm{am}\,u$,	$G\cdot s=\arcsin(\varkappa\cdot\sin\mathrm{am}\,u)$.
II. $B>C>A$.	(16)	1. $Ch-l^2>0$,	2. $Ch-l^2<0$,
		$G\cdot z=ln\frac{\Delta\mathrm{am}\,u-\varkappa\cdot\cos\mathrm{am}\,u}{1-\varkappa}$,	$G\cdot s=ln\frac{\Delta\mathrm{am}\,u-\varkappa\cdot\cos\mathrm{am}\,u}{1-\varkappa}$
III. $C>A>B$.		1. $Ah-l^2>0$,	2. $Ah-l^2<0$,
		$G\cdot s=\arcsin(\varkappa\cdot\sin\mathrm{am}\,u)$,	$G\cdot s=\mathrm{am}\,u$.

Hiebei ist gesetzt

$$1:G=C\sqrt{\frac{AB}{\pm(A-C)(B-C)}},$$

worin dasjenige Zeichen des Nenners gewählt werden muss, welches denselben positiv macht.

Wie man sieht, hängen die Ausdrücke für s ganz wesentlich mit dem Verhalten des Drillungswiderstandes C zusammen: ist dieser der numerisch mittelste unter den 3 Widerständen, so ist s logarithmisch, ist derselbe der kleinste oder grösste, dann cyclometrisch ausgedrückt durch die elliptischen Functionen. Diese charakteristische Thatsache ist von entscheidender Wichtigkeit für den Verlauf der elastischen Centrallinie:

*) Man könnte dieselbe wohl entsprechend den Festsetzungen $A>B>C$, $B>C>A$, $C>A>B$ resp. Z, X, Y nennen und hiedurch manche Vereinfachung erzielen; im ganzen aber würde die Betrachtung wohl complicirter werden

Ist der Widerstand des Stabes gegen Torsion unter den 3 Hauptwiderständen der mittelste, so liegt die spiralförmig gebogene elastische Centrallinie ganz auf der einen Seite der invariablen Ebene des den freien Querschnitt angreifenden Kräftepaars, indem sie die Ebene mit dem freien Ende sowohl als mit jenen Stellen berührt, denen als Parameterwerthe u Vielfache von $4K$ zukommen. Alle Punkte, welche von einem der Berührpunkte nach links oder rechts gleiche Bogenentfernung besitzen, haben gleichen Abstand von der Ebene. Für $u = 2K, 6K, \ldots$ berührt die Curve eine Parallelebene, deren Entfernung von der Kräftepaarebene gleich ist

$$z_{2K} = \frac{1}{G} \cdot ln \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}. \quad \text{(Fig. 8).}$$

Für $u = K, 3K, \ldots$ wird

$$z_K = \frac{1}{2} z_{2K}.$$

Ist der Widerstand des Stabes gegen Drillung unter den 3 Hauptwiderständen der kleinste oder grösste, so kann nach § 4 in je einem der 2 für jeden Fall giltigen Unterfälle (nämlich I, 1 und III, 2) der Sinn der Drillung niemals wechseln. Es wächst nun für diese Annahmen die Coordinate z fortwährend, die elastische Centrallinie liegt also ganz auf einer Seite der invariablen Kräftepaarebene und entfernt sich immer weiter von derselben. Zwischen Parallelebenen durch die Punkte mit den Parameterwerthen $2K$, $4K$, $6K$, ... ist der Verlauf der Curve genau derselbe und es ist

$$z_{\mu.K} = \mu \cdot z_K = \frac{1}{G} \cdot \mu \cdot \frac{\pi}{2}. \quad \text{(Fig. 7).}$$

Ist der Widerstand gegen Drillung der kleinste oder grösste und kann der Sinn der Drillung wechseln (I, 2 *und* III, 1), *so ist z wieder periodisch mit u und es schneidet hier die elastische Centrallinie die invariable Kräftepaarebene für $u = 0, 2K, 4K, \ldots$, indem sie abwechselnd oberhalb und unterhalb derselben verläuft, in ihrem Laufe zwei Parallelebenen berührend, deren jede von der Kräftepaarebene den Abstand $z_K = \frac{1}{G} \cdot \text{arc sin } \varkappa$ besitzt.* (Fig. 9).

Was den Proportionalitätsfactor $1 : G$ anlangt, so ist hervorzuheben, dass derselbe, im Gegensatze zu den früher auftretenden ähnlichen Factoren unabhängig ist von h und l und, absolut genommen, für sämmtliche 6 Unterscheidungsfälle durch den gleichen Ausdruck sich darstellt. D. h.:

Die relative Stärke $1 : G$, mit welcher sich die elastische Centrallinie über die invariable Kräftepaarebene emporschraubt, ist nicht abhängig von der Intensität und Angriffsrichtung des Paares, sondern einzig von der Grösse der 3 Deformationswiderstände.

Da die Werthe von z_K nur im Falle $B > C > A$ von h und l

abhängen, indem diese in $\varkappa$ eingehen, so ist eine Variirung von ε_K in den 2 andern Fällen auf eine solche von $1 : G$ allein zurückzuführen. Es zeigt sich:

„Ist der Widerstand gegen Drillung unter den 3 Hauptwiderständen der kleinste, so steigt die Spirale, in welche die elastische Centrallinie gebogen ist, um so steiler von der Kräftepaarebene aus, je kleiner dieser Widerstand und je grösser die Biegungswiderstände sich zeigen. Ist der Drillungswiderstand der grösste so wächst die Steilheit der Spirale mit der Zunahme dieses Widerstandes und der Abnahme der Widerstände gegen Biegung."

Ist der Drillungswiderstand der mittelste, so ist der Grad der Steigung der Curve, abgesehen davon, dass in $\varkappa$ die Neigung φ_0 der Kräftepaaraxe gegen die Hauptaxe kleinsten Widerstandes eingeht, wesentlich von Ungleichungen beeinflusst, welche zwischen den Widerständen A, B, C stattfinden.

Es war oben der Abstand ε eines Punktes der elastischen Centrallinie von der Ebene des den freien Endquerschnitt angreifenden Paares in der Form $\varepsilon = \int c'' \cdot ds = \frac{C}{l} \cdot \int r \cdot ds$ angegeben worden. Nun ist aber $\int r \cdot ds$ nichts anderes als der gesammte Betrag T der Torsion für ein Stück s des elastischen Stabes, vom freien Ende gerechnet, also

$$T = \frac{l}{C} \cdot \varepsilon. \tag{17}$$

D. h. diese Gesammttorsion eines Stückes der elastischen Centrallinie von der Längs s, gerechnet vom freien Ende an, wird bis auf eine Constante gemessen durch den Abstand des Endpunktes von der invariablen Ebene des anregenden Kräftepaares.

Insbesondere wächst diese Gesammttorsion fortwährend, sobald die Drillung ihren Sinn nicht ändern kann; dieselbe wird 0, ohne negativ zu werden, sobald die Drillung ihren Sinn ändert und der Drillungswiderstand der mittelste ist, sie wird dagegen durch 0 hindurch auch negativ, sobald die Drillung den Sinn ändern kann und der Drillungswiderstand dabei der kleinste oder grösste ist.

Diese Gesammttorsion eines beliebige begrenzten Stabstückes wird einfach gemessen durch die Differenz der Abstände der Begrenzungspunkte von der invariablen Kräftepaarebene. Dieselbe kann nunmehr auch, wenn der Drillungswiderstand der mittelste ist, 0 werden.

Da diese Sätze über die Gesammttorsion aus dem Verhalten der Drillung r (§ 4) abgeleitet werden können, so verificiren sie den Abstand ε resp. die dreierlei Lagen, welche die elastische Centrallinie gegenüber der invariablen Kräftepaarebene annehmen kann.

Die Grösse T ist nichts anderes als der Winkel, um welchen ein Querschnitt gegen den freien Endquerschnitt verdreht würde. Für den Punkt mit dem Parameterwerth K ergiebt sich

$$T_K = \frac{l}{C} \cdot \varepsilon_K.$$

Will man, dass der Querschnitt $u = K$ gegen den Endquerschnitt um einen bestimmten Winkel λ verdreht werde, so resultirt eine Bedingungsgleichung zwischen λ und den Widerständen A, B, C mit oder ohne Einschluss des Winkels φ_0 zwischen der Axe des angreifenden Kräftepaars und der Hauptaxe kleinsten Widerstandes.

8.

Wir bilden nunmehr die Ausdrücke für die Coordinaten x, y eines Punktes P der elastischen Centrallinie bezw. für die Neigungscosinus c, c' der Tangente PZ' gegen die Axen X, Y des festen Coordinatensystems.

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt leicht

$$c' \cdot \frac{dc}{ds} - c \cdot \frac{dc'}{ds} = a''p + b''q.$$

Setzt man aus (14) die Werthe a'', b'' in diese Gleichungen und beachtet die Relation (7), so lässt sich, da die linke Seite auf ein vollständiges Differential ergänzt werden kann, schreiben

$$-c^2 \cdot \frac{d\left(\frac{c'}{c}\right)}{ds} = \frac{1}{l}(Ap^2 + Bq^2).$$

Nun ist doch

$$c^2 + c'^2 = 1 - c''^2 = \frac{1}{l^2}(A^2p^2 + B^2q^2),$$

also darf gesetzt werden

$$c = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2} \cdot \cos\psi,$$

$$c' = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2} \cdot \sin\psi.$$

Setzt man diese Werthe in die obige Differentialgleichung ein und schreibt $\frac{u}{n}$ für s, so kommt

$$d\psi = -\frac{l}{n} \cdot \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} \cdot du. \tag{18}$$

In diese Gleichungen müssen p und q in Functionen von u substituirt werden. Wie bekannt, existiren für p, q im Ganzen 6 verschiedene Werthepaare (10), demnach erhalten wir 6 verschiedene Lösungen. Nun haben wir aber in den vorhergehenden Abschnitten für die elastische Centrallinie als wesentlich hervorgehoben, dass sie Periodici-

tät besitzt, ohne Wendepunkte verläuft und immer doppelt gekrümmt erscheint, und zwar ganz unabhängig von der Grössenordnung der 3 Widerstandsmomente A, B, C. Es wird also die Curve in allen 6 Fällen wesentlich denselben Typus besitzen, und es genügt, da bereits das characteristische Verhalten von s besprochen ist, für eine einzige Annahme, etwa für

$$A > B > C, \quad Bh - l^2 > 0$$

die Aufstellung der Cosinus c, c' bezw. der Coordinaten x, y zu bewerkstelligen.

Der oben eingeführte Hilfswinkel ψ ist, wie sich leicht zeigt, der Winkel zwischen der Schnittlinie der Querschnittsebene $X'Y'$ eines Punktes P der elastischen Centrallinie und der invariablen Ebene $X\,Y$ einerseits und der festen Y-Axe andererseits. Derselbe ist kein anderer als der Euler'sche Winkel ψ zwischen der Knotenlinie N des um seinen Schwerpunkt O rotirenden starren Körpers und der festen Y-Axe der invariablen Ebenen $X\,Y$. Es braucht also nur der Werth für ψ aus der Jacobi'schen Arbeit*) übertragen zu werden. Wird

$$\psi = \psi' + n' \cdot u$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$\psi' = \frac{1}{2i} \cdot \log \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)}. \tag{19}$$

Hiebei bedeuten ia und n' Constante, definirt durch die Gleichungen

$$\frac{1}{i} \cdot \sin \operatorname{am} ia = \sqrt{\frac{C(Ah - l^2)}{A}},$$

$$n' = \frac{l}{An} + \frac{\partial}{\partial(ia)} \log \Theta(ia).$$

ψ' ist offenbar der Winkel zwischen der Schnittlinie $X'\,Y'$, $X\,Y$ und einer neuen Axe der Ebene $X\,Y$, welche aber nicht, wie Y fest in dieser gelegen ist, sondern mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{n'}{n}$ sich im negativen Sinne darin zu bewegen scheint. Man kann nun ebensogut die Coordinaten des Punktes P der Centrallinie auf das feste Coordinatensystem $X\,Y\,Z$ beziehen als auch auf ein System, bestehend aus der invariablen Axe Z, der beweglichen Axe (Y) und einer hiezu senkrechten beweglichen Axe (X). Für das letztere System werden die Winkel ψ' periodisch, es wird also bei der Aufsuchung der Projection des Stabpunktes P in der invariablen Ebene wohl am besten verfahren werden, wenn man für den betrachteten Werth von s d. i. von u die Lagen der Geraden (Y) verzeichnet und bezüglich letzterer die rechtwinkeligen Coordinaten berechnet. Nach Jacobi**) ergiebt

*) Jacobi a. a. O. p. 157–159.

**) a. a. O. p. 162.

sich nun für die Neigungscosinus (c), (c') der Hauptaxe Z (hier der Tangente der elastischen Centrallinie) gegen die beweglichen Axen (X), (Y)

$$(20)\quad \begin{aligned}(c) &= \frac{H_1(0)}{2\cdot H_1(ia)\cdot\Theta(u)}\cdot[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)],\\ (c') &= \frac{H_1(0)}{2i\cdot H_1(ia)\cdot\Theta(u)}\cdot[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)].\end{aligned}$$

Die Neigungscosinus c, c' der Tangente PZ gegen die festen Axen X, Y ergeben sich, sobald man die Werthe von (c), (c') substituirt in die Gleichungen

$$(21)\quad \begin{aligned}c &= (c)\cdot\cos n'u + (c')\cdot\sin n'u,\\ c' &= -(c)\cdot\sin n'u + (c')\cdot\cos n'u.\end{aligned}$$

Die Neigungscosinus (c), (c') sind periodisch mit der Periode $2K$ von u, dagegen besitzen c, c' keine Periodicität. Analoge Ausdrücke wie in (17) ergeben sich für die Neigungscosinus (a), (a') bezw. (b), (b') der Axen X' und Y' gegen die beweglichen Axen (X), (Y). Dieselben können gleichfalls der Jacobi'schen Arbeit entnommen werden, sind jedoch hier von weniger Interesse als die Neigungscosinus (c), (c') der Stabtangente Z'.

9.

Die in den Formeln (20) und (21) auftretenden Θ-Functionen können durch unendliche Reihen ersetzt werden. Dies wird geschehen müssen, sobald man die Coordinaten (x), (y) und x, y, eines Punktes P der elastischen Centrallinie bezüglich des beweglichen Systems (X), (Y) und des festen Systems X, Y durch Integration der Gleichungen

$$\frac{d(x)}{ds} = (c), \quad \frac{d(y)}{ds} = (c'),$$

$$\frac{dx}{ds} = c, \quad \frac{dy}{ds} = c'$$

wirklich bilden will. Setzen wir auch statt des für die Coordinaten s im Paragraph 8 erhaltenen geschlossenen Ausdruckes wenigstens für $A > B > C$ und $Bh - l^2 > 0$ die unendlichen Reihen, so erscheinen die Coordinaten in nachstehender Form.

I. Bewegliches Coordinatensystem (X), (Y), (Z).

Durch Ausführung der Integration der Jacobi'schen Reihen*) erhält man unter Zugrundelegung der Abkürzungen

$$n\cdot\frac{\pi}{K}\cdot s = \frac{\pi}{K}\cdot u = v,$$

*) Vgl. den Eingang zur Arbeit „sur la rotation".

$$\frac{a}{K'} = b, \quad e^{-\pi \cdot \frac{K'}{K}} = q^*),$$

$$\frac{2l}{C} \cdot \sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}} = 2l \,.\, G = D^*)$$

für die Coordinaten (x), (y), (z):

$$D \cdot (x) = \frac{2q^{\frac{b}{2}}}{1-q^b} \cdot v - 2\left(q^{-\frac{b}{2}} - q^{\frac{b}{2}}\right) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu (1+q^{2\mu}) \cdot \sin \mu v}{\mu (1-q^{2\mu-b})(1-q^{2\mu+b})},$$

$$(22) \quad D \cdot (y) = 4\left(q^{-\frac{b}{2}} + q^{\frac{b}{2}}\right) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu (1-q^{2\mu}) \cdot \sin^2 \frac{\mu v}{2}}{\mu (1-q^{2\mu-b})(1-q^{2\mu+b})},$$

$$D \cdot (z) = v + 4 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin \mu v}{\mu (1+q^{2\mu})}.$$

II. Festes Coordinatensystem X, Y, Z.

Ausser den vorigen Abkürzungen führe man noch ein

$$m = \frac{K}{\pi} \cdot n',$$

so wird:

$$D \cdot x = \frac{2q^{\frac{b}{2}}}{m(1-q^b)} \cdot \sin mv + 2q^{\frac{b}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin (m-\mu) v}{(m-\mu)(1-q^{2\mu+b})}$$

$$- 2q^{-\frac{b}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin (m+\mu) v}{(m+\mu)(1-q^{2\mu-b})},$$

$$(23) \quad D \cdot y = \frac{4q^{\frac{b}{2}}}{m(1-q^b)} \cdot \sin^2 \frac{mv}{2} + 4q^{\frac{b}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin^2 \left(\frac{m-\mu}{2}\right) v}{(m-\mu)(1-q^{2\mu+b})}$$

$$- 4q^{-\frac{b}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin^2 \left(\frac{m+\mu}{2}\right) v}{(m+\mu)(1-q^{2\mu-b})},$$

$$D \cdot z = D \cdot (z).$$

Specielle Fälle, hervorgerufen durch besondere Stellung des angreifenden Kräftepaars.

10.

Dreht das einen starren Körper angreifende Kräftepaar um die Hauptaxe des grössten oder kleinsten Trägheitsmomentes, so geht die

*) In der Abhandlung in den Münch. Ber. steht irrthümlich $q = l \cdots$ statt $q = e \cdots$ und $(A-B) \cdot C^2$ statt $A \cdot B \cdot C^2$ gedruckt.

Bewegung fortwährend um diese Axe mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit vor sich. Die Grösse der letzteren ist gleich (*Intensität des Kräftepaars*): (*Trägheitsmoment*). Die Kegel der Polodie und Herpolodie sind mit der permanenten Rotationsaxe zusammengefallen. Der Bewegungszustand ist *stabil* — kleine Stösse auf die Rotationsaxe bringen nur geringe Oscillationen derselben um ihre Ruhelage hervor.

„Dreht das auf den freien Querschnitt des Stabes einwirkende Kräftepaar um die Hauptaxe des grössten oder kleinsten Deformationswiderstandes, und ist diese Hauptaxe die Torsionsaxe, so bleibt die elastische Centrallinie des Stabes gerade, der Stab wird nur gleichmässig gedrillt. Die Grösse der Drillung ist gleich (*Intensität des Kräftepaars*): (*Widerstand gegen Torsion*). Die biegsame und feste windschiefe Fläche, sowie die auf ihnen liegenden Curven der Polodie und Herpolodie sind in die Stabaxe zusammengefallen. Ist die Hauptaxe eine solche reiner Biegung, so wird blosse Biegung in einen Kreis, ohne Drillung, hervorgerufen. Die Krümmung des letzteren ist (*Intensität des Kräftepaars*): (*Widerstand gegen Biegung*). Die windschiefen Flächen der Polodie und Herpolodie sind in Kreiscylinder parallel der Kräftepaaraxe, die Curven in einen Kreis zusammengefallen. Der Gleichgewichtszustand ist in beiden Fällen *stabil:* bringt man den Stab ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage, so sucht er wieder dahin zurückzukehren."

Dreht das einen Körper ($A > B > C$) angreifende Kräftepaar um eine Gerade, welche einer der 2 durch die Hauptaxe Y' des mittleren Trägheitsmomentes gehenden Ebenen angehört, deren Gleichungen bezüglich des Hauptaxensystems $X'\ Y'\ Z'$

$$\frac{x'}{y'} = \pm \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}}$$

sind, so wird (vgl. die Schlussbemerkung des § 3) $Bh - l^2 = 0$ und es reduciren sich die in p, q, r auftretenden elliptischen Functionen auf logarithmische. Der rollende Kegel der instantanen Drehungsaxen ist ebenfalls in 2 *Ebenen* durch die Y'-Axe übergegangen,

$$\frac{x'}{y'} = \pm \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}},$$

die *Polodie* in 2 *Ellipsen*. Die *Herpolodie* wird eine *Spirale*, und der *Kegel* der Herpolodie dementsprechend gewunden. Die Unterfälle $Bh \gtrless l^2$ sind zusammengefallen.

Die Annahme $Bh - l^2 = 0$ lässt freilich auch die singuläre Lösung $p = 0$, $r = 0$ zu, wodurch nach den Euler'schen Gleichungen 1) $q = \text{const} = q_0$ wird d. h. wenn das wirkende Kräftepaar um die Axe Y' des mittleren Trägheitsmomentes B selbst gewirkt hat, so geht die Drehung um diese Axe fortwährend und mit constanter Geschwindig-

keit vor sich. Allein der Bewegungszustand ist ein *labiler:* es bedarf nur eines geringen Anstosses, um das Centralellipsoid sofort umkippen und die vorher beschriebenen Erscheinungen zu Tage treten zu lassen.

Dreht das den elast. Stab angreifende Kräftepaar um eine gerade Linie, welche einer der 2 durch die Hauptaxe mittelsten Widerstandes gehenden *charakteristischen* Ebenen angehört, deren Gleichungen für $A > B > C$ etc.

$$\frac{x'}{y'} = \pm\sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}} \text{ etc.}$$

sind, bezüglich des Systems der 3 Hauptaxen, so wird der Modul $\varkappa$ der elliptischen Functionen in p, q, r gleich 1 und die Formeln (10) gehen über in die folgenden:

I. $A > B > C$.

$$p = \frac{l}{A}\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(C-A)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1}, \quad r = \frac{l}{C}\sqrt{\frac{C(A-B)}{B(A-C)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1},$$

$$q = \frac{l}{B} \cdot \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1},$$

II. $B > C > A$.

$$(24) \quad p = \frac{l}{A}\sqrt{\frac{A(B-C)}{C(B-A)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1}, \quad q = \frac{l}{B}\sqrt{\frac{B(C-A)}{C(B-A)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1},$$

$$r = \frac{l}{C} \cdot \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1},$$

III. $C > A > B$.

$$q = \frac{l}{B}\sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1}, \quad r = \frac{l}{C}\sqrt{\frac{C(A-B)}{A(C-B)}} \cdot \frac{2e^u}{e^{2u}+1},$$

$$p = \frac{l}{A} \cdot \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}.$$

Die Unterfälle $Bh - l^2 \gtrless 0$ u. s. w. sind zusammengefallen. Nach dem oben bereits Gesagten, wie auch aus den Formeln ergiebt sich:

Die Fläche der Polodie ist, sobald der Widerstand gegen Torsion der mittelste war, in ein Ebenenpaar durch die Stabaxe übergegangen, die Polodie $\xi = p$, $\eta = q$, $\xi = -\frac{u}{n} + r$ *in eine ebene Curve, gelegen in der einen oder andern Ebene, je nachdem die Axe des angreifenden Kräftepaars in der einen oder andern der 2 diesen Ebenen entsprechenden „charakteristischen" Ebenen gelegen war. Die Projection der elastischen Centrallinie auf die Ebene des Querschnitts ist ein Stück einer Geraden. Die Projectionen auf die andern Hauptebenen sind Curven, welche gegen die Axe des Stabes asymptotisch anlaufen. Die*

Curve der Polodie nähert sich somit gleichfalls der Stabaxe asymptotisch. (Fig. 4).

War unter den 3 *Hauptwiderständen gegen Deformation der Widerstand gegen Torsion der grösste oder kleinste, so ist die Projection der Polodie auf die Ebene des Querschnitts ein Ellipsenquadrant, und die Projectionen auf die* 2 *andern Hauptebenen sind Curven, welche von der Stabaxe aus gegen* 2 *damit parallele Gerade asymptotisch anlaufen.* (Fig. 5).

Die Biegung Θ_{xy} (15) der Projection der elastischen Centrallinie auf die invariable Ebene des Kräftepaars ist bekanntlich abhängig von r. Dieselbe ist hier nicht mehr periodisch mit u, sondern wächst oder fällt fortwährend damit, je nachdem in r der Quotient $\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}$ oder $\frac{e^{u}}{e^{2u}+1}$ eingeht. D. h.:

Die Projection der elastischen Centrallinie auf die invariable Ebene des Kräftepaars besitzt nicht mehr periodische Krümmung, sondern ist, ganz analog dem entsprechenden Fall der Spirale Poinsot's, in eine spiralförmig gewundene Curve übergegangen. Die Spirale läuft dabei von einem festen Kreise aus ($s=0$) *asymptotisch gegen einen zweiten, damit concentrischen* ($s=\infty$), *sobald der Widerstand gegen Torsion nicht der mittelste war* (Fig. 12); *dieselbe läuft dagegen von einem festen Kreise aus* ($s=0$) *asymptotisch gegen dessen Mittelpunkt* ($s=\infty$), *sobald der Torsionswiderstand kleiner als der eine und grösser als der andere Widerstand gegen Biegung war.* (Fig. 11).

Die elastische Centrallinie selbst erscheint als eine Curve, welche sich um die Axe des Kräftepaars herumschlingt, indem sie im ersteren der soeben erwähnten Fälle sich von derselben mehr und mehr entfernt, ohne übrigens über eine gewisse Grenze der Entfernung hinauszugehen, im zweiten gegen die Axe immer enger und enger angeht.

Wie sich bei der Drehung unter der Annahme $Bh - l^2 = 0$, ($A > B > C$) die *singuläre* Lösung $p=0$, $r=0$, $q=q_0$ ergab, so auch hier. Man erkennt, dass,

wenn das Kräftepaar um die Hauptaxe mittelsten Momentes dreht, auch wieder blosse Torsion oder Kreisbiegung hervorgerufen wird. Allein der Gleichgewichtszustand des elastischen Stabes ist labil: ein kleiner Anstoss genügt, um die gerade gebliebene oder in einen Kreisbogen gekrümmte elastische Centrallinie in eine ganz neue Curve von den oben erwähnten Eigenschaften schnellen zu lassen.

Specielle Fälle, hervorgerufen durch besondere Wahl der drei Hauptwiderstände.

11.

Werden zwei Hauptträgheitsmomente des um seinen Schwerpunkt rotirenden Körpers einander gleich, so werden die Trägheitsmomente um alle in der Ebene der 2 Hauptaxen gezogenen Geraden gleich; es gehen die Polodie und die Herpolodie in Kreise, deren Kegel in Kreiskegel über und es vollzieht sich die Drehung fortwährend mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die instantane Drehungsaxe.

Werden 2 Hauptwiderstandsmomente des elastischen Stabes einander gleich, so ist zu unterscheiden, welche Momente dies sind. Sind die Widerstände A, B gegen *Biegung gleich*, so ist der Stab *„isotrop"*, es wird nach jeder in der Querschnittsebene gezogenen Geraden der Widerstand *gleich* ($= A = B$). Nennt man den Neigungswinkel der Kräftepaaraxe gegen die Torsionsaxe λ, so wird aus (10)

$$(25) \qquad \begin{aligned} p &= \frac{l}{A} \cdot \sin\lambda \cdot \cos u, \\ q &= \frac{l}{A} \cdot \sin\lambda \cdot \sin u, \\ r &= \frac{l}{C} \cdot \cos\lambda = r_0. \end{aligned}$$

Es ist sowohl die Drillung r als die Biegung $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ constant, sonach auch nach (15) $\Theta_{xy} = \frac{l}{A \cdot \sin\lambda}$ d. h.:

„Es ist die elastische Centrallinie unter gleichförmiger Drillung in eine gewöhnliche Schraubenlinie um die invariable Richtung der Kräftepaaraxe gebogen worden. Der Steigungswinkel derselben ist $90^0 - \lambda$. Der Radius des Kreiscylinders, welchem dieselbe aufliegt, ist gleich dem Producte aus dem constanten Widerstand gegen Biegung und dem sinus des Steigungswinkels, unter dem die Axe des Kräftepaars gegen die Stabaxe geneigt ist, dividirt durch die Intensität des angreifenden Paares; der Cylinder wird also um so enger, je stärker das wirkende Kräftepaar, je kleiner der Widerstand gegen Biegung und je näher die Axe des Kräftepaares an der Stabaxe gelegen ist."

Aus der Betrachtung von $\xi = p$, $\eta = q$, $\zeta = -\frac{u}{n} + r_0$ fliesst:

Die Polodie ist in eine gewöhnliche Schraubenlinie um die Torsionsaxe übergegangen, die biegsame windschiefe Fläche derselben in eine gewöhnliche Schraubenfläche. Der Steigungswinkel der Schraubenlinie ist $\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{2 \cdot A^2 \cdot C}{(A - C) \cdot l^2 \cdot \sin 2\lambda}\right)$, *der Radius des Kreiscylinders, welchem dieselbe aufliegt,* $\frac{A}{l \cdot \sin\lambda}$. *Es wird also der Kreiscylinder um so weiter,*

je stärker das anregende Kräftepaar wirkt, je grösser der Winkel zwischen seiner Axe und der Stabaxe und je kleiner der gleiche Widerstand gegen Biegung ist. Die Steilheit wird um so grösser, je grösser dieser Widerstand und der Drillungswiderstand und je kleiner der Winkel zwischen der Kräftepaar- und der Torsionsaxe ist.

Dreht das Kräftepaar um eine beliebige Hauptaxe des Querschnittes, so wird die constante Drillung zu 0 und es wird blosse Kreisbiegung hervorgerufen.

Werden je ein *Biegungswiderstand* z. B. B und der *Drillungswiderstand* C numerisch *gleich*, so werden — der Fall $A > C\,(= B)$ genügt — die Krümmungscomponenten p, q, r

$$p = \frac{l}{A} \cdot \sin \varphi_0,$$

$$q = \frac{l}{C} \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin u, \tag{26}$$

$$r = \frac{l}{C} \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos u.$$

Aus $\xi = p$, $\eta = q$, $\zeta = -\frac{u}{n} + r$ erfährt man:

Die Fläche der Polodie ist in eine Ebene senkrecht der Hauptaxe des ungleichen Hauptwiderstandes der Biegung übergegangen, die Polodie also in eine ebene Curve. Die Projectionen derselben auf die 2 Hauptebenen durch diese Hauptaxe sind gerade Linien, die Projection auf die 3. parallele Hauptebene ist eine sinuslinienartige Curve, deren Wendepunkte auf der Stabaxe liegen. (Fig. 6).

Die elastische Centrallinie selbst kann durch Gleichungen von einfacher Form nicht dargestellt werden. Ihre Projection auf die invariable Ebene des angreifenden Kräftepaares weist wieder periodische Krümmung auf, indem

$$\Theta_{xy} = \frac{l}{AC} \cdot \frac{C \sin^2 \varphi_0 + A \cos^2 \varphi_0 \sin^2 u}{(\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}$$

wird. Die Periode von u ist diesmal 2π.

Werden die 3 Hauptträgheitsmomente des rotirenden Körpers einander gleich, so geht das Centralellipsoid desselben in eine Kugel über und es ist jede Axe, um welche das Kräftepaar dreht, permanente Rotationsaxe.

Werden die 3 *Widerstände* A, B, C, welchen der Stab seine Deformation entgegensetzt, einander *gleich* $(= A)$, so werden die 3 Krümmungscomponenten p, q, r constant. Die Gleichungen $\xi = p_0$, $\eta = q_0$, $\zeta = -s + r_0$ zeigen, dass die Fläche der Polodie in eine Ebene durch die Torsionsaxe, die Polodie in eine gerade Linie parallel derselben übergegangen ist. Hat das Kräftepaar um eine der Hauptaxen des isotropen Querschnitts gedreht, so entsteht blosse Kreis-

biegung, in jedem anderen Falle wird die elastische Centrallinie in eine Schraubenlinie gebogen. Es unterscheidet sich sonach dieser Fall der Gleichheit der 3 Widerstandsmomente A, B, C des Stabes nicht wesentlich von jenem der Gleichheit der 2 Biegungswiderstände A, B — im Gegensatze zu dem Problem der Rotation, welches beim Uebergange von der Gleichheit zweier Hauptträgheitsmomente auf jene aller drei doch erheblich vereinfacht wird.

Wird die Summe zweier Hauptträgheitsmomente des rotirenden Körpers gleich dem dritten so ist der Körper in eine Platte übergegangen und es hat das Centralellipsoid die von Poinsot hervorgehobene charakteristische Grenze erreicht. Die Drehung geht übrigens wesentlich ebenso vor sich, wie im allgemeinen Falle.

Wird die *Summe der beiden Biegungswiderstände gleich* dem *Drillungswiderstand* des elastischen Stabes, so wird die elastische Centrallinie in eine Curve von *constanter Biegung* deformirt, indem aus den Euler'schen Gleichungen (1)

$$p^2 + q^2 = \text{const.}$$

folgt. Im übrigen besitzt dieselbe keine wesentlich einfacheren Gleichungen, als im allgemeinen Falle, ebensowenig specialisiren sich die Polodie und deren Fläche.

München, im Juli 1883.

Sur les différentes espèces de complexes du 2e dégrè des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre.

Par

Corrado Segre à Turin et Gino Loria à Mantoue.

On sait qu' avant que parût dans la „Neue Geometrie des Raumes“ la théorie de Plücker du complexe général du 2e dégré, M. Battaglini avait déjà publié des recherches sur le complexe représentable en coordonnées plückeriennes de droites par une équation contenant seulement les carrés de ces coordonnées*). M. Klein démontra ensuite que ce complexe n'est pas le complexe le plus général du 2e dégré et qu'au contraire celui-ci doit satisfaire à deux conditions pour se réduire au complexe de Battaglini**). En même temps M. Aschieri montrait en deux courtes notes***) que ce complexe-ci n'est autre chose que le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2e ordre, ou par lesquelles on peut mener deux couples harmoniques de plans tangents à deux surfaces de la 2e classe. On peut même en une infinité (∞^1) de manières construire ainsi un complexe de Battaglini donné, car il existe un système du 4e ordre et de la 4e classe de ∞^1 surfaces du 2e dégré tel qu'à une quelconque S de ces surfaces en correspondent deux autres S', S'', de sorte que le complexe se compose des droites qui coupent harmoniquement S et S', ou bien des droites par lesquelles passent deux couples harmoniques de plans tangents à S et S''. Ces propriétés du complexe de Battaglini avec quelques autres ont été retrouvées récemment, et presque de la même manière, par M. Schur dans le mémoire „Ueber das System zweier Flächen 2. Grades“ †) (où d'ailleurs il ne s'en sert que comme

---

*) V. Atti della R. Accademia di Napoli 1866, ou bien Giornale di matematiche vol. 6 et 7.

**) V. l'„Inauguraldissertation“, n° 22; et le mémoire „Zur Theorie der Complexe I. und II. Grades“ n° 24 (Mathematische Annalen, Bd. II).

***) V. Giornale di matematiche, vol. 8, 1868.

†) Mathematische Annalen, Bd. XXI, pag. 515—527.

point de passage pour d'autres recherches intéressantes sur une position particulière de deux surfaces du 2e dégré). Cependant dans l'étude du complexe des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2e ordre on s'est borné jusqu'à présent, si nous ne nous trompons, au cas de la position mutuelle la plus générale de ces surfaces. C'est alors que ce complexe coincide parfaitement avec le complexe de Battaglini; sa surface singulière est alors celle entre les surfaces de Kummer du 4e ordre et de la 4e classe à 16 points et 16 plans singuliers qui a une équation contenant seulement les puissances paires des coordonnées, c'est-à-dire elle est un „tétraédroïde" de Cayley. Mais si l'on particularise la position mutuelle des deux surfaces du second ordre, par exemple si celles-ci viennent se toucher en un point, ou en deux, ou le long d'une droite, etc., si en même temps ces surfaces (l'une ou toutes les deux) se réduisent à des cônes, ou à des couples de plans, etc., etc., alors le complexe des droites qui les coupent harmoniquement se particularisera aussi. On ne pourra plus en général le représenter par une équation contenant seulement les carrés des coordonnées plückeriennes, de sorte que la discussion des cas que peut présenter une telle équation ne suffirait pas pour donner tous les complexes dont il s'agit. Il se présente donc la question de trouver tous les complexes du 2e dégré qui peuvent être considérés comme composés des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre ayant entre elles une position convenable. C'est précisément de cette question que nous allons nous occuper.

Voici la méthode que nous suivons pour la résoudre. On connait l'équation du complexe H des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre, dont les équations soient tout-à-fait générales. Or, que l'on prenne successivement pour ce couple d'équations tous les couples possibles d'équations canoniques, qui résultent de la méthode des diviseurs élémentaires (Elementartheiler) de M. Weierstrass et qui correspondent à toutes les particularisations projectives que peut avoir le système de deux surfaces du second ordre*). Pour chacune des équations ainsi obtenues du complexe H que l'on applique les critériums de classification donnés par MM. Klein et Weiler**) pour les complexes du 2e dégré (critériums qui s'appuient aussi sur la methode des diviseurs élémentaires) et que l'on considère toutes les hypothèses, que l'on peut faire sur les coefficients du couple d'équations canoniques

*) V. Gundelfinger. Notes à l' „Analytische Geometrie des Raumes" de Hesse (3e édition, pag. 518—525), et aussi le mémoire de M. Voss „Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen II. Grades". Math. Ann., Bd. X, pag. 143—188.

**) V. l' Inauguraldissertation de Klein — et le mémoire de Weiler: „Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades". Math. Annalen, Bd. VII, pag. 145—207.

de surfaces du second ordre, dont il s'agit, afin que le complexe H, qui lui correspond et qui appartiendra en général à une certaine classe de la classification de M. Weiler, vienne à appartenir à une autre classe plus particularisée. Ces hypothèses se présentent d'elles-mêmes, lorsqu'on a trouvé les expressions des subdéterminants du discriminant de l'équation du complexe H, à laquelle l'on ait ajouté

$$2\lambda(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}) = 0,$$

et que l'on considère attentivement les diviseurs linéaires en λ de ce discriminant et ceux d'entre eux qui appartiennent aussi à tous les subdéterminants du 5e ordre, ou du 4e ordre, etc. — De cette manière l'on trouve toutes les classes de complexes du 2e dégré auxquelles peut appartenir un complexe H et aussi quelle position mutuelle particulière doivent avoir les deux surfaces du second ordre afin que le complexe H qui leur correspond soit précisément d'une classe donnée.

Mais on peut aussi obtenir les mêmes résultats par une autre voie plus géométrique. En effet toutes les diverses classes de complexes du 2e dégré dans la classification de Klein-Weiler se distinguent entre elles par le nombre et la position mutuelle de leurs droites doubles. Or il est facile de voir dans chaque cas à quelles conditions doit satisfaire une droite quelconque, afin d'être double pour le complexe H qui correspond à deux surfaces du second ordre données. Ainsi, par exemple, lorsque cette droite n'est pas une tangente dans le même point aux deux surfaces, les conditions auxquelles elle devra satisfaire seront les suivantes: 1° d'avoir la même droite polaire relativement aux deux surfaces, 2° d'appartenir au complexe, c'est-à-dire de couper harmoniquement celles-ci. Cela résulte immédiatement de la définition d'une droite double d'un complexe du 2e dégré, et de ce que si la courbe de 2e classe, enveloppe des droites du complexe H qui appartiennent à un plan donné, c'est-à-dire des droites coupant harmoniquement les deux coniques d' intersection de ce plan avec les deux surfaces, a l'une de ses droites pour droite double (c'est-à-dire se réduit à deux points de cette droite), cette droite doit avoir le même pôle par rapport aux deux coniques. En se servant de ces propriétés caractéristiques d'une droite double d'un complexe H on peut trouver géométriquement tous les cas que peuvent présenter deux surfaces du second ordre, par rapport aux droites doubles du complexe H qui leur appartient; et puis, du nombre et de la distribution de ces droites doubles on peut déduire, au moyen de la classification de M. Weiler, la classe du complexe H que l'on a obtenu pour chaque cas. Ajoutons que c'est seulement par ces considérations géométriques que l'on se rend compte des résultats auxquels la voie analytique précédemment indiquée conduit plus méthodiquement, mais aussi moins lumineusement.

Nous avons trouvé que parmi les 49 classes de complexes du 2e

dégré proprement dits il y en a 23 auxquelles appartiennent des complexes H. Cependant il fallait encore reconnaître pour chacune de ces classes si c'est le complexe le plus général, on bien seulement un complexe particulier, qui est un complexe H, et dans ce dernier cas quelle est sa particularisation.

Soient, en coordonnées quelconques de droites: $\Omega = 0$ l'équation d'un complexe quelconque du 2e dégré d'une classe donnée, et $P = 0$ l'équation du 2e dégré à laquelle satisfont toutes les droites. L'on sait que dans la *caractéristique*, dont a fait usage M. Weiler pour représenter la classe de ce complexe, l'on a tous les exposants des diviseurs élémentaires du déterminant de la forme $\lambda P + \Omega$, étant mis entre crochets ( ) ceux qui correspondent à la même racine λ de ce déterminant. Or que l'on considère le groupe de toutes les racines de celui-ci: on peut démontrer que les invariants absolus de ce groupe de valeurs de λ forment précisément tout le système des invariants absolus indépendants de la surface singulière du complexe, tandis que si à ce groupe on adjoint la valeur $\lambda = \infty$ le nouveau groupe aura pour invariants absolus (ceux du premier groupe plus un nouveau) précisément tout le système des invariants absolus indépendants du complexe même considéré*). On peut même construire des formes géométriques de première espèce, dont quelques éléments forment des groupes projectifs au groupe considéré de valeurs de λ, et donnent ainsi par leurs invariants absolus, ou rapports anharmoniques indépendants de ces éléments, les invariants absolus de la surface singulière et de chacun des complexes qui appartiennent à celle-ci; car l'on a le théorème suivant: „Si l'on prend d'une droite quelconque r de l'espace le faisceau de complexes linéaires polaires relativement au complexe du 2e dégré $\Omega = 0$, ces complexes linéaires correspondront d'une certaine façon projectivement aux complexes du 2e dégré relatifs à la même surface singulière et il y aura dans ce faisceau pour chaque racine λ un complexe linéaire en involution avec tout le système de complexes linéaires fondamentaux qui correspond à cette racine**): or le groupe de ces éléments du faisceau correspondants aux diverses racines, auxquels on

*) Ces propositions et celles qui suivent ont été trouvées comme cas particuliers de propositions plus générales par l'un de nous dans sa thèse pour le doctorat. Elle donnent immédiatement, non seulement le moyen de reconnaître par le seul examen de la caractéristique d'une classe de complexes du 2e dégré le nombre des invariants absolus qui lui correspond, mais encore la signification géométrique de ces invariants absolus.

**) Par complexe linéaire *fondamental* d'un complexe du 2e dégré (ou de sa surface singulière) nous entendons un complexe linéaire relativement auquel celui-ci corresponde à soi-même. A chaque racine λ, à laquelle appartiennent h diviseurs élémentaires, correspond un système linéaire de ∞^{h-1} complexes fondamentaux (un seul pour $h = 1$).

adjoint le complexe linéaire spécial qui a la droite r pour axe, est projectif au groupe de valeurs de λ composé respectivement de ces racines et de la valeur $\lambda = \infty$." On a donc là précisément un de ces groupes d'éléments de formes géométriques de 1e espèce, dont les rapports anharmoniques indépendants (ne variant pas avec la droite r) donnent les invariants absolus du complexe considéré et de sa surface singulière. En particulier, si dans le plan tangent en un point quelconque à la surface singulière on mène par ce point les droites qui appartiennent aux divers systèmes linéaires de complexes fondamentaux (droites qui sont en général des tangentes doubles de la surface singulière, mais qui peuvent devenir des génératrices de cette surface si elle est réglée) et la droite singulière du complexe considéré correspondante à ce point et ce plan singuliers, on aura un groupe de droites d'un faisceau, lequel donnera encore par ses rapports anharmoniques les invariants absolus du complexe et de sa surface singulière.

Ces théorèmes nous permettent de reconnaître immédiatement pour chaque complexe H que nous obtenons, par la seule inspection des valeurs correspondantes des racines λ: 1° si la surface singulière de ce complexe est celle du complexe le plus général de la classe qui correspond à la caractéristique trouvée, 2° si ce même complexe H est précisément le plus général des complexes qui ont la même surface singulière (c'est-à-dire si tous ces complexes-ci sont de tels complexes H), ou bien s'il est un complexe particulier entre eux, et dans ce cas-ci combien de complexes H il y a qui appartiennent à la même surface singulière. Ajoutons que la considération des particularisations projectives des groupes d'éléments considérés, lesquelles correspondent à un complexe H donné, nous montre quelles sont les particularités géométriques de celui-ci, lorsqu'il n'est pas le plus général de sa classe. De plus nous connaitrons pour chaque espèce de complexes H le nombre des invariants absolus correspondants, s'il y en a.

En suivant les méthodes indiquées nous avons obtenu les résultats qui suivent et que nous nous bornerons ici à énoncer, ce que nous avons dit en général nous paraissant suffisant pour que le lecteur puisse vérifier sans peine ces résultats, que nous exposerons d'ailleurs avec quelques détails. Nous ordonnerons les complexes H des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre à-peu-près dans l'ordre de classification des complexes du 2e dégré, qui a été tenu par M. Weiler dans le 2e Tableau de son mémoire, avec quelques modifications seulement qui nous semblent convenables pour notre but. Pour chaque classe successivement de complexes du 2e dégré, à laquelle appartienne un complexe H, nous dirons si ce complexe est le plus général de cette classe, ou comment il est particularisé; combien de tels complexes appartiennent à une même surface singulière; et comment

doivent être placées les deux surfaces du second ordre, afin que le complexe H qui leur appartient soit précisément de cette espèce. Nous montrerons aussi dans la plupart des cas comment de la considération de cette génération du complexe H l'on est conduit à la construction de ses droites doubles et de ses points et plans notables (ausgezeichnet). Pour plus de détails sur les formes de la surface singulière, dans quelques-uns des cas où celle-ci n'est pas particularisée entre celles de la même classe, on pourra recourir au mémoire de M^r Weiler. Quant aux droites singulières de chacun de nos complexes, on voit très-facilement par un raisonnement géométrique qu'elles appartiennent au complexe tétraédral des droites dont les polaires par rapport aux deux surfaces du second ordre se coupent mutuellement. Or comme l'on trouve sans difficultés les particularisations de ce complexe tétraédral qui correspondent aux divers cas que présentent ces deux surfaces, on aura en même temps pour chaque cas les particularisations que présente la congruence des droites singulières du complexe H correspondant.

[1 1 1 1 1 1].

Lorsque l'on prend les deux surfaces du second ordre dans leur position la plus générale, le complexe H qui leur correspond est précisément de cette classe [1 1 1 1 1 1] (classe la plus générale de complexes du 2^e^ dégré), qui se distingue par le manque de droites doubles. Dans les groupes, projectifs entre eux, qui donnent les invariants absolus d'un complexe H de cette classe, aux six complexes linéaires fondamentaux correspondent des éléments conjugués dans une involution (propriété qui a déjà été aperçue par M. Klein*)), dont l'un des éléments doubles correspond précisément au complexe H considéré. Comme il y a deux de ces éléments doubles, il s'ensuit qu'à la surface singulière caractérisée par cette involution c'est-à-dire au *tétraédroïde*, appartiennent seulement deux complexes H, lesquels correspondront à ces deux éléments doubles. Chacun de ces deux complexes H s'obtient d'une infinité de manières comme lieu des droites coupant harmoniquement deux surfaces données du second ordre; pour l'une de ces deux surfaces on peut même prendre un cône**). Mais si toutes deux ces surfaces sont des cônes, l'on aura un complexe particulier

*) V. Klein, „Zur Theorie der Complexe I. und II. Grades". n° 24.

**) Comme les caractères, qui distinguent parmi tous les complexes [111111] les complexes H, correspondent par dualité à eux-mêmes, il s'ensuit que ces mêmes complexes peuvent s'obtenir d'une infinité de manière comme lieux des droites par lesquelles passent des couples harmoniques de plans tangents de deux surfaces de la 2^e^ classe, et que pour l'une de celles-ci on peut même prendre une conique. En conséquence le complexe étudié par M. Painvin (Nouvelles Annales, 1872) des droites par lesquelles passent des plans tangents à un ellipsoïde perpendiculaires entre eux est précisément, du point de vue projectif, l'un quel-

entre ceux de l'espèce considérée, complexe qui sera encore de la classe [1 1 1 1 1 1] mais qui ne dépendra plus que de 16 constantes, tandis qu'un complexe H général de cette classe dépend de 17 constantes, comme le tétraédroïde auquel il correspond.

[2 1 1 1 1].

Les propriétés d'un complexe H de cette classe s'obtiennent de celles d'un complexe H de la classe précédente, en supposant que deux de ses complexes linéaires fondamentaux, correspondants à deux éléments conjugués de l'involution, viennent coincider. La surface singulière est une particulière „Complexfläche" (dépendante de 16 constantes, tandis que la „Complexfläche" la plus générale dépend de 17), qui jouit de quelques propriétés du tétraédroïde. En effet elle possède une droite double avec 4 points e 4 plans cuspidaux, et 8 points et 8 plans doubles; or non seulement ces 8 plans doubles passent 4 à 4 par chaque point double, mais il y a aussi deux autres points dans chacun desquels se coupent 4 de ces plans doubles (divers de l'un à l'autre), et analoguement deux plans, qui ne sont point des plans doubles, mais qui contiennent chacun 4 points doubles. Une telle surface est singulière pour un seul complexe H proprement dit (qui correspond au second élément double de l'involution considérée précédemment, dont le prémier élément double correspond maintenant au complexe spécial qui a pour axe la droite double). On obtient un complexe H de cette classe au moyen de deux surfaces du second ordre, qui dans leur faisceau soient conjuguées harmoniques relativement à deux cônes, c'est-à-dire deux surfaces du second ordre dont le tétraèdre fondamental ait un arête qui les coupe harmoniquement. Alors cet arête sera la droite double, et les deux sommets et les deux faces du tétraèdre qui n'appartiennent pas à cet arête seront les deux points et les deux plans dont nous parlions. On peut prendre pour l'une de ces deux surfaces du second ordre un cône; mais si pour toutes les deux l'on prend deux cônes, on obtiendra un cas particulier des complexes H de cette espèce, c'est-à-dire un cas pour lequel le seul invariant absolu de ces complexes aura une valeur numérique particulière*).

[2 2 1 1].

La surface singulière la plus générale de cette classe appartient à deux complexes H, qui dans la série des complexes du 2e dégré ayant

---

conque des complexes H dont il s'agit ci-dessus. Sa surface singulière est la surface des ondes de Fresnel. Nous aurons soin d'ailleurs d'indiquer brièvement dans des notes tous les cas particuliers remarquables du complexe de M. Painvin, relatifs aux différents cas particuliers métriquement des surfaces de la 2e classe.

*) C'est un complexe H de cette classe [2 1 1 1 1] celui des axes centraux d'un système de forces, que M. Darboux (v. Mém. de la société des sciences

la même surface singulière sont les éléments doubles de l'involution déterminée par les deux complexes fondamentaux non spéciaux et par les deux spéciaux, comme couples d'éléments conjugués. On obtient un complexe H de cette classe comme lieu des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre qui se touchent en un point, et dont l'une peut être un cône (n'ayant pas le sommet sur l'autre surface). Les deux droites doubles seront les deux tangentes en ce point à ces surfaces du second ordre, lesquelles appartiennent comme génératrices à la surface du second ordre conjuguée harmonique relativement à ces deux-ci de ce cône de leur faisceau, qui a le sommet au point de contact. La surface singulière et le complexe H ont un invariant absolu, qui prendra une valeur numérique particulière si pour ces deux surfaces du second ordre l'on peut prendre deux cônes.

[4 1 1].

A la surface la plus générale de cette classe*) appartient un seul complexe H, qui est, dans la série des complexes ayant la même surface singulière, le conjugué harmonique du complexe fondamental spécial relativement aux deux autres complexes fondamentaux (ce qui permettra de construire pour chaque point de la surface la droite singulière correspondante de ce complexe H, car elle sera parmi les tangentes en ce point la conjugué harmonique de celle qui s'appuie sur la droite double de la surface relativement aux deux qui touchent aussi ailleurs cette surface). Deux surfaces du second ordre donnent

---

phys. et nat. de Bordeaux 2e série, tome II) a rencontré dans sa généralisation du théorème de Minding, et que Chasles avait entrevu (v. Aperçu historique, 2e édition, p. 555—6). Récemment M. Padelletti a montré („Sulle analogie fra la teoria della astatica e quella dei momenti d'inerzia". Rendiconti della R. Accademia di Napoli. Febbrajo 1883, p. 29—48) que ce complexe se compose des droites par lesquelles passent des plans tangents perpendiculaires entre eux à un certain hyperboloïde qu'il appelle „hyperboloïde, central", et qui a pour l'une de ses sections principales une hyperbole équilatère. Or ce que nous avons dit ci-dessus montre qu'effectivement le complexe ainsi défini, c'est-à-dire le complexe de Painvin relatif à un tel hyperboloïde est un complexe H de la classe [2 1 1 1 1], et même le plus général de ces complexes du point de vue projectif. — Si cet hyperboloïde se réduit à une hyperbole équilatère, alors on aura un cas particulier de ces complexes pour le lieu des droites par lesquelles passent des plans tangents orthogonaux de cette hyperbole.

*) Il faut noter, pour cette classe-ci et pour plusieurs de celles qui suivent qu'une conséquence immédiate des propositions générales que nous avons données est que chaque surface singulière d'un complexe du 2e dégré, auquel corresponde un nombre < 4 de racines différentes du discriminant (ce que l'on voit par la caractéristique) ne peut pas avoir de particularités projectives (invariants absolus), et que chaque complexe, auquel corresponde un nombre de racines < 3, ne peut avoir lui-même aucune particularisation (sans changer de classe). Ces corollaires s'appliquent souvent dans notre recherche.

origine à un tel complexe H si, non seulement elles se touchent, comme dans le cas précédent, mais si en outre la surface conjuguée harmonique relativement à ces deux surfaces du second ordre de ce cône de leur faisceau qui a le sommet dans leur point de contact coincide avec l'un des deux autres cônes de leur faisceau. Effectivement la construction, que nous avons donnée dans le cas précédent, des deux droites doubles montre que lorsque cette condition est satisfaite, ces deux droites coincident en une génératrice du second des cônes nommés, de sorte que de la classe de complexes [2 2 1 1] on sera passé à la classe [4 1 1]. L'une des deux surfaces auxquelles correspond le complexe H que nous considérons peut être un cône; mais la condition géométrique à laquelle elles doivent satisfaire empêche que toutes les deux soient des cônes. Ni ce complexe H, ni sa surface singulière, n'ont d'invariants absolus.

[3 3].

Chaque complexe du 2e dégré de cette classe est un complexe H des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre (dont l'une peut être un cône) ayant un contact stationnaire, c'est-à-dire dont la courbe d'intersection ait un point de rebroussement. Dans ce cas la surface singulière possède deux droites de rebroussement qui sont l'intersection du plan tangent en ce point aux deux surfaces du second ordre avec la surface de leur faisceau qui est conjuguée harmonique relativement à elles du cône qui a le sommet dans le point de contact. On voit l'analogie qu'il y a avec le cas [2 2 1 1].

[2 2 2].

Rappelons qu'à propos de la classe [2 2 1 1] nous avons dit que l'on obtient un complexe H qui lui appartient, lorsque les deux surfaces du second ordre se touchent en un point, et nous avons ajouté que l'une de ces surfaces pouvait être un cône, pourvu que le contact de ce cône avec l'autre surface ne fût pas impropre, c'est-à-dire que celle-ci ne passât pas par le sommet de ce cône. Maintenant si l'on veut précisément le complexe H des droites coupant harmoniquement un cône et une autre surface du second ordre (pouvant aussi se réduire à un cône) quand celle-ci passe par le sommet de ce cône, ce complexe ne sera plus de la classe [2 2 1 1], mais bien de la classe [2 2 2], car il aura trois droites doubles se coupant mutuellement, c'est-à-dire les deux droites d'intersection de ce cône avec le plan tangent dans son sommet à l'autre surface du second ordre, et la droite polaire de ce plan relativement au cône. Ce sommet est un point notable pour le complexe, car toutes les droites qui passent par lui appartiennent évidemment à celui-ci; par conséquent chaque plan passant par ce sommet est un plan singulier du complexe, d'où il s'ensuit que celui-

ci a une surface singulière qui se décompose en ce point comme enveloppe et en une surface du 4e ordre et de la 3e classe, ayant les trois droites doubles du complexe pour droites doubles (comme lieux de points), c'est-à-dire une *surface de Steiner*. Notre complexe H est donc un complexe [2 2 2] (B) de M. Weiler. Etant donnée une surface quelconque de Steiner, elle sera surface singulière pour trois complexes H, qui seront dans la série des complexes du 2e dégré ayant cette surface pour surface singulière les conjugués harmoniques de l'un des trois complexes fondamentaux spéciaux relativement aux deux autres. Ces trois complexes H peuvent tous venir engendrés de la manière que nous avons décrite: seulement les trois droites doubles de la surface et de ces complexes permuteront leur rôle de l'un à l'autre.

Mais si dans le cas de deux surfaces du second ordre tangentes en un point, qui donnaient lieu au complexe H de la classe [2 2 1 1], on suppose non plus que l'une des deux devienne un cône, mais bien qu'elles soient conjuguées harmoniques relativement à ces deux cônes de leur faisceau qui n'ont pas le sommet dans leur point de contact, c'est-à-dire que les deux couples de génératrices d'intersection de ces deux surfaces avec leur commun plan tangent en ce point soient harmoniques, alors il est clair que toutes les droites de ce plan tangent appartiendront au complexe H, de sorte que chaque point de ce plan notable sera singulier par rapport à ce complexe; de plus la droite de ce plan qui joint les sommets des deux cônes susdits sera une nouvelle droite double du complexe. Donc la surface singulière de celui-ci se décomposera en ce plan et en une surface du 3e ordre et de la 4e classe, ayant trois droites doubles comme enveloppes dans ce plan, c'est-à-dire en une surface réciproque de celle de Steiner. On obtient ainsi un complexe [2 2 2] (A.) de M. Weiler. Etant donnée une surface réciproque de celle de Steiner, elle sera singulière seulement pour trois complexes H, chacun desquels fera encore, comme dans le cas précédent, un groupe harmonique avec les trois complexes fondamentaux spéciaux. A chacun de ces complexes-là correspond l'un des trois points d'intersection des trois droites doubles comme point de contact des deux surfaces du second ordre dont il est le complexe H.*)

[6].

Chaque complexe de cette classe est un complexe H. On peut arriver à ces complexes en partant des complexes [3 3], de la même manière qu'en partant des complexes [2 2 1 1] nous sommes arrivés

*) Le complexe des droites par lesquelles passent des couples de plans tangents orthogonaux à un paraboloïde ou à une parabole est un complexe de cette espèce. Sa surface singulière se décompose dans le plan à l'infini et une surface du 3e ordre et de la 4e classe ayant ce plan pour plan tritangent.

aux complexes [2 2 2]. Si la courbe d'intersection des deux surfaces du second ordre, dont l'on considère le complexe H, a un point de de rebroussement, et si en outre ces deux surfaces sont conjuguées harmoniques relativement aux deux cônes de leur faisceau, c'est-à-dire si les deux couples de génératrices d'intersection de ces surfaces avec le plan tangent dans leur point de contact sont harmoniques, la surface singulière se décomposera en ce plan tangent et en une surface du 3e ordre et de la 4e classe ayant une droite double comme enveloppe et ce plan-là comme plan triple, c'est-à-dire une surface du 3e ordre de la XIX espèce de Schläfli. Les complexes H ainsi obtenus sont donc les complexes [6] (A.) de M. Weiler.

Si au contraire on considère le complexe H relatif à un cône et à une autre surface du second ordre (pouvant se réduire aussi à un cône) passant par le sommet de celui-ci et ayant dans ce point pour plan tangent un plan tangent au cône, on obtient le complexe [6] (B.) de M. Weiler, c'est-à-dire un complexe dont la surface singulière se décompose en ce sommet, comme enveloppe de plans, et en une surface du 4e ordre et de la 3e classe, réciproque de celle de Schläfli mentionnée.

Comme on voit, l'on peut aussi obtenir fort-aisément les propriétés de ces deux espèces de complexes [6] de celles des deux espèces de complexes [2 2 2] en supposant que les trois droites doubles de ceux-ci viennent coincider en une seule. On s'explique aussi de cette manière pourquoi tous les ∞^1 complexes qui appartiennent à une surface singulière [6] sont des complexes H, tandis qu'à une surface singulière [2 2 2] appartiennent seulement trois complexes H; car si dans un groupe harmonique de 4 éléments 3 d'entre eux viennent coincider, le quatrième devient indéterminé.

[(1 1) 1 1 1].

On obtient un complexe H de cette classe comme lieu des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, qui soient dans leur faisceau les éléments doubles d'une involution dont les quatre cônes forment deux couples d'éléments conjugués; ou, en d'autres termes, ces deux surfaces du second ordre doivent être telles que deux arêtes opposées de leur tétraédre fondamental les coupent harmoniquement. Ces deux arêtes seront les deux droites doubles du complexe et de la surface singulière, qui sera une surface réglée du 4e dégré de l'espèce XI de Cremona. Cependant elle ne sera pas la plus générale, car dans les groupes d'éléments de formes de première espèce qui donnent les invariants absolus de cette surface et des complexes dont elle est la surface singulière, les éléments qui correspondent aux exposants isolés 1 de la caractéristique déterminent une involution dont un

élément double est celui qui correspond à (1 1), et l'autre élément double correspond au complexe H. On trouve effectivement que la surface [(1 1) 1 1 1 1] lorsqu'elle est singulière pour un complexe H a pour chaque droite double les 4 points et les 4 plans de rebroussement coincidant deux-à-deux*). On voit aussi qu' une telle surface est singulière pour un seul complexe H, qui dans la série des complexes ayant la même surface singulière se détermine de la manière dite.

[(1 1) 2 1 1].

Contrairement au cas précédent, *chaque* surface de la classe [(1 1) 2 1 1], c'est-à-dire chaque surface réglée du 4e dégré de l'espèce V de Cremona, est surface singulière de deux complexes H. Ceux-ci correspondent aux éléments doubles de l'involution dans laquelle sont conjugués les éléments qui correspondent aux deux exposants isolés 1 et ceux qui correspondent à (1 1) et 2. Un complexe H de cette classe est le complexe des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre qui ont une génératrice commune. Celle-ci est évidemment une droite double du complexe: c'est celle qui correspond à l'exposant 2. Les deux autres droites doubles, correspondantes à (1 1), passent par les deux points de contact des deux surfaces du second ordre et sont respectivement génératrices de ces deux surfaces de leur faisceau qui sont relativement à celles-là les conjuguées harmoniques des deux cônes ayant en ces points resp. leurs sommets.

[(3 1) 1 1].

A la surface singulière générale de cette classe, c'est-à-dire à la surface générale de l'espèce X de Cremona, appartient un complexe H, qui correspond à l'élément conjugué harmonique de celui qui correspond à (3 1) relativement à ceux qui correspondent aux deux exposants isolés 1. Ce cas dérive du précédent en faisant coincider dans celui-ci les deux racines qui correspondent à 2 et à (1 1). On obtient un tel complexe H en supposant non seulement que les deux surfaces du second ordre aient une droite commune, comme dans le cas précédent, mais encore qu'elles soient conjuguées harmoniques relativement aux deux cônes de leur faisceau. Effectivement alors les deux droites doubles qui correspondaient à (1 1) viennent coincider avec celle qui correspondait à 2, c'est-à-dire avec cette droite commune aux surfaces du second ordre.

[(2 1) 3].

Tous les complexes qui appartiennent à cette classe, c'est-à-dire

*) M. Weiler mentionne ce cas particulier de la surface [(1 1) 1 1 1 1] à la fin du No 1 de son mémoire.

qui ont pour surface singulière une surface de l'espèce VI de Cremona avec une génératrice de rebroussement, sont des complexes H. Les deux surfaces du second ordre qui ont un tel complexe pour complexe H doivent non seulement avoir une droite commune, comme pour les complexes H de la classe [(1 1) 2 1 1], mais il faut encore que cette droite touche la cubique gauche, dans laquelle se coupent aussi ces deux surfaces. Quand cela arrive, les deux directrices de la surface réglée [(1 1) 2 1 1], lesquelles passaient précisément par les deux points d'intersection de cette cubique avec cette droite, et dont nous avons donné la construction, coincideront dans la directrice unique de la surface réglée [(2 1) 3], tandis que la droite commune aux deux surfaces du second ordre deviendra la génératrice de rebroussement de cette surface réglée.

[(1 1) 2 2].

Une surface singulière de cette classe se compose d'une surface réglée générale du troisième dégré avec un point (comme enveloppe) de sa directrice double et le plan (comme lieu) qui le joint à la directrice simple. Or une telle surface est singulière pour des complexes H de deux espèces bien différentes. Un complexe de la 1re espèce est le complexe H qui appartient à un cône et à une autre surface du second ordre passant par son sommet, comme dans le cas [2 2 2] (B.), mais tels en outre que ces deux surfaces soient conjuguées harmoniques relativement aux deux autres cônes de leur faisceau. Cette dernière condition est précisément celle qui caractérisait le cas [2 2 2] (A.), de sorte que le complexe H, dont il s'agit, joint des propriétés relatives à ces deux cas déjà rencontrés; et l'on déduit de ce que nous avons dit à propos de ceux-ci la manière de déterminer les 4 droites doubles*). — Un complexe H de la 2e espèce appartenant encore à la

*) Ce complexe H de la classe [(1 1) 2 2] et de la 1e espèce est projectivement le même que le complexe du 2e dégré rencontré par M. Ball (The Theory of Screws, Dublin 1876, pag. 21 et suiv. et 95) comme ayant pour surface singulière un cylindroïde, et qui peut être défini comme le lieu des axes des complexes du 1er dégré d'une série linéaire triplement infinie (tandis que les axes des complexes du 1er dégré du faisceau en involution avec cette série ont précisément pour lieu ce cylindroïde.) On peut en effet vérifier directement que ce complexe de Ball est le lieu des droites par lesquelles passent des plans tangents perpendiculaires d'un paraboloïde orthogonal, qui a l'axe du cylindroïde pour axe de symétrie, contient les deux génératrices principales de celui-ci et a avec lui le même paramètre. — Si l'on considère une détermination métrique non plus parabolique, mais générale ou non-euclidienne, c'est-à-dire ayant une surface générale du second dégré pour absolu, alors le lieu des couples d'axes des complexes du 1er dégré d'une série linéaire triplement infinie est un complexe du 2e dégré de la classe [(1 1) 1 1 1 1], qui est encore, comme précédemment, un de nos complexes H. Sa surface singulière est le lieu des couples d'axes des complexes du faisceau

classe [(1 1) 2 2] est le complexe H qui correspond à un cône et à une autre surface du second ordre qui en contient une génératrice. On peut donc obtenir ce cas-ci par la combinaison des deux cas déjà étudiés [2 2 2] (B.) et [(1 1) 2 1 1].

A une surface singulière de la classe considérée [(1 1) 2 2] appartiennent trois complexes H, dont un de la 1e espèce, qui correspond à l'élément conjugué harmonique de celui qui correspond à (1 1) relativement à ceux qui correspondent aux deux exposants 2, et deux de la 2e espèce qui correspondent aux conjugués harmoniques de chacun de ces deux derniers éléments relativement à l'autre et à celui qui correspond à (1 1).

[(5 1)].

Chaque complexe de cette classe est un complexe H, qui appartient à un cône et une autre surface du second ordre se coupant mutuellement en une cubique gauche avec une de ses droites tangentes. La surface singulière se décompose en une surface réglée du 3e dégré dont les directrices coincident en une même droite, et le point et le plan cuspidaux de cette droite. Celle-ci est précisément la droite commune aux deux surfaces du second ordre, tandis que ce point et ce plan sont leur point et leur plan de contact; toutes les droites qui passent par ce point ou qui appartiennent à ce plan sont évidemment des droites du complexe. On peut déduire les proprietés du complexe H de cette classe de celles du complexe de la classe [(2 1) 3] en supposant que l'une des deux surfaces du second ordre, auxquelles celui-ci appartient comme complexe H, s'approche indéfiniment du seul cône de leur faisceau.

[(1 1)(1 1) 1 1].

L'on sait qu'une surface singulière de cette classe se compose de deux surfaces du second dégré F_1, F_2 se coupant mutuellement dans le quadrilatère gauche des droites doubles. Parmi les ∞' complexes du 2e dégré qui lui appartiennent il y en a toujours et seulement deux qui soient des complexes H; ils correspondent aux éléments doubles

---

en involution avec cette série. M. Lindemann dans le mémoire „Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner Massbestimmung" (Math. Ann. Bd. VII, à la page 136) rencontre aussi le lieu des couples d'axes des complexes linéaires d'un faisceau et remarque qu'ils forment une surface réglée de l'espèce XI de Cremona. Cependant il faut ajouter qu'elle n'est pas la surface la plus générale de cette espèce: les points de rebroussement de ses droites doubles coincident par couples, puisqu'elle est la surface singulière d'un des complexes H de la classe

[(1 1) 1 1 1],

complexes que nous avons déjà examinés.

de l'involution, qui a pour couples d'éléments conjugués les éléments correspondants aux deux (1 1) et aux deux exposants 1 de la caractéristique. Un complexe H de cette classe est le complexe des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre, lorsque celles-ci se coupent mutuellement en un couple de coniques (l'une de ces deux surfaces pouvant alors être un cône), dont l'une on même toutes les deux peuvent se décomposer en deux droites. Il y a une infinité de manières d'obtenir ainsi ce même complexe; les plans des coniques, où les deux surfaces du second ordre, dont il est le complexe H, se coupent, doivent passer tous les deux par l'une ou l'autre de deux droites fixes, qui sont les diagonales du quadrilatère gauche des droites doubles, et ces coniques mêmes appartiendront à l'une ou à l'autre des deux surfaces F_1, F_2. Si r', r'' sont ces deux diagonales du quadrilatère gauche d'intersection de F_1, F_2, on voit facilement que les droites singulières d'un tel complexe H sont les droites qui s'appuient à l'une de ces r', r'' et touchent l'une de ces deux surfaces singulières F_1, F_2, et les droites qui s'appuient à l' autre de ces diagonales et touchent l'autre de ces surfaces. Pour les deux complexes H qui appartiennent à ces mêmes surfaces singulières on obtient les droites singulières en établissant des deux manières possibles la correspondance entre F_1, F_2 et r', r''*). Si l'on considère le plan tangent à F_1 en un point quelconque P, et parmi toutes les droites qui dans ce plan passent par P on prend les rayons doubles de l'involution dans laquelle sont conjuguées les deux génératrices de F_1 et les deux tangentes de F_2 qui appartiennent à ce faisceau, ces deux rayons seront, d'après ce que nous avons dit au commencement, les droites singulières (correspondantes à P) des deux seuls complexes H qui appartiennent à ces surfaces singulières. Or l'on voit bien que ces droites iront couper respectivement les deux diagonales r', r'': de sorte que l'on a ainsi une confirmation de nos énoncés. — M. Weiler a remarqué que les droites singulières d'un complexe quelconque ayant pour surface singulière

*) Les complexes H de cette classe [(1 1)(1 1) 1 1] peuvent se transformer projectivement dans le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux sphères. La surface singulière de ce complexe se compose d'une sphère du faisceau de celles-ci, et d'un hyperboloïde de révolution ayant pour foyers les centres des deux sphères et qui n'est autre chose que l'enveloppe des plans qui coupent les deux sphères en deux cercles mutuellement orthogonaux. Les deux droites r', r'' deviennent ainsi celle qui joint les centres des deux sphères et la droite à l'infini du plan radical de celles-ci; relativement au complexe H considéré la première correspond à l'hyperboloïde singulier, la seconde à la sphère singulière. — On obtient aussi ce complexe comme l'ensemble des droites par lesquelles passent des plans tangents orthogonaux à une surface du 2e dégré (à centre) de révolution. Si celle-ci se réduit à un cercle on a un cas particulier projectivement du complexe H de la classe considérée.

l'ensemble des deux surfaces F_1, F_2 forment deux congruences du 2° dégré de tangentes communes à ces surfaces et resp. à deux autres surfaces de leur faisceau. Or nous pouvons ajouter que parmi tous ces complexes les deux complexes H se distinguent par ce que ces deux autres surfaces se réduisent aux deux couples de plans, c'est-à-dire par ce que ces congruences singulières du 2° dégré acquièrent deux droites focales r', r''.

Le système des deux surfaces F_1, F_2, et chaque complexe H, dont elles forment la surface singulière, ont un invariant absolu. Celui-ci prend une valeur particulière lorsque pour les deux surfaces du second ordre (se coupant en deux coniques), dont ce complexe est le lieu des droites qui les coupent harmoniquement, on peut prendre deux cônes.

$$[(1\,1)(1\,1)2].$$

Une surface singulière de cette classe se compose d'une surface du second dégré F, avec deux de ses plans tangents π_1, π_2 et les deux points P', P'' dans lesquels la droite d'intersection de π_1, π_2 coupe la surface F. Or il arrive pour cette classe de surfaces singulières la même chose que pour la classe $[(1\,1)\,2\,2]$, dont on peut d'ailleurs dire qu'elle dérive; c'est-à-dire à une surface singulière de cette classe appartiennent trois complexes H, dont deux correspondent aux éléments conjugués harmoniques de l'un des éléments qui correspondent à (1 1) relativement à l'autre et à celui qui correspond à 2, tandis que l'autre complexe H correspond au conjugué harmonique de l'élément représenté par 2 relativement aux deux éléments représentés par (1 1); et les deux premiers complexes H sont projectivement de nature différente de celle du dernier. Un complexe H de la première espèce est en effet l'ensemble des droites coupant harmoniquement deux cônes qui ont une génératrice commune: les sommets de ces cônes sont les points P', P'' et les plans tangents aux cônes le long de la génératrice commune $P'P''$ sont les plans π_1, π_2. Chacun de ces deux plans coupe le cône auquel il n'est pas tangent en une autre droite et a relativement au même cône pour polaire une droite de l'autre plan: les deux couples de droites ainsi construites sont, comme l'on voit facilement, les 4 droites doubles, que le complexe considéré a, outre la droite $P'P''$. Les deux complexes H de cette espèce, que nous avons dit appartenir à la même surface singulière, font correspondre ainsi de deux manières diverses les points P', P'' et les plans π_1, π_2.

Le complexe H de la même classe, mais de la deuxième espèce, est au contraire l'ensemble des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, dont l'intersection se compose de deux coniques, mais qui soient en outre conjuguées harmoniques relativement aux deux cônes de leur faisceau; cependant on peut, sans changer le

complexe, faire en sorte que ceux-ci, et avec eux l'une de ces deux surfaces, viennent coincider, de sorte que ce complexe sera le complexe H correspondant à une surface du second ordre et un cône qui en contient deux génératrices. On peut aussi le considérer comme composé des droites qui coupent harmoniquement un couple de plans (π_1 et π_2) et une surface du second ordre, qui coupera la droite commune à ces plans dans les points P', P'', et que l'on peut réduire à un cône, ou bien à une surface qui touche les deux plans π_1 et π_2 et les coupe en conséquence suivant les 4 droites doubles du complexe autres que la droite $P'\,P''$.*) Seulement ce complexe-ci (et non pas ceux de la première espèce) peut être considéré comme cas particulier du complexe H de la classe précédente [(1 1)(1 1) 1 1]. Les droites singulières de ce complexe, autres que les droites contenues dans les plans π_1 et π_2, ou qui passent par les points P', P'', sont les droites tangentes de la surface F du second ordre, qui s'appuient sur la droite polaire de $P'\,P''$ relativement à la même surface (car il résulte de ce que nous avons dit que, parmi toutes les tangentes en un point à cette surface, la tangente qui est droite singulière du complexe H considéré sera la conjugué harmonique de celle qui coupe $P'\,P''$ relativement aux deux génératrices de F). Pour les autres complexes qui ont la même surface singulière les droites singulières vont toucher aussi une autre surface du 2e dégré, de sorte que cette propriété des droites singulières de notre complexe H sert à le caractériser parmi tous ceux de la même série; précisément comme nous avons vu être caractérisés les complexes H de la classe précédente [(1 1)(1 1)1 1] parmi tous ceux qui ont la même surface singulière.**)

[(2 1)(2 1)].

Une surface singulière de cette classe se compose de deux surfaces du second dégré raccordées le long de deux génératrices, droites doubles

*) On voit par les différentes constructions que nous avons ainsi données de ce complexe qu'il est une transformation projective du complexe des droites par lesquelles passent des plans tangents orthogonaux à un paraboloïde de révolution, ou bien du complexe des droites telles que les plans qui les joignent à deux points fixes sont perpendiculaires entr'eux.

**) M. Hirst dans le mémoire „On the complexes generated by two correlative planes" (Collectanea Mathematica in mem. D. Chelini, pag. 51—73) a étudié les complexes de la classe [(1 1)(1 1)2] comme composés des droites qui joignent les points conjugués de deux plans corrélatifs et a trouvé effectivement, par une voie tout-à-fait différente de la nôtre, que dans une série de complexes de cette classe ayant la même surface singulière il y a un seul complexe (c'est le complexe qu'il représente par C_3. V. pag. 62) jouissant par rapport aux droites singulières de la propriété caractéristique dont nous parlons ci-dessus; c'est là précisément le complexe H de deuxième espèce, que nous avons dit appartenir

des complexes. Chaque complexe qui a une telle surface singulière est un complexe H des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre, qui se coupent mutuellement en deux coniques tangentes (dont l'une peut se décomposer en un couple de droites). Les deux droites doubles se construisent facilement, car elles passent par le point de contact de ces coniques et sont des génératrices de la surface conjuguée harmonique relativement à ces deux surfaces du second ordre du couple de plans de leur faisceau.

[(2 2) 1 1].

La surface singulière d'un complexe de cette classe se compose d'un cône du second dégré, d'une conique (comme enveloppe de plans) et du sommet de ce cône avec le plan de cette conique (resp. comme enveloppe de plans et comme lieu de points). Or dans la série des complexes qui ont cette surface singulière il y en a un qui est un complexe H: c'est celui qui correspond à l'élément conjugué harmonique de celui représenté par (2 2) relativement aux deux représentés par 1. Ce complexe H est le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, lorsque celles-ci se coupent en deux coniques et sont conjugués harmoniques relativement au couple de plans et à l'un des deux cônes de leur faisceau. Ce cône sera précisément une partie de la surface singulière; tous les plans qui passent par son sommet seront des plans singuliers et le plan, qui joint ce sommet à la droite d'intersection du couple de plans, formera, compté deux fois, l'autre partie de la surface singulière comme lieu. Les droites de ce plan qui passent par le sommet du cône sont, comme on voit facilement, des droites doubles du complexe, et la surface singulière se composera encore (comme enveloppe de plans) d'une conique placée dans ce plan. Les droites singulières de ce complexe H sont les droites qui coupent cette conique et la droite polaire de son plan relativement au cône, et les droites qui touchent ce cône et coupent la polaire de son sommet relativement à la conique; parmi les complexes qui ont la même surface singulière cette propriété des droites singulères d'avoir deux droites focales caractérise le complexe H.*)

---

toujours à une telle série. M. Hirst ne rencontre pas les deux complexes H de première espèce, qui appartiennent aussi à la même série; pour ceux-ci les droites singulières ne jouissent plus de la propriété dont il s'agit.

*) Ce complexe est projectivement le même que le complexe des droites par lesquelles passent des plans tangents orthogonaux à la surface provenant de la rotation d'une hyperbole équilatère autour de l'un de ses axes. Il est aussi le même que le complexe des droites qui ont un même moment donnè relativement à une droite fixe: la surface singulière dé ce dernier complexe se décompose en un cylindre de révolution, ayant cette droite pour axe et ce moment pour rayon, et en le cercle imaginaire à l'infini comme enveloppe de plans.

[(4 2)].

Chaque complexe de cette classe est un complexe H. Mais il y en a deux espèces, réciproques l'une de l'autre. — Un complexe [(4 2)] (A.) de M. Weiler est le complexe des droites qui coupent harmoniquement une surface du second ordre (qui peut se réduire à un cône) et un couple de plans menés par l'une de ses tangentes. Il est clair que la surface singulière de ce complexe se composera, comme lieu, de ces deux plans (dont les droites appartiennent au complexe) et du plan tangent à la surface du second ordre dans le point de contact avec la droite d'intersection de ces plans, compté deux fois, car les droites de ce plan qui passent par ce point sont des droites doubles du complexe. Comme enveloppe la surface singulière se compose de ce point, compté deux fois, et d'une conique placée dans ce plan tangent.

Un complexe [(4 2)], (B.) se compose des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre, lesquelles se coupent en deux coniques tangents et soient en outre conjuguées harmoniques relativement au cône et au couple de plans de leur faisceau. Ce cône et le plan tangent aux deux surfaces dans leur point de contact, compté doublement, formeront la surface singulière comme lieu de points; tandis que, comme enveloppe de plans, elle se compose du sommet du cône, compté doublement, et de deux autres points places sur la génératrice de contact du cône avec le plan tangent commun. Mais on peut aussi obtenir ce même complexe [(4 2)] (B.) comme le complexe des droites coupant harmoniquement deux cônes qui se touchent le long d'une génératrice et qui par conséquent se coupent encore en une conique ayant un point commun avec cette génératrice; si l'on prend alors sur celle-ci le point conjugué harmonique de ce point relativement aux sommets des deux cônes, le cône qui a ce nouveau point pour sommet et qui appartient au faisceau de ceux-ci sera une partie de la surface singulière, qui sera complétée par le plan tangent commun et par les sommets des deux cônes donnés.

[(1 1 1) (2 1)].

Chaque complexe de cette classe est le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre raccordées suivant une génératrice. L'on voit très-facilement que la surface singulière est la surface du second ordre, comptée deux fois, qui dans le faisceau de ces deux surfaces données est la conjuguée harmonique relativement à elles du couple de plans qui appartient au même faisceau. On voit aussi que le complexe a pour droites doubles la génératrice de raccordement des surfaces et toutes les génératrices de l'autre système de la surface singulière; et pour droites singulières les

tangentes à cette surface dans les points de la génératrice de raccordement.

$$[(1\,1\,1)\,(1\,1\,1)].$$

Les droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, qui se touchent le long d'une conique, forment un complexe de cette classe, c'est-à-dire le complexe des droites tangentes à une autre surface du second dégré. Cette surface se détermine facilement, car elle appartient au faisceau des deux surfaces données et est la conjuguée harmonique relativement à celles-ci du plan double qui appartient à ce faisceau.*)

$$[(2\,2\,2)].$$

Cette classe de complexes comprend deux espèces: A. le complexe des droites qui coupent une conique; B. celui des droites qui touchent un cône. Il est évident qu'on les obtient comme complexes H, c'est-à-dire comme complexes des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, en prenant dans le cas A. pour l'une de ces deux surfaces un plan double, et dans le cas B. pour les deux surfaces deux surfaces qui, non seulement se touchent le long d'une conique, mais encore soient conjuguées harmoniques relativement au cône et au plan double de leur faisceau, c'est-à-dire qui se correspondent dans une homologie harmonique (les droites du complexe touchent alors précisément ce cône du faisceau); ou bien encore en prenant pour les deux surfaces deux cônes ayant le même sommet: dans ce cas le cône touché par les droites du complexe aura aussi évidemment le même sommet, et sera l'enveloppe des plans qui coupent les deux cônes donnés suivant des couples harmoniques de génératrices.

$$[(1\,1)\,(1\,1)\,(1\,1)].$$

On obtient le complexe tétraédral dont le rapport anharmonique est -1 comme le complexe H des droites coupant harmoniquement une surface du second ordre et un couple de plans conjugués relativement à elle: le tétraèdre singulier se composera de ces deux plans et des deux plans tangents à la surface donnée dans les points d'intersection avec la droite commune à ceux-ci. La surface peut se réduire à un cône, dont le sommet soit dans l'un des deux plans, ou même à un second couple quelconque de plans, ce qui nous ramène à la génération ordinaire du complexe tétraédral. — On voit que dans une série de complexes ayant la même surface singulière et

*) Comme cas particulier de la proposition corrélative on a que les intersections des plans tangents orthogonaux d'une sphère forment le complexe des droites tangentes d'une autre sphère, ce qui est évident.

appartenant à la classe [(1 1) (1 1) (1 1)] il y en a trois qui soient des complexes H, précisément comme il arrivait pour ceux des classes [2 2 2], [(1 1) 2 2] et [(1 1) (1 1) 2].

[(3 3)].

C'est le complexe des droites qui coupent harmoniquement une surface du second ordre et deux plans conjugués relativement à elle, mais dont l'un lui soit tangent (de sorte que l'autre passera par le point de contact). La surface singulière se compose de ces deux plans, dont celui tangent compté trois fois, et de deux points, c'est-à-dire le point de contact compté trois fois et le pôle du second plan par rapport à la surface, puisque toutes les droites qui passent par ce pôle appartiennent au complexe. Au lieu de la surface du second ordre on peut prendre un cône tangent au plan triple.

Enfin, pour considérer aussi les complexes H qui se décomposent en deux complexes linéaires, nous pouvons ajouter que le complexe du 2e dégré des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre se décompose en deux complexes linéaires dans les cas principaux suivants: 1° en deux complexes linéaires en involution lorsque dans le faisceau déterminé par ces deux surfaces il y a deux couples de plans conjugués harmoniques relativement à celles-ci. 2° en deux complexes linéaires en involution dont l'un spécial, lorsque l'une des surfaces est un couple de plans passants par une même génératrice de l'autre. 3° en deux complexes linéaires spéciaux en involution, lorsque les deux surfaces sont des cônes (pouvant se réduire à des couples de plans) ayant le même sommet et conjugués harmoniques relativement à deux couples de plans de leur faisceau.

Ajoutons encore que, bien que nous ayons classifié seulement les complexes des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, nos résultats prouvent que ces mêmes complexes se composent des droites par lesquelles passent des couples harmoniques de plans tangents à deux surfaces de la seconde classe, car la plupart des complexes, que nous avons obtenus, correspondent par dualité à eux-mêmes, et les autres ont aussi leurs réciproques parmi ceux que nous trouvés.*)

Juillet 1883.

---

*) Nous ne pouvons pas développer ici avec plus de détails les propriétés des diverses espèces de complexes, que nous avons rencontrées, propriétés qui

peuvent toutes s'obtenir en partant de la définition commune de ces complexes (comme complexes H ou réciproques). Cependant nous énoncerons encore un mode général de génération, qui nous parait remarquable, des surfaces singulières de tous ces complexes, lequel découle aussi immédiatement de la définition de ceux-ci; on a le théorème suivant:

Si dans un système linéaire de surfaces de la 2e classe (inscrites dans la même développable de la 4e classe) l'on a une involution, le lieu des courbes d'intersection des surfaces conjuguées dans cette involution est une surface du 4e ordre et de la 4e classe, qui est la surface singulière du complexe du 2e dégré des droites par lesquelles passent des couples harmoniques de plans tangents aux deux surfaces doubles de cette involution (tandis que le lieu des tangentes communes aux surfaces conjuguées de l'involution est précisement ce complexe).

En particulier, si l'on suppose que ce système soit une série homofocale de surfaces du 2e dégré et que l'un des éléments doubles de l'involution soit le cercle imaginaire à l'infini, on voit que la surface des ondes (et plus en général la surface singulière du complexe des droites par lesquelles passent des couples de plans tangents à une quadrique quelconque perpendiculaires entre eux) contient une infinité de lignes de courbure d'une série de surfaces homofocales du 2e dégré, propriété qui a été trouvée récemment par M. Böklen („Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle", Zeitschrift für Math. u. Ph., Bd. 27, pag. 160—175).

Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2° dégré double.

Par

Corrado Segre à Turin.

Chaque complexe du 2° dégre Q^2 de ceux dont nous voulons nous occuper ici brièvement jouit de la propriété caractéristique d'avoir pour droites doubles toutes les *génératrices* (d'un même système) d'une surface du 2° dégré S^2, laquelle, comptée deux fois, forme en conséquence sa surface singulière. Considérons l'une quelconque r des *directrices* (c'est-à-dire des génératrices de l'autre système) de S^2. Le cône du complexe Q^2, qui appartient à un point quelconque P de r, se décompose en deux plans qui se coupent dans la génératrice de S^2 passant par P (puisque cette génératrice est une droite double du complexe) et qui par conséquent coupent encore S^2 suivant deux directrices r', r'': or il est facile de voir que toutes les droites qui coupent r et r', ou bien r et r'', appartiennent à Q^2; car si, par exemple, l'on cherche les deux plans (tangents à S^2) qui relativement à ce complexe correspondent à un point quelconque de r' on voit que l'un d'entr' eux, devant passer par P, contiendra aussi toute la directrice r. De là il s'ensuit que le complexe Q^2 contient une ∞^1 de congruences linéaires: chaque directrice r de S^2 est une directrice de deux diverses congruences contenues dans Q^2, de sorte qu'il lui correspond deux autres directrices r', r'' de S^2. Deux congruences linéaires quelconques dont les deux couples de directrices soient des directrices de S^2 appartiennent toujours à un complexe linéaire bien défini du *réseau* des complexes linéaires qui contiennent toutes les génératrices de S^2. En conséquence, si l'on prend deux quelconques de ces congruences linéaires contenues dans Q^2 et qu'on les joigne successivement par des complexes linéaires à toutes les autres, l'on obtiendra deux faisceaux projectifs de complexes linéaires de ce réseau. Vice-versa on voit sans difficulté que le complexe du 2° dégré lieu des intersections des éléments correspondants de deux faisceaux projectifs de complexes linéaires (complexe qui a en général pour droites doubles

seulement les deux droites communes à ces deux faisceaux) aura toutes les génératrices d'un même système d'une surface du 2e dégré pour droites doubles, lorsque ces deux faisceaux de complexes appartiendront à un même réseau (et contiendront en conséquence toutes ces génératrices).

On peut trouver de la manière suivante les droites singulières du complexe Q^2. Avant tout notons que la droite singulière qui correspond à un point (ou plan) singulier quelconque, c'est-à-dire à un point quelconque P de S^2, est une droite double du complexe, c'est-à-dire la génératrice de S^2 passant par P. S'il y avait aussi une autre droite singulière correspondant à P, il faudrait que les deux plans, dans lesquels se décompose le cône de Q^2 qui appartient à P, se coupassent soit dans cette droite, soit dans la génératrice qui passe par P, c'est-à-dire que ces deux plans coincidassent, ou que le point P fût un point *double* pour le complexe Q^2. Dans ce cas il arrive que les deux directrices r', r'', qui correspondent de la manière vue à la directrice r passant par P, viennent coincider entr'elles. Or lorsqu'on prend arbitrairement sur S^2 la directrice r', il y a deux directrices r qui lui correspondent et en conséquence aussi deux directrices r''; de sorte qu'entre r', r'' qui correspondent à la même directrice r il y a une correspondance (2, 2) (sur une forme géométrique rationale). Il y a donc en général 4 droites r, que nous nommerons r_1, r_2, r_3, r_4, pour chacune desquelles les deux directrices correspondantes r', r'' coincident, respectivement dans les directrices r_1', r_2', r_3', r_4'. Cette construction de ces deux quaternes de directrices est corrélative à elle-même. Donc il s'ensuit de ce que nous avions dit et de cette observation que:

Les points doubles et les plans doubles du complexe Q^2 sont les points et les plans de quatre directrices r_1, r_2, r_3, r_4. — Les droites singulières de ce complexe forment quatre congruences linéaires, dont les couples de directrices sont r_1, r_1'; r_2, r_2'; r_3, r_3'; r_4, r_4'. A chaque droite singulière de la congruence i^{me} appartiennent comme point et plan singuliers correspondants le point et le plan qu'elle a communs avec r_i, c'est-à-dire un point et un plan doubles du complexe*).

*) M. Weiler dans sa classification des complexes du 2e dégré („Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades", Math. Ann. VII, pag. 145—207) n'a pas aperçu le vrai rôle que jouent, parmi les 8 directrices des 4 congruences linéaires des droites singulières d'un complexe quelconque de ceux que nous considérons ici, les 4 que nous avons nommées r_1, r_2, r_3, r_4. Effectivement il dit pour le cas général [(111)111] (pag 159) et le répète ensuite pour les cas particuliers [(211)11] (pag. 175), [(111)21] (pag. 177), etc., que 4 de ces 8 directrices sont remplies des points singuliers et les autres 4 des plans singuliers, qui correspondent aux droites singulières du complexe; tandis que nous voyons que les 4 mêmes directrices contiennent tous ces points et ces

On peut étudier avec avantage les complexes Q^2, dont la surface singulière est une surface S^2 du 2e dégré comptée deux fois, au moyen d'une représentation. On sait, en effet, que l'on peut représenter le réseau des ∞^2 complexes linéaires contenant les génératrices de S^2 sur les droites d'un plan π, de sorte qu'à un faisceau de ces complexes corresponde un faisceau de ces droites. Alors aux points de π corre-

---

plans singuliers. Il faut en conséquence rectifier quelque construction inexacte que M. Weiler déduit de ce rôle dualistique qu'il suppose être joué par les deux quaternes de directrices. — Nous ajouterons que les coordonnées de ces directrices dans le cas [(111)111], en supposant avec M. Weiler que l'équation de condition pour les droites et l'équation du complexe soient:

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0,$$

sont: pour les directrices r_i:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \sqrt{\lambda_4(\lambda_5 - \lambda_6)}, \quad x_5 = \sqrt{\lambda_5(\lambda_6 - \lambda_4)}, \quad x_6 = \sqrt{\lambda_6(\lambda_4 - \lambda_5)}$$

et pour les directrices r_i' correspondantes:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \sqrt{\lambda_4(\lambda_5 - \lambda_6)}\,(\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6), \quad x_5 = \sqrt{\lambda_5(\lambda_6 - \lambda_4)}\,(\lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_4),$$
$$x_6 = \sqrt{\lambda_6(\lambda_4 - \lambda_5)}\,(\lambda_6 - \lambda_4 - \lambda_5).$$

M. Weiler donne les coordonnées des directrices des congruences de droites singulières seulement dans le cas [(211)11) (V. pag. 175), mais ses expressions ne sont pas exactes et il faut les corriger comme il suit: en supposant avec lui que l'équation du complexe en coordonnées plückeriennes soit:

$$\lambda_1(p_{12} + p_{34})^2 - \lambda_2(p_{12} - p_{34})^2 + p_{14}^2 = 0$$

les coordonnées d'une directrice r_i seront:

$$\begin{cases} p_{12} \\ p_{34} \end{cases} = 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \begin{cases} p_{34} \\ p_{12} \end{cases} = 0, \quad p_{13} = p_{23} = p_{14} = 0, \quad p_{23} = \lambda_2 - \lambda_1$$

et celles de la directrice r_i' correspondante seront:

$$\begin{cases} p_{34} \\ p_{12} \end{cases} = 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \begin{cases} p_{12} \\ p_{34} \end{cases} = 0, \quad p_{13} = p_{23} = p_{14} = 0, \quad p_{23} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Ces expressions et celles que nous avons données pour le cas [(111)111] peuvent servir à vérifier analytiquement les résultats que nous obtenons ci-dessus.

Peut-être ne sera-t-il pas inutile que nous notions ici quelques autres inexactitudes, que nous avons rencontrées dans le mémoire de M. Weiler. A propos des complexes de la classe [(11)(11)11) il dit (pag. 162) que par une droite quelconque il en passe 4 ayant une même surface singulière (couple de surfaces du 2e dégré); car, dit-il, dans un plan qui passe par cette droite il y a 4 coniques tangentes à celle-ci et doublement tangentes aux deux coniques d'intersection avec la surface singulière; or on sait qu'au contraire les coniques satisfaisant à ces conditions forment 3 couples bien distincts et on voit facilement que seulement celles d'un couple peuvent appartenir à un complexe ayant cette surface singulière: par une droite quelconque passent donc seulement *deux* de ces complexes. — A propos du complexe [(42)] il n'est pas exact de dire (pag. 198) que

spondront univoquement les faisceaux contenus dans ce réseau de complexes, ou bien les congruences qui en sont les soutiens et qui sont des congruences linéaires quelconques ayant pour directrices deux directrices de S^2. Nous les appellerons simplement les congruences du réseau. Comme parmi les complexes d'un faisceau il y en a en général deux spéciaux, il s'ensuit que dans le plan π parmi les droites d'un faisceau il y en a en général deux qui correspondent à des complexes linéaires spéciaux du réseau: donc les droites de π qui correspondent à des complexes linéaires spéciaux, c'est-à-dire aux directrices de S^2, enveloppent une courbe de la 2e classe γ^2. Les points de γ^2 correspondent aux congruences linéaires spéciales du réseau, c'est-à-dire aux congruences dont les directrices coincident (ces directrices correspondant aux tangentes de γ^2 en ces points). Comme chaque droite de π contient en général deux points de γ^2, chaque complexe du réseau contient (parmi les ∞^1 congruences du réseau qui lui appartiennent et dont les couples de directrices forment une involution) deux congruences spéciales du réseau, dont les directrices sont les éléments doubles de cette involution.

Maintenant si nous considérons le complexe quadratique Q^2 et les ∞^1 congruences linéaires (du réseau) que nous avons vu lui appartenir, il est clair qu'à celles-ci correspondent dans π les points d'une courbe du 2e ordre c^2, car sur une droite quelconque de π il y a deux de ces points, puisque dans un complexe linéaire quelconque du réseau il y a deux de ces congruences. Vice-versa à chaque courbe du 2e ordre c^2

---

la surface singulière suffit à en déterminer les coniques appartenant aux divers plans de l'espace: pour cette détermination il faut encore donner p. e. la congruence des droites singulières. — Le complexe de la classe [(33)] peut être considéré comme une particularisation du complexe tétraédral: il est donc étrange que M. Weiler (pag. 200) parle de deux congruences linéaires, aux directrices infiniment voisines, de droites singulières de ce complexe et s'en serve pour la construction de celui-ci: on doit dire au contraire que les droites singulières sont les droites des deux plans et des deux points qui composent la surface singulière, en comptant trois fois celles qui appartiennent au plan et au point triples. — Pour les complexes [(211)2] la congruence des droites singulières se décompose (comme l'on pourra du reste vérifier par les méthodes que nous exposerons ci-dessous) en un point et un plan doubles et en outre en deux congruences linéaires qui sont tout-à-fait générales, et non pas spéciales, comme dit M. Weiler (pag. 187). — Il n'est pas vrai que les deux complexes linéaires auxquels appartiennent les deux congruences quadratiques des droites singulières du complexe [(22)11] (pag. 185) soient en général en involution. — On retrouve la même inexactitude à propos du complexe [(32)1] (pag. 192) que l'on peut d'ailleurs considérer comme un cas particulier du précédent. — Nous ne notons pas les inexactitudes relatives aux cas [(22)2], [(11)(11)2] et [(31)(11)], car elles ont déjà été corrigées par M. Hirst (V. Proceedings of the London Mathematical Society, vol. X, ou bien Collectanea mathematica in mem. Chelini, pag. 51 et suiv.).

de π correspond un complexe quadratique Q^2 ayant les génératrices de S^2 pour droites doubles. Les ∞^1 droites tangentes à cette conique c^2 correspondent à ∞^1 complexes linéaires du réseau, chacun desquels jouit de la propriété d'être tangent au complexe Q^2 selon toutes les droites d'une congruence linéaire du réseau. Si par un point quelconque de c^2 l'on mène les deux tangentes à γ^2, la congruence linéaire correspondante qui appartient à Q^2 aura pour directrices les directrices de S^2 qui correspondent à ces tangentes. Et si par les deux points où une tangente quelconque t de γ^2 coupe c^2 l'on mène les deux autres tangentes t' et t'' à γ^2, les directrices r, r', r'' qui correspondent à t, t', t'' auront entr'elles cette relation que rr' et rr'' seront deux couples des directrices de congruences contenues dans Q^2. Il s'ensuit immédiatement que, comme nous avions déjà trouvé, il y a 4 droites $r(r_1, r_2, r_3, r_4)$ telles que les droites r', r'', qui leur correspondent, viennent coincider (respectivement en r_1', r_2', r_3', r_4'): les tangentes correspondantes t de γ^2 seront les 4 tangentes communes t_1, t_2, t_3, t_4 aux coniques c^2 et γ^2, tandis que t' et t'' viendront coincider respectivement dans les autres tangentes t_1', t_2', t_3', t_4' de γ^2 qui passent par les points de contact de celles-là avec c^2.

Toutes les propriétés projectives des ∞^5 courbes du second ordre c^2 du plan π, soit entr'elles, soit relativement à la courbe γ^2, se traduisent immédiatement par cette représentation en des propriétés projectives des ∞^5 complexes quadratiques Q^2 ayant le même système de génératrices de S^2 pour droites doubles. Ainsi les propriétés des faisceaux et en général des séries quelconques de ces courbes donneront celles des faisceaux et des séries correspondantes de ces complexes. Comme relativement à une conique c^2 et à γ^2 il y a en général trois droites ayant le même pôle, on conclut que dans le réseau il y a en général trois complexes linéaires en involution, qui sont fondamentaux pour le complexe Q^2, c'est-à-dire tels que relativement à chacun d'eux celui-ci correspond à soi-même; on voit en outre de cette manière que relativement à chacun de ces trois complexes linéaires les 4 directrices r_1, r_2, r_3, r_4 (comme aussi les 4 autres r_1', r_2', r_3', r_4') se correspondent entr'elles deux-à-deux. Si dans le plan π l'on prend la conique γ^2 comme *absolu* d'une métrique, on voit bien que, dans un certain sens, la géométrie métrique des coniques dans le plan π et la géométrie projective des complexes quadratiques considérés sont identiques, c'est-à-dire:

La géométrie projective des complexes quadratiques, qui ont les génératrices d'un même système d'une surface du 2e dégré pour droites doubles, est identique à la géométrie métrique (non-euclidienne en général) des coniques dans un plan.

Considérons maintenant dans le plan π la série des courbes du

second ordre c^2 qui ont communes les 4 tangentes t_1, t_2, t_3, t_4 avec la courbe γ^2: on peut l'appeler (en considérant γ^2 comme absolu) une *série homofocale* de coniques. Les complexes quadratiques Q^2 qui correspondent à ces coniques formeront aussi une série de ∞^1 complexes dont les propriétés se déduiront de celles de la série homofocale de coniques. Avant tout l'on voit que la propriété qui les définit est celle d'avoir communes les 4 directrices r_1, r_2, r_3, r_4 qui sont le lieu des points doubles et l'enveloppe des plans doubles de chacun d'eux. Les trois complexes fondamentaux du réseau sont les mêmes pour tous ces complexes quadratiques. Puis comme une droite quelconque de π est touchée par une seule conique de la série, tandis que par chaque point il en passe en général deux, dont les tangentes en ce point sont conjuguées par rapport à γ^2, nous pouvons conclure que chaque complexe linéaire du réseau est tangent le long d'une congruence linéaire à un seul complexe quadratique de la série, tandis que par chaque droite de l'espace (et en conséquence aussi par la congruence du réseau, qui passe par elle) passent en général deux complexes quadratiques de la série et qu'en outre les deux complexes linéaires du réseau qui touchent ceux-ci dans cette droite (et par conséquent dans cette congruence) sont en involution. Etc. etc. — Ces propriétés montrent que la série considérée de complexes quadratiques est un cas particulier de la série homofocale des complexes quadratiques généraux, qui ont pour surface singulièr la même surface de Kummer; on peut donc l'appeler aussi une *série homofocale* et l'on voit qu'elle est représentée par une série homofocale de coniques*).

On peut aussi trouver de cette manière les invariants absolus des complexes Q^2. Une série homofocale de ces complexes aura un seul invariant absolu: le rapport anharmonique des 4 directrices r_1, r_2, r_3, r_4; tandis que l'un quelconque de ces complexes aura aussi un autre invariant absolu, c'est-à-dire p. e. l'un des rapports anharmoniques que trois de ces directrices déterminent avec les directrices r_1', r_2', r_3', r_4'. Il faut noter à ce propos que pour les différents complexes Q^2 de la même série homofocale ces quaternes de directrices varient de l'un à l'autre et forment une involution du 4e dégré, à laquelle appartient aussi le quaterne fixe $r_1 r_2 r_3 r_4$, et qui se compose des quaternes ayant un même covariant sextique, représenté par les trois couples de di-

*) C'est cette série de complexes qui, pour les classes de complexes quadratiques dont nous nous occupons ici, remplace l'„Involutionssystem" de M. Klein (Liniengeometrie und metrische Geometrie, Math. Ann. V); car la définition que ce savant donne pour ce système n'est plus applicable immédiatement pour ces complexes. Effectivement ils jouissent de la propriété que leurs „Hauptflächen" sont indéterminées (précisément comme les lignes de courbure d'une sphère).

rectrices des congruences déterminées par les trois complexes fondamentaux du réseau deux-à-deux.

Nous noterons enfin que toutes les particularités que peut présenter le complexe Q^2, que nous avons considéré, peuvent être obtenues en considérant les particularités du couple de coniques c^2 et γ^2, dont c^2 ne peut pas se décomposer en deux droites sans que le complexe Q^2 se décompose en deux complexes linéaires. On obtient facilement les résultats suivants.

En supposant auparavant que la courbe de la 2e classe γ^2 (et par conséquent aussi la surface S^2) ne se décompose pas, l'on a ces cas-ci: Si la courbe du second ordre c^2 a la position la plus générale relativement à γ^2, alors Q^2 est le complexe le plus général de l'espèce considérée, c'est-à-dire il a la caractéristique [(111)111]. Si au contraire c^2 a un contact du premier, ou du second, ou du troisième ordre avec γ^2, le complexe Q^2 présente respectivement les cas [(111)21], [(111)3], [(111)(21)]. Si c^2 est doublement tangente à γ^2, Q^2 appartient à la classe [(111)(11)1]. Enfin si c^2 coincide avec γ^2, Q^2 est le complexe [(111)(111)] des droites tangentes à une surface S^2 du 2e dégré.

Si la courbe γ^2 se décompose en deux points, la surface singulière S^2 se décompose en deux plans et deux points de leur intersection. Si c^2 a une position générale relativement à ce couple γ^2 de points, Q^2 est un complexe de la classe [(211)11]. Si c^2 passe par l'un de ces points ou par tous les deux, Q^2 sera de la classe [(211)2] ou [(211)(11)]. Si c^2 touche en un point quelconque la droite qui joint ces deux points, ou si elle la touche en l'un de ceux-ci, le complexe Q^2 sera respectivement de la classe [(311)1] ou [(411)].

Enfin si les deux points dans lesquels se décompose γ^2 viennent coincider, la surface S^2 se réduira à un plan quadruple (comme partie de la surface singulière) avec l'un de ses points compté aussi 4 fois. Si c^2 ne passe pas par le point γ^2, le complexe Q^2 est de la classe [(221)1]; si au contraire c^2 passe par ce point, Q^2 est de la classe [(321)]. —

On voit donc que la représentation, dont nous nous sommes servis, peut être employée à donner immédiatement toutes les propriétés qui distinguent entr'elles les diverses classes de complexes que nous avons considérées; par exemple, elle donne non seulement les particularités de la surface singulière (qui ne suffiraient pas à distinguer ces classes entr'elles) mais aussi celles des congruences des droites singulières et celles des directrices auxquelles appartiennent les points et les plans doubles du complexe*).

*) On peut dans la représentation sur le plan π échanger entr'eux les mots *point* et *droite*, de sorte que les points et les droites de π correspondront resp. aux complexes et aux congruences linéaires du réseau. Cette correspondance

Une représentation tout-à-fait analogue des complexes linéaires d'un système linéaire triplement infini dans les plans de l'espace ordinaire, et par conséquent des congruences et des surfaces réglées (Regelschaaren) d'intersection de ces complexes dans les droites et les points du même espace, peut servir de la même manière à l'étude et à la classification de tous les complexes du 2e dégré dont la surface singulière est une surface réglée (du 4e dégré) quelconque. Alors les complexes linéaires spéciaux du système, c'est-à-dire les droites de la congruence linéaire qui est en involution avec celui-ci, seront représentés par les plans d'une surface de la 2e classe γ^2 (laquelle se réduira à une conique, ou à un couple de points, ou à deux points coincidants, si cette congruence linéaire a les directrices coincidantes, ou formant un faisceau, ou formant toutes les droites d'un plan ou d'un point). Un complexe quelconque du 2e dégré Q^2 dont la surface singulière soit réglée et appartienne à cette congruence linéaire sera représenté par une surface du 2e ordre c^2 de l'espace ordinaire, et les particularités que présente le système des deux surfaces c^2 et γ^2 correspondront à celles du complexe Q^2. (Si c^2 est un cône, Q^2 aura pour surface singulière une surface du 2e dégré double, de sorte qu'on rentre dans la catégorie de complexes déjà étudiée). Les génératrices de la surface singulière de Q^2 seront représentées par les plans tangents communs à c^2 et γ^2. A chacune d'elles r en correspondront deux autres r', r'' de facon que les congruences linéaires, dont les directrices sont rr' et rr'', appartiendront au complexe: les plans t, t', t'', qui leur correspondent respectivement, seront tangents à c^2 et γ^2, et en outre t, t' et t, t'' se couperont mutuellement dans deux droites appartenant à c^2. Cette relation entre ces trois plans permettra de voir très-simplement les particularités que peuvent présenter les congruences linéaires contenues dans Q^2.. La surface développable enveloppée par les plans tangents communs à c^2 et γ^2 correspondra au complexe des droites tangentes de la surface singulière de Q^2; et en particulier la courbe du 4e ordre de contact de cette développable avec c^2 correspondra à la congruence des droites singulières de Q^2*). A toute la

peut être établie en faisant correspondre à chaque complexe du réseau le point qui, relativement à lui, correspond à π; alors à chaque congruence du réseau correspondra la droite de π qui lui appartient. La courbe γ^2 deviendra l'intersection de π avec S^2, et les coniques c^2 correspondantes aux complexes quadratiques Q^2 seront les coniques mêmes de ces complexes. Pour chaque complexe Q^2 sa conique c^2 coupera γ^2 dans les 4 points d'intersection de π avec r_1, r_2, r_3, r_4. Et pour chaque classe particulière de ces complexes la position particulière de c^2 relativement à γ^2, c'est-à-dire des coniques et des cônes du complexe relativement à sa surface singulière S^2, se déduira immédiatement de ce que nous avons exposé.

*) Aux particularités que présente cette courbe du 4e ordre suivant la position mutuelle de c^2 et γ^2 correspondront très-simplement celles que présente

série homofocale des surfaces c^2 du second ordre inscrites dans cette développable correspondra la *série homofocale* des complexes du 2e dégré Q^2 qui ont la même surface réglée pour surface singulière. Comme par chaque point passent en général trois de ces surfaces homofocales, lesquelles se coupent *orthogonalement*, de même par chaque droite de l'espace passent en général trois des complexes quadratiques de cette série et leurs complexes linéaires tangents en involution avec la congruence linéaire qui contient la surface singulière sont entr'eux deux-à-deux en involution. Aux invariants absolus de l'une série (avec γ^2 pour élément fixe) correspondront ceux de l'autre série; etc. etc. On peut résumer toutes ces relations avec cette proposition, qu'il faut entendre convenablement: *La géométrie projective des complexes quadratiques dont les surfaces singulières sont des surfaces réglées appartenant à une congruence linéaire fixe est identique à la géométrie métrique (non-euclidienne en général) des surfaces du second ordre de l'espace à trois dimensions*).*

Turin, le 22. Septembre 1883.

---

la congruence des droites singulières suivant la classe du complexe Q^2 considéré. Nous sortirions hors des limites d'une simple note si nous développions ici cette méthode: qu'il nous suffise de dire que toutes les principales questions qui regardent les propriétés et la classification des complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface réglée peuvent être ainsi résolues avec la plus grande facilité. (Voir notre thèse, qui sera bientôt présentée à l'Académie des sciences de Turin, pour la publication dans ses Mémoires.) — Ces complexes ont été récemment étudiés par M. Weiler dans un mémoire (Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen. Zeitschrift für Math. u. Ph,, Bd. 27, pag. 257—288) où il traite analytiquement pour chaque classe de ces complexes la question de leur génération par des faisceaux projectifs de complexes linéaires (question que l'on peut immédiatement résoudre par notre méthode, sans aucun calcul). — Dans ce mémoire il remarque à propos du cas [(111)111] (pag. 262) que, si r et r' sont les directrices d'une de ses 4 congruences de droites singulières, les deux congruences de droites du complexe, qui ont une certaine d'entr' elles pour une directrice, coincident; cependant il ne parait pas qu'il se soit aperçu qu'en conséquence ces deux droites r et r' ne jouent pas un rôle dualistique pour le complexe.

*) Les représentations dont nous nous sommes servis ont été introduites dans la géométrie de la droite par M. Pasch (Zur Theorie der linearen Complexe. Crelle's J. Bd. 75). Si l'on considère la géométrie de la droite comme M. Klein a montré à le faire (voir spécialement le mémoire „Liniengeometrie und metrische Geometrie" déjà cité), c'est-à-dire comme la géométrie sur une surface du 2e dégré $M_4^{(2)}$ dans l'espace linéaire à 5 dimensions R_5, on voit que ces représentations peuvent être considérées comme des projections faites dans cet espace par une $M_2^{(1)}$ ou $M_1^{(1)}$ sur une $M_2^{(1)}$ (c'est-à-dire un plan) ou resp. une $M_3^{(1)}$ (c'est-à-dire un espace ordinaire), et qu'on pourrait très-bien les éviter sans faire des changements essentiels aux raisonnements, en employant les considérations directes de ces espaces à plusieurs dimensions. Ajoutons que les rapprochements auxquels elles nous ont conduit avec la géométrie métrique du plan et de l'espace ont une rélation étroite avec les idées générales que M. Klein a développées particulièrement dans le mémoire cité.

Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen.

Von

Axel Harnack in Dresden.

Vorbemerkung.

Bei fortgesetztem Studium allgemeiner Probleme der Integralrechnung drängte sich mir die Nothwendigkeit auf, eine zusammenfassende und zum Theil neue Darstellung der wesentlichsten Theoreme auszuführen, welche die Grundlage für die Rechnung mit Differentialquotienten und mit Integralen bilden. Dieselben sind bisher nicht sämmtlich deutlich erkannt, jedenfalls theils gar nicht, theils unter engeren Voraussetzungen als nothwendig, bewiesen worden. Einige der Sätze habe ich bei meiner Untersuchung der Fourier'schen Reihe (Annalen Bd. XIX; Bulletin des Sciences mathém. 2. S t. VI) behandelt; doch sind in der vorliegenden Arbeit die Beweise vollständiger gegeben. Ich möchte mit diesem Versuche an die Abhandlung von Heine: „Die Elemente der Functionenlehre" (Journal Bd. 74) anknüpfen, die auf die eigentlichen Fragen der Infinitesimalrechnung nicht eingeht, dagegen eine Einleitung zu derselben in präciser Form bildet, so dass ich die dort bewiesenen Theoreme im folgenden als bekannt voraussetze.

Der erste Theil beschränkt sich auf Differenzenquotienten und deren Grenzwerthe, mit besonderer Behandlung der beiden ersten Differentialquotienten. Der zweite, welchen ich bald folgen zu lassen beabsichtige, wird die Fundamentalsätze der Integralrechnung enthalten.

Erster Theil.

Lehrsätze über Differenzenquotienten und deren Grenzwerthe.

§ 1.

Die stetige Function.

Definitionen. Eine Function heisst in einem Intervalle an jeder Stelle x vorwärts genommen stetig, wenn daselbst

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta^+ f$$

durch Fixirung einer oberen positiven Grenze für Δx dem Betrage nach kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig kleine Zahl δ; also wenn $\lim \Delta^+ f = 0$ wird, für $\Delta x = 0$. Die Function heisst rückwärts genommen stetig, wenn $f(x - \Delta x) - f(x) = \Delta^- f$ bei positivem Δx kleiner wird als δ, also wenn $\lim \Delta^- f = 0$.

Bemerkung. Eine Function, die überall bloss vorwärts oder bloss rückwärts genommen stetig ist, kann nichts destoweniger punktuell nicht hebbare Unstetigkeiten erleiden: es kann $\lim f(x + \Delta x)$ von $\lim f(x - \Delta x)$ verschieden sein, und einer dieser Grenzwerthe überhaupt ganz unbestimmt werden. Eine Function, für welche

$$\lim [f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)]$$

gleich 0 wird, kann an der Stelle x unstetig sein, wie z. B. $\cos \frac{1}{x}$ an der Stelle 0, oder auch eine punktuell hebbare Unstetigkeit erleiden.

Definition. Eine Function heisst zu beiden Seiten einer Stelle stetig, wenn sie dort sowohl vor- als rückwärts genommen stetig ist, wenn also $\lim \Delta^+ f = 0$ und $\lim \Delta^- f = 0$ wird. Ist sie an jeder Stelle eines Intervalles stetig, so ist sie auch, nach bekannten Lehrsätzen, im ganzen Intervalle gleichmässig stetig, und nimmt jeden Werth mindestens einmal an, der zwischen zwei Functionswerthen gelegen ist, sowie auch Maximal- und Minimalwerthe.

§ 2.

Der erste vorwärts oder rückwärts gebildete Differenzenquotient.

Definitionen. Der erste vorwärts gebildete Differenzenquotient ist definirt durch $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta^+ f(x)}{\Delta x}$, und sein Grenzwerth für $\Delta x = 0$ heisst der vorwärts gebildete erste Differentialquotient. Der erste rückwärts gebildete Differenzenquotient ist

$$\frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = -\frac{\Delta^- f(x)}{\Delta x}$$

und sein Grenzwerth ist der erste rückwärts gebildete Differentialquotient. Die beiden Grenzwerthe sind unabhängig von einander und

können beide oder einzeln unbestimmt werden. Sie heissen positiv, wenn sich eine obere Grenze für Δx angeben lässt, von der ab die Quotienten stets positiv bleiben, allenfalls den Werth $+0$ annehmen; negativ, wenn von einer oberen Grenze ab die Quotienten stets negativ (einschliesslich von -0) bleiben; sie heissen endlich, wenn sich eine endliche Zahl K fixiren lässt, so dass der Betrag der Quotienten schliesslich kleiner bleibt als K.

Eine stetige Function wächst an einer Stelle mit wachsenden Werthen von x, falls die Differenz $f(x+\Delta x)-f(x)$, und also auch der Differenzenquotient, wenn Δx stetig nach 0 convergirt, schliesslich nur positiv bleiben. Sie nimmt ab mit wachsenden Werthen von x, falls die Differenz und der Differenzenquotient schliesslich nur negativ bleiben; sie ist constant an der Stelle, wenn die Differenz von einem endlichen Werthe von Δx an stets gleich 0 ist; sie oscillirt an der Stelle mit wachsenden Werthen von x, wenn die Differenz und der Differenzenquotient schliesslich sowohl positive wie negative Werthe erhalten, oder auch nur immer wieder den Werth 0 annehmen. Eine Function, die an einer Stelle wächst, kann nichts desto weniger in der Umgebung dieser Stelle unendlich viele Oscillationen besitzen. Dies tritt ein, wenn die Differenz $f(x+\Delta x)-f(x)$ bei beliebig kleinen Werthen von Δx zwar stets positiv bleibt, aber indem sie nach 0 convergirt, Werthe annimmt, die ihrer Grösse nach fortwährend oscilliren.

Vor- und rückwärts gebildete Differenzenquotienten können keinen von einander verschiedenen bestimmten Grenzwerth annehmen, wenn

$$\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}$$

also

$$\lim \frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

wird, wohl aber können, auch wenn diese letztere Gleichung erfüllt ist, die Grenzwerthe beide unbestimmt sein.

Die Function ist an einer Stelle vor- resp. rückwärts genommen sicherlich stetig, wenn daselbst der erste vor- resp. rückwärts gebildete Differentialquotient endlich ist. Eine Function kann dagegen unstetig sein, wenn nur der eine oder der andere Differentialquotient allenthalben endlich ist. Umgekehrt kann, wie durch Beispiele erwiesen wurde, eine stetige Function an jeder Stelle einen Differentialquotienten haben, dessen Werth entweder bestimmt unendlich oder unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen ist.

Lehrsatz 1. Wird bei einer stetigen Function der erste vorwärts gebildete Differenzenquotient in einem Intervalle überall schliesslich auch positiv, d. h. lässt sich an jeder Stelle eine Grenze für Δx an-

geben, so dass $\Delta^+ f$ bei abnehmenden Werthen von Δx stets auch positiv ist, so ist die Function in diesem Intervalle eine durchaus wachsende; der Differenzenquotient wird also überall nur positiv.

Beweis. Sind x_1 und x_2 zwei beliebige Stellen und $x_2 > x_1$, so muss gezeigt werden, dass $f(x_2) > f(x_1)$ ist. Betrachtet man nun den Verlauf der stetigen Function von x_1 bis x_2, so giebt es, da die Function nicht durchaus constant ist — denn sonst wäre die Differenz in allen Punkten dieses Intervalles constant gleich 0 — einen grössten Werth, der an den Grenzen oder im Innern des Intervalles an einer oder an mehreren Stellen erreicht wird. An der Stelle x_1 kann dieses Maximum nicht liegen, denn alsdann wäre $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ schliesslich durchaus negativ oder $= 0$, nicht aber positiv, ebenso wenig im Innern des Intervalles; mithin gehört der Maximalwerth zu der Stelle x_2, und es ist $f(x_2) > f(x_1)$.

Zusatz. Ist $-\frac{\Delta^- f}{\Delta x}$ überall schliesslich auch positiv, und $f(x)$ stetig, so ist $f(x)$ eine durchaus wachsende Function.

Ist $f(x)$ nicht stetig, so kann die Function eine sprungweise Abnahme an beliebig vielen Stellen besitzen, und doch $\Delta^+ f$ überall positiv werden.

Aus dem bewiesenen Satze folgt:

Lehrsatz 2. Es giebt keine stetige Function, für welche an jeder Stelle eines noch so kleinen Intervalles der Differenzenquotient schliesslich sowohl positiv als auch negativ wird.

Denn die Function müsste die Eigenschaft haben, dass sie sowohl durchaus wächst, als auch durchaus abnimmt, was zu einem Widerspruche führt.

Folgerung. Functionen mit unendlich vielen Oscillationen in der Umgebung jeder Stelle haben stets auch solche Punkte, an denen der Differenzenquotient schliesslich nur positiv, und Punkte an denen er nur negativ ist. Diese Punkte liegen überall dicht über jedes noch so kleine Intervall vertheilt, weil in keinem noch so kleinen Intervalle der Quotient allenthalben sowohl positiv als auch negativ werden kann, und weil die Function nicht mehr oscilliren würde, wenn im Intervall der Quotient allenthalben schliesslich positiv, oder allenthalben schliesslich negativ wird.

Lehrsatz 3. Das Vorzeichen des ersten vorwärts gebildeten Differentialquotienten kann bei einer stetigen Function niemals an einem einzelnen Punkte verschieden sein von dem Vorzeichen an sämmtlichen in der Umgebung des Punktes gelegenen Stellen.

Beweis. Wenn sich an der Stelle x ein Intervall angeben lässt, von x bis $x + h$, so dass zu sämmtlichen in das Innere dieses Intervalles fallenden Punkten, Differentialquotienten mit einerlei Vorzeichen,

etwa dem positiven gehören, so ist von $x + \varepsilon$ bis $x + h$ die Function $f(x)$ eine wachsende Function, ja sie ist auch eine wachsende Function, selbst wenn nur bekannt ist, dass an keiner Stelle der Quotient ausschliesslich negativ wird. Mithin ist, mag ε noch so klein sein, $f(x + \varepsilon)$ kleiner als $f(x_1)$, wenn x_1 einen beliebigen Punkt zwischen $x + \varepsilon$ und $x + h$ bedeutet. Sonach kann auch $f(x)$ nicht grösser sein als irgend ein anderer zum Intervall gehöriger Functionswerth, und es wird also auch an der Stelle x der Differentialquotient nicht negativ.

Hat also der vorwärts gebildete Differentialquotient an einem Punkte schliesslich ein bestimmtes Vorzeichen, so müssen zum mindesten in der vorwärts genommenen Umgebung dieses Punktes unendlich viele Punkte gelegen sein, an denen er das nämliche Vorzeichen besitzt, das heisst: der Punkt ist niemals isolirt. Hat der Differenzenquotient an einem Punkte ein unbestimmtes Vorzeichen, so liegen auch in der unmittelbaren Umgebung Punkte, an denen der Quotient positiv, und Punkte an denen er negativ ist, möglicherweise auch Punkte, an denen das Vorzeichen unbestimmt ist.

Nennt man ein Punktsystem, welches die Eigenschaft hat, dass kein Punkt des Systemes isolirt ist, ein System ohne Isolationen (nach einer Cantor'schen Bezeichnungsweise auch ein System, das als Divisor in seiner Ableitung enthalten ist, diese Ableitung ist perfect, Math. Annalen Bd. XXI, pag. 575), so ist also bewiesen, dass in jedem Intervalle die Punkte, an denen der erste vorwärts gebildete Differentialquotient ein bestimmtes Vorzeichen hat, stets ein Punktsystem ohne Isolationen bilden, während Punkte mit unbestimmten Vorzeichen zwar isolirt sein können, dann aber in ihrer unmittelbaren Umgebung sowohl Punkte besitzen, an denen der Quotient positiv, als auch solche, an denen er negativ ist.

(Ich bemerke, dass diese Eigenschaft für höhere Differenzenquotienten nicht so ohne weitere Bedingung besteht, siehe § 4, Lehrs. 4 und § 5, Lehrs. 4).

Folgesatz: Bildet man die Differenz $f(x) - Kx$ so folgt: die Punkte an denen der Differenzenquotient der stetigen Function $f(x)$ schliesslich grösser resp. kleiner ist als ein bestimmter Werth K, können niemals isolirt sein, und sind an einer Stelle die Unbestimmtheitsgrenzen des Differentialquotienten sowohl grösser wie kleiner als K, so liegen auch in unmittelbarer Umgebung dieser Stelle Punkte, an denen der Differentialquotient schliesslich grösser als K, und Punkte, an denen er kleiner ist als K.

Aus der Umkehr des Lehrsatzes 1 kann man weiter schliessen:

Lehrsatz 4. Ist für eine stetige Function der mit den Endwerthen eines Intervalles gebildete Quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ positiv, so muss es

Stellen geben, an denen der Differenzenquotient schliesslich durchaus positiv wird; und ist der obige Quotient negativ, so muss es Stellen geben, an denen der Differenzenquotient schliesslich durchaus negativ wird. Solche Stellen bilden ein System ohne Isolationen.

Lehrsatz 5. Hat der für die Endpunkte eines Intervalles gebildete Quotient der stetigen Function $f(x)$ den Werth $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = K$, so muss es im Intervalle von a bis b Stellen geben, an denen der Differenzenquotient schliesslich grösser oder gleich K wird, und Stellen, an denen er kleiner oder gleich K wird. (*Satz von du Bois-Reymond*, Math. Annalen, Bd. 16, pag. 119).

Beweis. Man bilde $\varphi(x) = f(x) - Kx$ so ist $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = 0$, also $\varphi(b) = \varphi(a)$. Die stetige Function $\varphi(x)$ ist nun entweder durchweg constant, alsdann ist lim $\frac{\Delta^+ f}{\Delta x}$ allenthalben gleich K, oder sie nimmt im Innern des Intervalles mindestens einmal einen Maximalwerth, oder mindestens einmal einen Minimalwerth an. Ist x_1 diese Maximalstelle, so liegen im Intervalle von a bis x_1 nicht isolirte Punkte, an denen $\frac{\Delta^+ \varphi}{\Delta x}$ schliesslich nur positiv ist, also lim $\frac{\Delta^+ f}{\Delta x} \geq K$, und im Intervalle von x_1 bis b nicht isolirte Punkte, an denen $\frac{\Delta^+ \varphi}{\Delta x}$ schliesslich nur negativ ist, also lim $\frac{\Delta^+ f}{\Delta x} \leq K$. Ist dagegen x_1 eine Minimalstelle, so liegen im ersten Intervalle Punkte, an denen der Differentialquotient kleiner oder gleich K, und im zweiten Punkte, an denen er grösser oder gleich K ist.

Bemerkung. Bei dem Beweise dieses Satzes, dem man auch leicht die erweiterte Form geben kann: der Quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ liegt bei einer stetigen Function innerhalb der Werthe, oder nach einer Bezeichnung von Herrn C. Neumann, des Werthevorrathes, welchen lim $\frac{\Delta^+ f}{\Delta x}$ bei allen Werthen von $x=a$ bis $x=b$ repräsentirt, ist über die Bestimmtheit oder Stetigkeit dieser Grenzwerthe keine Voraussetzung gemacht.

Lehrsatz 6. Ist für die stetige Function $f(x)$ der Quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = K$, so giebt es im Innern des Intervalles zum mindesten eine Stelle x, für welche der Grenzwerth des Differenzenquotienten gleich K wird, falls

$$\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

allenthalben gleich 0 wird. (*Satz von Rolle*).

Beweis. Es sei zunächst $K = 0$, also $f(b) = f(a)$. Wenn dann die Function nicht durchweg gleich 0 ist, so muss sie an einer Stelle x_1

im Innern des Intervalles ein Maximum oder ein Minimum haben, und zwar bezeichne x_1 die letzte Stelle, an welcher der Maximal- resp. Minimalwerth erreicht wird. Für ein Maximum ist alsdann

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0 \quad \text{und} \quad f(x_1 - \Delta x) - f(x_1) \leqq 0.$$

Da nun

$$\lim \left[\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} + \frac{f(x_1 - \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \right] = 0$$

werden muss, so folgt, dass daselbst die Quotienten, da sie nicht von ungleichem Zeichen sind, einzeln gleich 0 werden müssen. Aehnlich ergiebt sich der Beweis, wenn x_1 eine Minimalstelle ist.

Ist K nicht gleich 0, so bilde man $\varphi(x) = f(x) - Kx$, alsdann ist $\varphi(a) = \varphi(b)$, woraus nun für die Function $\varphi(x)$ und folglich für $f(x)$ das Behauptete folgt.

Lehrsatz 7. Wird für eine stetige Function der erste vorwärts (oder rückwärts) gebildete Differentialquotient allenthalben in einem Intervalle von a bis b gleich 0, so ist die Function eine Constante. (*Satz von Dirichlet*).

Beweis. Bildet man $\varphi(x) = \pm [f(x) - f(a)] + \delta(x - a)$, mit δ eine beliebig kleine Grösse bezeichnend, so ist $\frac{\Delta^+ \varphi}{\Delta x} = \pm \frac{\Delta^+ f}{\Delta x} + \delta$ bei jedem Werthe von x schliesslich positiv. Mithin ist nach Lehrsatz 1, $\varphi(x)$ eine durchaus wachsende Function, die, weil an der Anfangsstelle $\varphi(a) = 0$ ist, nicht negativ werden kann. Es ist

$$\pm [f(x) - f(a)] + \delta(x - a) > 0 \quad \text{oder} \quad \delta(x - a) > \pm [f(x) - f(a)]$$

bei jedem Werthe von x. Der Betrag von $f(x) - f(a)$ ist folglich durchaus kleiner als die positive Grösse $\delta(b - a)$ und weil δ beliebig klein ist, so ist $f(x) = f(a)$.

Zusatz. Der Beweis des Satzes lässt sich auch bereits führen, wenn man weiss, dass der Differentialquotient allenthalben 0 wird, mit Ausnahme von Punkten, die nach der Definition von Cantor eine reductibele Menge bilden.

Es ist für eine spätere Anwendung nothwendig, und auch sonst von Interesse, die Frage zu beantworten, ob die abgeleiteten Sätze auch gelten, wenn man den ersten vorwärts gebildeten Differentialquotienten in allgemeinerer Weise definirt.

Definition. Als allgemeinen ersten vorwärts gebildeten Differentialquotienten an der Stelle x kann man den Grenzwerth des Quotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x + \Delta' x)}{\Delta x - \Delta' x}$$

bezeichnen, in dem Δx und $\Delta' x$ beide positiv sind, $\Delta x > \Delta' x$ angenommen wird, und beide in irgend welcher Weise stetig nach 0 convergiren.

Dieser Quotient erhält auch die Form

$$\frac{f(x+\varepsilon+\Delta x)-f(x+\varepsilon)}{\Delta x};$$

ε und Δx, beide positiv, convergiren stetig nach 0. Alsdann bleiben die früheren Sätze im wesentlichen bestehen; ich hebe die folgenden hervor.

Lehrsatz 8. Lässt sich an jeder Stelle Δx und ε so bestimmen, dass

$$\lim_{\Delta x=0,\ \varepsilon=0} \frac{f(x+\varepsilon+\Delta x)-f(x+\varepsilon)}{\Delta x}$$

positiv wird, wenn Δx und ε stetig nach Null convergiren, so ist die Function eine durchaus wachsende.

Beweis. Es seien x_1 und x_2 zwei beliebige Stellen im Intervalle, und $x_2 > x_1$, so soll gezeigt werden, dass $f(x_2) > f(x_1)$. Da die stetige Function $f(x)$ im Intervalle nicht constant sein kann — denn sonst würde der Quotient bei endlichen Werthen von ε und Δx allenthalben im Innern des Intervalles 0 — so muss sie an den Grenzen, oder im Innern des Intervalles irgendwo einen Maximalwerth erreichen. Es ist zu zeigen, dass dieser Maximalwerth nur an der Endstelle x_2 liegen kann. Denn wäre x_μ eine Stelle im Innern, oder an der Grenze x_1, für welche der Maximalwerth eintritt, so wäre $f(x_\mu+\Delta x_\mu)-f(x_\mu)$ schliesslich jedenfalls negativ, allenfalls 0, nicht aber positiv. Andererseits liessen sich aber ε und Δx so bestimmen, dass

$$f(x_\mu+\varepsilon+\Delta x)-f(x_\mu+\varepsilon)>0.$$

Da ε und Δx stetig nach 0 convergiren, so convergirt auch ihre Summe $\varepsilon+\Delta x$ stetig nach 0. Man kann demnach zusammengehörige Grössen ε' und $\Delta' x$ so bestimmen, dass $\varepsilon'+\Delta' x=\varepsilon$ und also

$$f(x_\mu+\varepsilon)-f(x_\mu+\varepsilon')>0.$$

Desgleichen wird $\varepsilon''<\varepsilon'$ und $\Delta'' x<\Delta' x$ so bestimmt werden können, dass $\varepsilon''+\Delta x''=\varepsilon'$ und

$$f(x_\mu+\varepsilon')-f(x_\mu+\varepsilon'')>0.$$

. . . . . .

Demnach folgt

$$f(x_\mu+\varepsilon+\Delta x)>f(x_\mu+\varepsilon)>f(x_\mu+\varepsilon')>f(x_\mu+\varepsilon'')\ldots.$$

Die Glieder der Reihe convergiren nach dem Werthe $f(x_\mu)$, und es ist also

$$f(x_\mu+\varepsilon+\Delta x)>f(x_\mu)$$

was der Forderung, dass $f(x_\mu)$ der Maximalwerth ist, widerstreitet. Daraus folgt, nach derselben Methode wie beim Beweise des Lehrsatzes 7.

Lehrsatz 9. Wird für eine stetige Function der allgemeine, vorwärts (oder rückwärts) gebildete, erste Differentialquotient allenthalben in einem Intervalle gleich 0, d. h. ist

$$\lim \frac{f(x+\Delta x+\varepsilon)-f(x+\varepsilon)}{\Delta x}$$

schliesslich allenthalben kleiner als eine beliebig kleine Zahl δ, wenn Δx und ε beide positiv, stetig in irgendwelcher Weise nach 0 convergiren, so ist die Function in diesem Intervalle eine Constante.

Die Bedingung, dass ε stetig mit Δx nach 0 convergirt, kann aufgehoben werden; es ist erforderlich, den Satz auch in der Form zu betrachten:

Lehrsatz 10. Weiss man von einer Function $f(x)$, dass der Werthevorrath des Quotienten $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ durchaus endlich ist, also bei allen Werthen von x und bei noch so kleinen Werthen der positiven Grösse Δx kleiner bleibt als eine bestimmte endliche Grösse K, und dass für jeden Werth von x eine Grösse Δx anggebbar ist, so dass

$$\lim \frac{f(x+m\Theta\Delta x+\Delta x)-f(x+m\Theta\Delta x)}{\Delta x}=0$$

wird für $\Delta x=0$, wobei m eine bestimmte positive Zahl, Θ einen unbekannten variabelen positiven Bruch zwischen 0 und 1 bedeutet, so ist $f(x)$ constant. (Die erste Bedingung involvirt die Stetigkeit von $f(x)$).

Beweis. Es seien x_1 und x_2 zwei beliebige Stellen ($x_2 > x_1$); um nachzuweisen, dass $f(x_1)=f(x_2)$ ist, verfahre man folgendermassen. An der Stelle x_1 lässt sich $\Delta_1 x$ so bestimmen, dass

$$\text{abs}\,[f(x_1+\varepsilon+\Delta_1 x)-f(x_1+\varepsilon_1)] < \delta\Delta_1 x.$$

Dabei ist $\varepsilon_1=\Theta m\Delta_1 x$, also jedenfalls gleich oder kleiner als $m\Delta_1 x$. Nennt man das Intervall von x_1 bis $x_1+\varepsilon+\Delta_1 x$ gleich h_1, so ist $\varepsilon_1 \leqq \frac{m}{m+1} h_1$, und die Ungleichung lautet:

$$\text{abs}\,[f(x_1+h_1)-f(x_1+\varepsilon_1)] < \delta\Delta_1 x.$$

An der Stelle x_1+h_1 bestimme man wiederum die Grössen ε_2 und $\Delta_2 x$ derart, dass:

$$\text{abs}\,[f(x_1+h_1+\varepsilon_2+\Delta_2 x)-f(x_1+h_1+\varepsilon_2)] < \delta\Delta_2 x.$$

Wird $\varepsilon_2+\Delta_2 x=h_2$ gesetzt, so ist $\varepsilon_2 \leqq \frac{m}{m+1} h_2$. Setzt man dieses Verfahren an der Stelle $x+h_1+h_2$ fort, so sieht man, dass man eine Reihe von Ungleichungen entwickeln kann:

$$\text{abs}\,[f(x_1+h_1)-f(x_1+\varepsilon_1] < \delta\Delta_1 x,$$
$$\text{abs}\,[f(x_1+h_1+h_2)-f(x_1+h_1+\varepsilon_2)] < \delta\Delta_2 x,$$
$$\text{abs}\,[f(x_1+h_1+h_2+h_3)-f(x_1+h_1+h_2+\varepsilon_3)] < \delta\Delta_3 x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wobei

$$\varepsilon_1 \leqq \frac{m}{m+1} h_1, \quad \varepsilon_2 \leqq \frac{m}{m+2} h_2, \quad \varepsilon_3 \leqq \frac{m}{m+3} h_3 \cdots$$

und

$$\varepsilon_1 + \Delta_1 x = h_1, \; \varepsilon_2 + \Delta_2 x = h_2; \quad \varepsilon_3 + \Delta_3 x = h_3 \text{ u. s. w.}$$

ist.

Nimmt man an, dass der Process bei unendlichem Abnehmen der Grösse h nach einem mittleren Punkt x_μ convergirt, und beachtet man, dass der Voraussetzung nach

$$\begin{aligned}
&\text{abs}\,[f(x_1 + \varepsilon_1) - f(x_1)] < K\varepsilon_1, \\
&\text{abs}\,[f(x_1 + h_1 + \varepsilon_2) - f(x_1 + h_1)] < K\varepsilon_2, \\
&\text{abs}\,[f(x_1 + h_1 + h_2 + \varepsilon_3) - f(x_1 + h_1 + h_2)] < K\varepsilon_3, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

wird, so folgt durch Addition aller dieser Ungleichungen, da

$$h_1 + h_2 + h_3 + \cdots = x_\mu - x_1$$

wird:

$$\text{abs}\left[f(x_\mu) - f(x_1) \pm \left(< K\frac{m}{m+1}(x_\mu - x_1)\right)\right] < \delta(x_\mu - x_1) - \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \cdots).$$

Da man nun auch vom Punkte x_μ an denselben Process ausführen kann, so erkennt man, dass allgemein zwischen zwei Punkten x_1 und x_2 die Beziehung besteht:

$$\begin{aligned}
\text{abs}\left[f(x_2) - f(x_1) \pm \left(< K\frac{m}{m+1}(x_2 - x_1)\right)\right] &< \delta(x_2 - x_1) - \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \cdots) \\
&< \delta\,\Sigma\Delta x.
\end{aligned}$$

In sämmtlichen Intervallen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$, deren gesammte Summe kleiner ist als $\frac{m}{m+1}(x_2 - x_1)$, lässt sich aber der gleiche Process vollziehen. Es wird z. B. im ersten Intervalle

$$\text{abs}\left[f(x_1 + \varepsilon_1) - f(x_1) \pm \left(< K\frac{m}{m+1}\varepsilon_1\right)\right] < \delta\varepsilon_1$$

ebenso:

$$\begin{aligned}
&\text{abs}\left[f(x_1 + h_1 + \varepsilon_2) - f(x + h_1) \pm \left(< \frac{K}{m+1}\varepsilon_2\right)\right] < \delta\varepsilon_2, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Demnach wird man nach einmaliger Wiederholung des Verfahrens in allen diesen Intervallen zu der Ungleichung geführt:

$$\text{abs}\left[f(x_2) - f(x_1) \pm \left(< K\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 (x_2 - x_1)\right)\right] < \delta\,\Sigma\Delta x < \delta(x_2 - x_1)$$

und führt man denselben Process wieder in den neuen Zwischenintervallen aus, so ergiebt sich nach n-maliger Anwendung desselben:

$$\text{abs}\left[f(x_2) - f(x_1) \pm \left(< K\left(\frac{m}{m+1}\right)^n (x_2 - x_1)\right)\right] < \delta\,\Sigma\Delta x < \delta(x_2 - x_1).$$

Weil nun $\left(\frac{m}{m+1}\right)^n$ die 0 zur Grenze hat, wenn n beliebig wächst, und δ von vornherein beliebig klein gemacht werden konnte, so folgt

$$f(x_2) = f(x_1).$$

Dieselbe Methode führt auch zum Beweise des Satzes:

Lehrsatz 11. Ist der Werthevorrath von $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ durchaus endlich, und

$$\lim \frac{f(x+\Theta m\Delta x+\Delta x)-f(x+\Theta m\Delta x)}{\Delta x}$$

bei jedem Werthe von x auch positiv, so ist $f(x)$ eine durchaus wachsende Function.

Daraus folgt weiter:

Lehrsatz 12. Ist der Quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ positiv, so muss es auch, wenn der Werthevorrath von $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ endlich ist, im Intervalle von a bis b Stellen geben, an denen

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Theta m\Delta x+\Delta x)-f(x+\Theta m\Delta x)}{\Delta x}$$

schliesslich nur positiv wird.

Setzt man nun $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = A$ und bildet

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - A(x-a),$$

so wird $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$. Da also die stetige Function $\varphi(x)$ an den Endpunkten denselben Werth hat, so muss sie, wenn sie nicht durchaus constant ist, im Innern des Intervalles wenigstens ein Maximum oder ein Minimum annehmen, und mithin kann der Grenzwerth ihres Differenzenquotienten nicht durchaus positiv, oder durchaus negativ, folglich der Grenzwerth des Quotienten der Function $f(x)$ nicht durchaus grösser oder durchaus kleiner als A sein.

Also gilt auch hier

Lehrsatz 13. Der Werth des Differenzenquotienten $A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gehört, falls $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ durchaus endlich bleibt, zu den Werthen, welche der Quotient

$$\lim \frac{f(x+m\Theta\Delta x+\Delta x)-f(x+m\Theta\Delta x)}{\Delta x}$$

im Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ besitzt, wie auch immer der echte Bruch Θ von x und Δx abhängen mag.

Eine einfache Erweiterung (vergleiche die Bemerkung zu Lehrsatz 5) ist es dann wieder einzusehen, dass dieser Werth A *innerhalb* des Werthevorraths gelegen ist. Denn da die stetige Function $\varphi(x)$, wenn sie nicht durchaus constant ist, mindestens ein Maximum oder ein Minimum besitzt, so wird, wenn x_1 die Maximalstelle bezeichnet, der

Quotient $\frac{\varphi(x_1)-\varphi(a)}{x_1-a}$ positiv von Null verschieden, und ebenso $\frac{\varphi(b)-\varphi(x_1)}{b-x_1}$ negativ von Null verschieden; ist x_1 die Minimalstelle so kehren sich die Zeichen um. Daraus folgt, dass es Stellen geben muss, an denen der Grenzwerth des Differenzenquotienten der Function $\varphi(x)$ positiv, und Stellen, an denen er negativ von Null verschieden ist. An diesen Stellen bleibt der Grenzwerth des Differenzenquotienten der Function $f(x)$ grösser resp. kleiner als A.

§ 3.

Der erste mittlere Differenzenquotient.

Definition. Als allgemeinen ersten Differenzenquotienten an der Stelle x kann man den Quotienten

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x+\Delta' x)}{\Delta x-\Delta' x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x-\Delta' x}-\frac{\Delta' f}{\Delta' x}\cdot\frac{\Delta' x}{\Delta x-\Delta' x}$$

bezeichnen, wobei die Grössen Δx und $\Delta' x$ einzeln positiv oder negativ sein können. Mittleren Differenzenquotienten will ich im folgenden denjenigen nennen, für welchen $\Delta x > 0$ und $\Delta' x = -\Delta x$ ist; also

$$\frac{\Delta_m f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta^+ f}{\Delta x}-\frac{\Delta^- f}{\Delta x}\right).$$

Der Grenzwerth, welcher sich ergiebt, wenn Δx und $\Delta' x$ stetig nach 0 convergiren, heisst der allgemeine resp. der mittlere Differentialquotient. Ich beweise im folgenden die Sätze für den mittleren Differentialquotienten.

Bemerkungen. Aus dem Vorzeichen des mittleren Differenzenquotienten an einer bestimmten Stelle lässt sich kein unbedingter Schluss ziehen auf das Verhalten der Function an dieser Stelle hinsichtlich des Wachsens, der Abnahme oder des Oscillirens. Nur soviel lässt sich allgemein aussagen: Wenn die Function zu beiden Seiten einer Stelle eine mit wachsenden Werthen von x wachsende ist, wenn also schliesslich $f(x+\Delta x)-f(x)>0$ und $f(x-\Delta x)-f(x)<0$, so wird auch der mittlere Differenzenquotient an dieser Stelle schliesslich nur positiv sein, und wenn die Function zu beiden Seiten abnimmt, so wird der mittlere Differenzenquotient schliesslich nur negativ sein. Wenn dagegen die Function an der Stelle x oscillirt, so kann der mittlere Quotient daselbst 0, oder positiv, oder negativ sein, oder auch in seinem Vorzeichen alterniren.

Beispiele. Die Function $x \sin\frac{1}{x}$ hat an der Nullstelle den Quotienten

$$\frac{\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}-\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}}{2\Delta x}=0.$$

Die Function $x\cos\frac{1}{x}$ hat an der Nullstelle den Quotienten

$$\frac{\Delta x \cos\frac{1}{\Delta x} + \Delta x \cos\frac{1}{\Delta x}}{2\Delta x} = \cos\frac{1}{\Delta x}$$

also einen oscillirenden Werth.

Definirt man eine Function bei positiven Werthen von x durch die Gleichung

$$f(x) = x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2\left(\sin\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right),$$

bei negativen durch:

$$f(x) = x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^3,$$

so ist $f(x)$ zu beiden Seiten der Nullstelle eine stetige Function mit oscillirenden positiven und negativen Werthen; $f(0) = 0$. Nichtsdestoweniger wird

$$\frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x\left(\sin\frac{1}{\Delta x}\right)^2}{2\Delta x} = \frac{1}{4}\left(\sin\frac{1}{\Delta x}\right)^2$$

eine durchaus positive Grösse.

Vorwärts gebildeter und mittlerer Differenzenquotient können keinen von einander verschiedenen bestimmten Grenzwerth annehmen, wenn

$$\lim\frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = \lim\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

also

$$\lim\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = 0$$

wird; wohl aber können, auch wenn diese letztere Gleichung erfüllt ist, die Grenzwerthe der Quotienten beide unbestimmt sein.

Der Satz, dass der mittlere Differenzenquotient bei einer zu beiden Seiten einer jeden Stelle wachsenden Function allenthalben schliesslich positiv wird, lässt sich umkehren und liefert den

Lehrsatz 1. Wird bei einer stetigen Function der erste mittlere Differenzenquotient in einem Intervalle überall schliesslich positiv, so ist die Function in diesem Intervalle eine durchaus wachsende.

Beweis. Es seien x_1 und x_2 zwei beliebige Stellen im Intervalle a bis b, und $x_2 > x_1$, so ist zu beweisen, dass $f(x_2) > f(x_1)$. Es sei an der Stelle x_1 ein Werth Δx_1 fixirt, so dass $f(x_1 + \Delta x_1) > f(x_1 - \Delta x_1)$, und die beliebig kleine Grösse Δx_1 sei so gewählt, dass $x_1 + \Delta x_1$ kleiner ist als x_2. Wenn nun der Unterschied $f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1 - \Delta x_1)$ gleich δ ist, so lässt sich an der Stelle $x_1 + \Delta x_1 = x'$ jedenfalls noch ein Intervall angeben von der Länge h, so dass alle in das Innere dieses Intervalles fallenden Functionswerthe ebenfalls grösser sind als $f(x_1 - \Delta x_1)$, und zwar diesen Werth mindestens um eine bestimmte Grösse etwa $\frac{\delta}{2}$ übertreffen. Dieses Intervall schliesst entweder den Punkt x_2 ein, dann ist also

$$f(x_2) = f(x_1 + \Delta x_1) + \left(\geq \frac{\delta}{2}\right),$$

oder man muss annehmen, dass dieses noch nicht der Fall ist. Alsdann lässt sich aber an der Stelle $x' + h = x''$ ein Intervall $\Delta x''$ angeben, so dass $f(x'' + \Delta x'') > f(x'' - \Delta x'')$ wird für alle Werthe des Zuwachses Δx von 0 bis zum fixirten Werthe $\Delta x''$, und man kann $\Delta x''$ so wählen, dass $x'' - \Delta x''$ in das Intervall von x' bis $x' + h$ hineinfällt. Es ist sodann $f(x'' + \Delta x'') > f(x'' - \Delta x'')$ also

$$f(x'' + \Delta x'') = f(x_1 - \Delta x_1) + \left(> \frac{\delta}{2}\right).$$

Daraus folgt, dass das Intervall h jedenfalls noch um die Länge $\Delta x''$ vermehrt werden kann. An dem Punkte $x' + h + \Delta x'' = x'''$ lässt sich aber wiederum ein Intervall angeben, so dass

$$f(x''' + \Delta x''') > f(x''' - \Delta x''')\,,$$

und so erkennt man, dass auch von der Stelle x''' aus das Intervall verlängert werden kann. Auch das ist nicht denkbar, dass der Process in unendlicher Folge nach einem mittleren Punkte x_μ convergirt, denn auch für diesen Grenzpunkt besteht die Ungleichung

$$f(x_\mu + \Delta x_\mu) > f(x_\mu - \Delta x_\mu).$$

Mithin kann man den Punkt x_2 jedenfalls erreichen, und es ist

$$f(x_2) = f(x_1 - \Delta x_1) + \left(\geq \frac{\delta}{2}\right).$$

Da Δx_1 beliebig klein ist, so ist $f(x_2)$ sicherlich nicht kleiner als $f(x_1)$. Die Function $f(x)$ ist also so beschaffen, dass jeder Werth derselben nicht kleiner ist, als irgend ein anderer zu einer vorangehenden Stelle gehöriger, und da sie auch nicht durchaus oder auch nur in einem Theilintervalle constant sein kann, weil sonst der Differenzenquotient bereits bei endlichen Werthen von Δx gleich 0 wird, so ist sie eine im ganzen Intervalle zunehmende.

Bemerkung. Es ist im Unterschiede von Lehrsatz 1 des vorigen Paragraphen zu bemerken, dass sich der Beweis nicht führen lässt, wenn man bloss annimmt, dass der mittlere Differenzenquotient überall schliesslich „auch positiv" wird. Es scheint mir demnach die Möglichkeit nicht ausgeschlossen zu sein, dass es oscillirende Functionen giebt, für welche der mittlere Differenzenquotient allenthalben theils nur positiv, theils alternirend, sowohl positiv wie negativ wird.

Lehrsatz 2. Ist für eine stetige Function der mit den Endwerthen eines Intervalles gebildete Quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ positiv, so muss es Stellen geben, an denen der mittlere Differenzenquotient schliesslich auch positive Werthe annimmt, und ist der obige Quotient negativ, so muss es Stellen geben, an denen der Quotient schliesslich auch negative Werthe erhält.

Lehrsatz 3. Hat der für die Endpunkte eines Intervalles gebildete Quotient der stetigen Function $f(x)$ den Werth $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = K$, so muss es Stellen geben, an denen der mittlere Differenzenquotient schliesslich auch Werthe annimmt, die grösser oder gleich K sind, und Stellen, an denen er auch Werthe annimmt, die kleiner oder gleich K sind.

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich aus dem Lehrsatze 1 in derselben Weise, wie die analogen Sätze des vorigen Paragraphen. Nur besteht der Unterschied, dass hier nicht behauptet werden kann, dass Stellen vorhanden sind, an denen der Quotient nur positiv (resp. nur negativ) bleibt, oder nur grösser oder gleich (resp. nur kleiner oder gleich) wird als K.

Auch kann man beweisen, dass die Punkte an denen der mittlere Quotient ein bestimmtes Vorzeichen hat, nicht derart isolirt sein können, dass in der beiderseitigen Umgebung nur Punkte liegen, an denen er das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt; dass vielmehr alsdann in unmittelbarer Umgebung zum mindesten auch solche Punkte liegen, an denen das Vorzeichen alternirt; und dass ebenso Punkte mit alternirenden Vorzeichen nicht eingeschlossen sein können von Punkten, an denen das Vorzeichen durchaus dasselbe ist.

Lehrsatz 4. Ist für die stetige Function $f(x)$ der Quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = K$, so giebt es im Innern des Intervalles zum mindesten eine Stelle x, für welche der mittlere Differentialquotient gleich K wird, falls

$$\lim \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

allenthalben gleich 0 wird.

Beweis. Nach dem vorigen Paragraphen giebt es eine Stelle, für welche der vorwärts gebildete Differentialquotient gleich K wird, und die Bedingung des Satzes besagt, dass der vorwärts gebildete Quotient sich von dem mittleren an keiner Stelle unterscheiden kann.

Lehrsatz 5. Wird für eine stetige Function der mittlere Differentialquotient allenthalben in einem Intervalle gleich 0, so ist die Function in diesem Intervalle eine constante.

Beweis wie im vorigen Paragraphen.

Lehrsatz 6. Ist für eine stetige Function der vorwärts- oder der rückwärts gebildete, oder mittlere Differentialquotient eine stetige Function von x, so sind für jede Stelle des Intervalles die Werthe der drei Quotienten einander gleich.

Beweis. Setzt man

$$\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f_1(x), \quad \lim \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x} = f_2(x),$$

und

$$\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = f_m(x),$$

so ist

$$f_m(x) = \frac{1}{2}\big(f_1(x)+f_2(x)\big).$$

Nach Lehrsatz 5 des § 2 giebt es im Intervalle von x bis $x+\Delta x$ Stellen, an denen $f_1(x)$ gleich oder grösser wird als $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, und Stellen an denen $f_1(x)$ gleich oder kleiner wird als dieser Quotient. Wenn nun $f_1(x)$ stetig ist, so giebt es jedenfalls im Innern eine Stelle $x+\Theta\Delta x$, für welche genau die Gleichung besteht:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f_1(x+\Theta\Delta x), \quad (0<\Theta<1).$$

Dabei mag Δx positiv oder negativ sein. Setzt man Δx gleich einer negativen Grösse $-h$, so ist

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f_1(x-\Theta h)$$

und folglich

$$\lim_{h=0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f_2(x) = f_1(x).$$

Ist $f_m(x)$ stetig, so folgt ebenso aus dem Lehrsatz 3 dieses Paragraphen, dass

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = f_m(x \pm \Theta\Delta x), \quad (0<\Theta<1),$$

oder wenn man $x-\Delta x = \xi$ setzt:

$$\frac{f(\xi+2\Delta x)-f(\xi)}{2\Delta x} = f_m(\xi+2\Theta\Delta x).$$

Diese Gleichung gilt, mag Δx beliebig klein sein, auch wenn man unter ξ einen festen Werth versteht. Lässt man Δx nach 0 convergiren, so folgt:

$$f_1(\xi) = f_m(\xi).$$

Bemerkung. Die Bedingung, dass $f_1(x)$ stetig ist, kann man auch so ausdrücken: Es muss für jeden Werth von x $\lim \frac{\Delta^+ f}{\Delta x}$ überhaupt einen bestimmten Grenzwerth haben, und es muss

$$\frac{f(x\pm h+\Delta x)-f(x\pm h)-f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x}$$

durch Wahl von h dem Betrage nach kleiner gemacht werden können als eine beliebige Zahl δ unabhängig von Δx. Diese Bedingung enthält die andere, es muss

$$\lim \frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

werden.

Der obige Satz bleibt auch bestehen, wenn die Differentialquotienten in dem Intervalle in bestimmter Weise unendlich werden, doch nur so, dass dabei keine sprungweise Werthänderung von einem positiven zu einem negativen Werthe eintritt.

Bemerkung. Definirt man den Differentialquotienten allgemein als Grenzwerth von

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x+\Delta' x)}{\Delta x-\Delta' x}$$

indem man $\Delta x > 0$, $\Delta' x < 0$ annimmt, und alsdann beide in irgend welcher Weise stetig nach 0 convergiren lässt, so bleiben alle Sätze bestehen, denn es gilt auch dann noch der Lehrsatz 1.

§ 4.

Der zweite vorwärts oder rückwärts gebildete Differenzenquotient.

Definition. Der zweite vorwärts gebildete Differenzenquotient ist definirt durch die Gleichung:

$$\frac{\Delta_+^2 f}{\Delta x^2} = \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2}$$

für $\Delta x > 0$; der rückwärts gebildete für $\Delta x < 0$; der Grenzwerth für $\Delta x = 0$ heisst der zweite Differentialquotient.

Eine Function, für welche der zweite vorwärts genommene Differenzenquotient überall in einem Intervalle endlich ist, braucht weder selbst stetig zu sein, noch einen stetigen ersten Differentialquotienten zu besitzen, wie das Beispiel der gebrochenen Geraden lehrt.

Vor- und rückwärts gebildeter Differenzenquotient können keine von einander verschiedenen bestimmten Grenzwerthe annehmen, wenn

$$\lim \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2} = \lim \frac{f(x-2\Delta x)-2f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2}$$

oder

$$\lim \frac{f(x+2\Delta x)-f(x-2\Delta x)-2\{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)\}}{\Delta x^2} = 0$$

wird; aber auch diese letztere Gleichung kann erfüllt sein, ohne dass die Function stetig ist, und ohne dass ein bestimmter Werth des zweiten Differentialquotienten überhaupt vorhanden ist.

Die Werthe des zweiten Differentialquotienten lassen sich unter gewissen Bedingungen aus denen des ersten bilden, denn es besteht der

Lehrsatz 1. Hat die stetige Function $f(x)$ die stetige erste Ableitung $f'(x)$, so ist

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2} = \lim_{h=0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

jedesmal dann, wenn die rechte Seite überhaupt einen bestimmten Grenzwerth besitzt.

Beweis. Es ist nach dem früheren, da $f'(x)$ stetig sein soll, wenn man bei einem bestimmten Werthe von Δx $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ mit $\varphi(x)$ bezeichnet:

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} = \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x+\Theta\Delta x) = \frac{f'(x+\Delta x+\Theta\Delta x)-f'(x+\Theta\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f'(x+\Delta x+\Theta\Delta x)-f'(x)}{\Delta x(1+\Theta)}(1+\Theta) - \frac{f'(x+\Theta\Delta x)-f'(x)}{\Theta\Delta x}\cdot\Theta.$$

Hat nun $\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ einen bestimmten Grenzwerth, so erkennt man aus dieser Gleichung, dass $\lim \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ denselben Werth hat.

Die Function $x^3 \sin\frac{1}{x}$ hat an der Nullstelle für $\lim \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ den bestimmten Werth 0; $f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$ ist stetig; aber $\lim \frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}$ hat keinen bestimmten Werth; man kann also nicht umgekehrt in der obigen Gleichung aus der linken Seite auf die rechte schliessen.

Eine Function kann an einer Stelle ein Maximum haben, und der zweite Differenzenquotient kann daselbst alternirend, sowohl positiv wie negativ sein, die Existenz eines Maximums erfordert nicht, woran man bei regulären Functionen gewöhnt ist, dass $\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ schliesslich nur negativ (einschliesslich der 0) wird. Dies lehrt das Beispiel

$$f(x) = 1 - x^2\left(a - \sin\frac{1}{x}\right)$$

wobei $a > 1$ aber < 2 ist. In der beiderseitigen Umgebung der Nullstelle ist die Function positiv und kleiner als 1; an der Stelle 0 hat sie den Werth 1; und diese Stelle gehört also zu einem Maximum.

$$f(\Delta x) - f(0) = -\Delta x^2\left(a - \sin\frac{1}{\Delta x}\right) < 0,$$

$$f(-\Delta x) - f(0) = -\Delta x^2\left(a + \sin\frac{1}{\Delta x}\right) < 0,$$

$$f(2\Delta x) - f(0) = -4\Delta x^2\left(a - \sin\frac{1}{2\Delta x}\right) < 0.$$

Es wird hier auch $\lim \frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x} = 0$; die Function bildet also nicht etwa an der Maximalstelle eine Ecke. Ferner ist

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} = -4\left(a - \sin\frac{1}{2\Delta x}\right) + 2\left(a - \sin\frac{1}{\Delta x}\right)$$

$$= -4\left(\frac{a}{2} - \sin\frac{1}{2\Delta x}\left(1 - \cos\frac{1}{2\Delta x}\right)\right).$$

Da $\frac{a}{2}$ kleiner ist als 1, so erhält dieser Ausdruck für $\frac{1}{2\Delta x} = k\pi$ einen negativen, für $\frac{1}{2\Delta x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ einen positiven Werth; das Vorzeichen alternirt also.

Die Möglichkeit, dass an einer Maximalstelle der zweite Differenzenquotient nur positiv ist, wird durch den folgenden Lehrsatz beschränkt:

Lehrsatz 2. Wird in einem Intervalle der zweite Differenzenquotient allenthalben schliesslich nur positiv, so kann die Function im Innern dieses Intervalles kein Maximum haben, vorausgesetzt, dass sie stetig ist, und dass

$$\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

allenthalben gleich 0 wird.

Bemerkung. Diese zweite Bedingung ist wesentlich. Für einen aufwärts gerichteten Spitzbogen z. B. mit convexer Krümmung nach unten, wird $\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ allenthalben positiv, und doch ist ein Maximum vorhanden. Man könnte nach Lehrsatz 7 des vorigen Paragraphen die letzte Bedingung durch die einschränkendere ersetzen, dass die Function einen stetigen ersten Differentialquotienten besitzt.

Beweis. Wenn an einer Stelle x im Innern des Intervalles ein Maximum vorhanden ist, so wird für diese Stelle $f(x+\Delta x) - f(x) \leq 0$ und $f(x-\Delta x) - f(x) \leqq 0$. Mithin muss, da

$$\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

mit verschwindendem Werthe von Δx gleich 0 wird, sowohl

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ als auch } \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

einzeln die 0 zur Grenze haben. Man kann demnach für diese Stelle $f(x+\Delta x) - f(x) = -\delta \Delta x$ setzen, wobei δ eine positive, mit Δx nach 0 convergirende Grösse bezeichnet. Wenn nun

$$\Delta^2 f = [f(x+2\Delta x) - f(x)] - 2[f(x+\Delta x) - f(x)]$$

schliesslich durch Wahl von Δx positiv wird, so folgt, wenn man

$$f(x+2\Delta x) - f(x) = -\delta \cdot 2\Delta x,$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = -\delta_1 \cdot \Delta x$$

setzt, dass $\delta_1 - \delta > 0$, also $\delta_1 > \delta$ sein müsste. Mithin bilden in der Reihe

$$f(x+2\Delta x)-f(x)=-2\delta\Delta x,$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=-\delta_1\Delta x,$$
$$f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-f(x)=-\delta_2\frac{\Delta x}{2},$$
$$f\left(x+\frac{\Delta x}{4}\right)-f(x)=-\delta_4\frac{\Delta x}{4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Grössen $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_4, \cdots$ eine Reihe von positiven wachsenden Grössen; es würde dann aber

$$\frac{f\left(x+\frac{\Delta x}{n}\right)-f(x)}{\frac{\Delta x}{n}}=-\delta_n$$

mit wachsenden Werthen von n nicht nach 0 convergiren, was zu einem Widerspruche führt. Ebenso beweist man, dass für eine Minimalstelle im Innern des Intervalles unter denselben Bedingungen $\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ nicht durchaus negativ sein kann.

Folgerung. Functionen mit unendlich vielen Oscillationen in der Umgebung jeder Stelle können unter derselben Bedingung kein Intervall besitzen, in welchem der zweite Differenzenquotient überall nur positiv, oder überall nur negativ ist, denn ihre Maxima und Minima liegen überall dicht.

Lehrsatz 3. Ist für eine stetige Function der Differenzenquotient $\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ bei endlichem Werthe von Δx, oder wenn man $x=a$, $x+2\Delta x=b$ setzt, der Quotient

$$\frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

positiv, und $\lim \frac{\Delta^+ f+\Delta^- f}{\Delta x}$ allenthalben im Intervalle von a bis b gleich 0, so muss es im Intervalle $2\Delta x$ oder $b-a$ Stellen geben, an denen der zweite Differenzenquotient schliesslich auch positiv wird.

Beweis. Bildet man die Function

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{b-a}\{f(b)-f(a)\},$$

so ist $\varphi(a)=0$ und $\varphi(b)=0$, ferner:

$$\frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=-2\frac{\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}>0.$$

Da nun $\varphi(x)$ an den Endpunkten des Intervalles 0, in der Mitte aber

negativ wird, so besitzt diese Function im Innern des Intervalles ein Minimum, und es giebt demnach jedenfalls eine Stelle, an welcher

$$\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$$

bei beliebig kleinen Werthen von Δx auch positiv wird.

Unter derselben Bedingung können auch solche Stellen niemals isolirt sein: d. h. ist das Vorzeichen des Quotienten nur positiv (resp. nur negativ), so liegen in unmittelbarer Umgebung der Stelle Punkte, an denen der Quotient zum mindesten auch positiv, (resp. negativ) wird; und ist das Vorzeichen an einer Stelle alternirend, so müssen in unmittelbarer Umgebung dieser Stelle Punkte gelegen sein, an denen der Quotient auch positiv, und Punkte, an denen er auch negativ wird. Denn es folgt unmittelbar

Lehrsatz 4. Das Vorzeichen des zweiten Differenzenquotienten an einer Stelle kann nicht verschieden sein von dem Vorzeichen des Quotienten an sämmtlichen Punkten in der Umgebung dieser Stelle, vorausgesetzt, dass die Bedingung

$$\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} = 0$$

allenthalben erfüllt ist.

Beweis. Ist für eine Stelle x $\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ schliesslich auch positiv, so liegen auch nach dem vorigen Satze im Intervalle von x bis $x + 2\Delta x$ Stellen, an denen der Differenzenquotient zum mindesten nicht durchaus negativ sein kann; u. s. w.

Punkte mit bestimmtem Vorzeichen des zweiten Differenzenquotienten bilden zusammen mit den Punkten, an denen das Vorzeichen alternirt, Punktsysteme ohne Isolationen.

Lehrsatz 5. Ist für die stetige Function $f(x)$ der zweite Differenzenquotient $\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ bei einem bestimmten endlichen Werthe von Δx gleich K, und ist lim $\frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x}$ allenthalben gleich 0, so muss es im Intervalle von x bis $x + 2\Delta x$ Stellen geben, an denen der zweite Differenzenquotient schliesslich auch gleich oder grösser als K wird, und Stellen an denen er schliesslich auch gleich oder kleiner als K wird.

Beweis. Man bilde

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\{f(b) - f(a)\} + \frac{1}{2}K(x-a)(b-x),$$

so ist $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$, ferner:

$$\frac{\varphi(b) - 2\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} - K = 0.$$

Also ist auch $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Die Function $\varphi(x)$ ist nun entweder constant gleich 0, alsdann ist durchweg $\lim \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} = K$, oder sie muss, da sie in der Mitte des Intervalles ebenso wie an den Endpunkten 0 wird, im Innern des Intervalles sowohl einen Maximalwerth als auch einen Minimalwerth annehmen. Einer dieser Werthe kann auch mit dem Werthe 0 zusammenfallen. An der Maximalstelle, sie heisse x_1, lässt sich Δx so fixiren, dass

$$\frac{\varphi(x_1 + 2\Delta x) - 2\varphi(x_1 + \Delta x) + \varphi(x_1)}{\Delta x^2}$$

negativ wird, und es liegen alsdann im Intervalle x_1 bis $x_1 + 2\Delta x$ jedenfalls Stellen, die nicht isolirt sind, an denen

$$\lim \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta x^2} = \lim \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} - K$$

auch negative Werthe annimmt, an denen also $\lim \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ auch kleiner wird als K. In der Umgebung einer Minimalstelle dagegen wird $\lim \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ auch grösser als K.

Lehrsatz 6. Ist für die stetige Function $f(x)$ der zweite Differenzenquotient bei einem bestimmten endlichen Werthe von Δx gleich K, so muss es auch im Intervalle von x bis $x + 2\Delta x$ eine Stelle geben, an welcher der zweite Differentialquotient schliesslich gleich K wird, vorausgesetzt, dass

$$\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} = 0$$

und $\lim \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}$ eine im gegebenen Intervalle bei allen Werthen von x stetige Function definirt.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus dem vorigen Lehrsatze. Die Voraussetzungen sind hier weniger allgemein als die des analogen Lehrsatzes 6 im § 2. Ich habe indessen den Satz nicht unter erheblich allgemeineren Annahmen, etwa bloss der, dass vor- und rückwärts gebildeter Differentialquotient die Bedingung erfüllen

$$\lim \frac{\Delta_+^2 f - \Delta_-^2 f}{\Delta x^2} = 0,$$

zu beweisen vermocht.

Lehrsatz 7. Wird für eine stetige Function der vorwärts gebildete zweite Differentialquotient in einem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ allenthalben gleich 0, während $\frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x}$ überall nach 0 convergirt, so ist $f(x)$ eine lineare Function.

Bemerkung. Wollte man die zweite Bedingung fallen lassen, so würde auch ein aus beliebig, ja unendlich vielen Strecken zusammengesetztes Polygon der ersten Bedingung genügen.

Beweis. Setzt man

$$\varphi(x) = \pm\left[f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\{f(b) - f(a)\}\right] - \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x),$$

so ist $\varphi(x)$ eine stetige Function, die an den Endpunkten des Intervalles verschwindet, und für welche

$$\frac{\Delta^+\varphi + \Delta^-\varphi}{\Delta x} = \pm\frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} + \delta\Delta x$$

schliesslich 0, und

$$\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x^2} = \pm\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} + \delta$$

schliesslich überall positiv ist. Die Function besitzt demnach im Innern des Intervalles kein Maximum, und sonach kann $\varphi(x)$ im Innern des Intervalles nicht positiv werden. Es ist also:

$$\pm\left[f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\{f(b) - f(a)\}\right] < \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x) < \frac{\delta}{2}(b-a)^2,$$

d. h. weil δ beliebig klein ist, so ist

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\{f(b) - f(a)\}.$$

§ 5.

Der zweite mittlere Differenzenquotient.

Definitionen. Der allgemeine zweite Differenzenquotient ist

$$\frac{f(x + \Delta x + \Delta' x) - f(x + \Delta' x) - f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x \Delta' x}$$

und der Grenzwerth, welcher sich ergiebt, wenn man Δx und $\Delta' x$ in irgend welcher Weise stetig nach 0 convergiren lässt, so dass ihr Verhältniss einen bestimmten positiven oder negativen Grenzwerth annimmt, heisst der allgemeine zweite Differentialquotient. Eine noch allgemeinere Form des Differentialquotienten an der Stelle x erhält man, wenn man den obigen Quotienten für die Stelle $x + \varepsilon$ bildet, und nun ε gleichzeitig mit Δx und $\Delta' x$ nach 0 convergiren lässt.

Setzt man $\Delta' x = -\Delta x$, so ergiebt sich der *mittlere* Differenzenquotient:

$$\frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} = \frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2},$$

für welchen im folgenden die Sätze formulirt werden sollen.

Bemerkung. Eine Function, für welche der mittlere Differentialquotient allenthalben endlich wird, kann noch eine unstetige Function sein. Vorwärts gebildeter und mittlerer Differenzenquotient haben an einer Stelle x nicht von einander verschiedene Grenzwerthe, falls

$$\lim \frac{f(x + 2\Delta x) - 3f(x + \Delta x) + 3f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} = 0.$$

Lehrsatz 1. Hat die Function $f(x)$ die stetige erste Ableitung $f'(x)$, so ist

$$\lim \frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2} = \lim \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

jedesmal dann, wenn die rechte Seite überhaupt einen bestimmten endlichen Grenzwerth besitzt, und wenn derselbe auch gleich ist:

$$\lim \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h}.$$

Beweis. Man setze

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \varphi(x), \qquad \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} = \varphi(x-\Delta x),$$

so ist

$$\frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x} = \varphi'(x - \Theta\Delta x) = \frac{f'(x+\Delta x-\Theta\Delta x) - f'(x-\Theta\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f'(x+\Delta x(1-\Theta)) - f'(x)}{\Delta x(1-\Theta)}(1-\Theta) + \frac{f'(x) - f'(x-\Theta\Delta x)}{\Theta\Delta x}\Theta,$$

woraus die Behauptung hervorgeht.

$f(x) = x^3 \cos\frac{1}{x}$ hat an der 0 Stelle für $\lim \frac{\Delta_m^2 f(x)}{\Delta x^2}$ den bestimmten Werth 0. $f'(x) = 3x^2 \cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}$ ist stetig; $\lim_{h=0} \frac{f'(h+0) - f'(0)}{h}$ hat keinen bestimmten Werth. Definirt man $f(x) = +x^2$ für alle positiven Werthe von x, gleich $-x^2$ für alle negativen, so ist an der Nullstelle $\frac{\Delta_m^2 f(x)}{\Delta x^2} = 0$, während $f'(x) = 2x$ für positive, gleich $-2x$ für negative Werthe, zwar eine stetige Function ist, aber die Ableitungen $+2$ und -2 vor- und rückwärts gebildet besitzt.

Lehrsatz 2. Wird für eine stetige Function der zweite mittlere Differenzenquotient, in einem Intervalle allenthalben schliesslich auch positiv, so kann die Function im Innern des Intervalles kein Maximum haben.

Beweis. Gehört zu einer Stelle x im Innern des Intervalles ein Maximalwerth der Function, so ist

$$f(x+\Delta x) - f(x) \leqq 0, \quad f(x-\Delta x) - f(x) \leqq 0,$$

mithin wird

$$\frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2} \leqq 0,$$

also nicht mehr positiv an dieser Stelle.

Anmerkung. Es ist im Unterschiede von Lehrsatz 2 des vorigen Paragraphen zu bemerken, erstlich, dass es genügt anzunehmen, dass der mittlere Quotient allenthalben schliesslich *auch* positiv wird; ferner

dass hier die Bedingung $\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} = 0$ nicht nothwendig ist. Ein aufwärts gerichteter Spitzbogen z. B. mit convexer Krümmung nach unten besitzt ein Maximum, weil der mittlere Quotient gebildet, für die Spitze negativ wird, und zwar negativ einzig und allein für diesen Punkt.

Stetige Functionen mit unendlich vielen Oscillationen in der Umgebung jeder Stelle haben überall dichte Punkte, an denen der zweite mittlere Differenzenquotient positiv, und Punkte, an denen er negativ wird.

Lehrsatz 3. Ist für eine stetige Function der Differenzenquotient, $\frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2}$ bei endlichem besimmten Werthe von Δx, oder wenn man $x - \Delta x = a$, $x + \Delta x = b$ setzt, der Quotient

$$\frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

positiv, so muss es auch im Intervalle $b - a = 2\Delta x$ Stellen geben, an denen der zweite mittlere Differenzenquotient schliesslich nur positiv wird.

Beweis wie im vorigen Paragraphen.

Die Stelle, an welcher das Vorzeichen positiv wird, kann aber hierbei noch eine isolirte sein, wie z. B. bei einem Spitzbogen, dessen Spitze in der Mitte des Intervalles unterhalb der Abscissenaxe liegt, und dessen Krümmung concav nach unten verläuft. Dagegen besteht der

Lehrsatz 4. Es können die Stellen, an denen der mittlere zweite Differenzenquotient schliesslich ein bestimmtes Vorzeichen hat, nicht mehr isolirt sein, sobald die Bedingung $\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} = 0$ allenthalben erfüllt ist.

Beweis. Ist $\frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2}$ von einem endlichen Werthe von Δx ab schliesslich nur positiv, so besitzt die Function

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\{f(b) - f(a)\},$$

wenn wiederum $x - \Delta x = a$ und $x + \Delta x = b$ gesetzt wird, im Intervalle von a bis b an einer Stelle x sicherlich ein Minimum, so dass hier

$$\frac{\Delta_m^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta_m^2 f(x)}{\Delta x^2}$$

positiv wird. Es ist dann aber nach Lehrsatz 2 des § 4 für

dieses Minimum auch ein beliebig kleiner Werth von Δx angebbar, so dass

$$\frac{\varphi(x+2\Delta x)-2\varphi(x+\Delta x)+\varphi(x)}{\Delta x^2} = \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2}$$

positiv wird; und demnach wird der mittlere Differenzenquotient an der Stelle $x+\Delta x$ positiv. Daraus folgt, dass es im Innern des Intervalles von x bis $x+2\Delta x$ eine Stelle geben muss, an welcher der mittlere Differenzenquotient schliesslich positiv wird; und lässt man Δx beliebig klein werden, so erkennt man, dass es in unmittelbarer Umgebung der Stelle x unendlich viele Punkte geben muss, für welche die gleiche Eigenschaft besteht. Dasselbe gilt auch für die andere Seite der Stelle x. Ist der mittlere Differenzenquotient an einer Stelle x sowohl positiv wie negativ, so liegen in der beiderseitigen unmittelbaren Umgebung dieser Stelle Punkte, an denen der Quotient nur positiv, und Punkte an denen er nur negativ wird.

Lehrsatz 5. Ist für die stetige Function $f(x)$ der zweite Differenzenquotient $\frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2}$ bei einem bestimmten endlichen Werthe von Δx gleich K, so muss es im Intervalle von $x-\Delta x$ bis $x+\Delta x$ Stellen geben, an denen der zweite Differentialquotient schliesslich gleich oder grösser als K wird, und Stellen, an denen er schliesslich gleich oder kleiner als K wird.

Beweis wie im vorigen Paragraphen.

Lehrsatz 6. Ist für die stetige Function $f(x)$ der zweite Differenzenquotient bei einem bestimmten Werthe von Δx gleich K, so muss es auch im Intervalle von $x-\Delta x$ bis $x+\Delta x$ eine Stelle geben, an welcher der zweite mittlere Differentialquotient schliesslich gleich K wird, falls derselbe eine bei allen Werthen von x stetige Function ist.

Lehrsatz 7. Ist für eine stetige Function der zweite mittlere Differentialquotient in einem Intervalle von $x=a$ bis $x=b$ schliesslich allenthalben 0, so ist $f(x)$ eine lineare Function (*Satz von Schwarz*).

Beweis wie im vorigen Paragraphen.

Lehrsatz 8. Ist der zweite vorwärts gebildete Differentialquotient eine stetige Function von x, und ist dabei $\lim \frac{\Delta^+ f+\Delta^- f}{\Delta x}=0$, so sind seine Werthe mit dem rückwärts gebildeten und dem mittleren identisch.

Ist der mittlere Differentialquotient eine stetige Function von x, so sind seine Werthe mit dem vor- und rückwärts gebildeten identisch.

Beweis. Es sei

$$\lim \frac{\Delta_1^2 f}{\Delta x^2}=f_1(x), \quad \lim \frac{\Delta_2^2 f}{\Delta x^2}=f_2(x), \quad \lim \frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2}=f_m(x).$$

Der Quotient $\frac{\Delta_-^2 f}{\Delta x^2}$ als zweiter vorwärts gebildeter Quotient an der Stelle $x - 2\Delta x$ betrachtet, besitzt einen Werth, der nach Lehrsatz 6 des § 4 unter den Werthen enthalten sein muss, die $f_1(x)$ im Intervalle von $x - 2\Delta x$ bis x annimmt. Demnach besteht die Gleichung

$$\frac{\Delta_-^2 f}{\Delta x^2} = f_1(x - 2\Theta\Delta x); \quad (0 < \Theta < 1),$$

Ebenso ist

$$\frac{\Delta_m^2 f}{\Delta x^2} = f_1(x - \Theta\Delta x). \quad (-1 < \Theta < +1).$$

Hieraus folgt:

$$f_2(x) = f_m(x) = f_1(x).$$

Desgleichen bestehen, wenn $f_m(x)$ stetig ist, die Gleichungen:

$$\frac{\Delta_+^2 f}{\Delta x^2} = f_m(x + 2\Theta\Delta x), \qquad \frac{\Delta_-^2 f}{\Delta x^2} = f_m(x - 2\Theta\Delta x)$$

und danach ist

$$f_1(x) = f_2(x) = f_m(x).$$

Die Sätze gelten auch, wenn die Functionen unendlich werden, doch so, dass sie dabei keine sprungweise Aenderung des Zeichens erleiden.

§ 6.

Allgemeine Sätze für den $n$ten Differenzenquotienten.

Das Ziel der bisherigen Untersuchung bestand darin, die Bedingungen anzugeben, unter denen man aus dem Nullwerden eines Differenzenquotienten auf die Beschaffenheit der Function schliessen kann. Ist der erste Differentialquotient (der vorwärts gebildete oder der mittlere) allenthalben in einem Intervalle 0, und die Function stetig, so ist die Function constant. Ist der zweite vorwärts gebildete Differentialquotient allenthalben 0 und die Function stetig, so ist sie eine lineare Function, wenn noch die Bedingung hinzukommt, dass $\lim \frac{\Delta^+ f + \Delta^- f}{\Delta x} = 0$ wird. Ist der mittlere zweite Differentialquotient allenthalben 0 und die Function stetig, so ist sie eine lineare Function.

Es entsteht die Frage: Unter welchen Bedingungen kann man bei einer stetigen Function, deren $n$ter Differentialquotient allenthalben 0 ist, schliessen, dass die Function eine ganze rationale Function von $n-1$ter oder niederer Ordnung sein muss? Die Eigenschaft ist für sich allein sicherlich nicht ausreichend, da man einen $n$ten Differenzenquotienten so definiren kann, dass er für ein aus geradlinigen Strecken

oder allgemeiner aus parabolischen Curven $n-1$ter Ordnung zusammengesetztes Gebilde diese Eigenschaft hat. Bei einer ganzen rationalen Function $n-1$ter Ordnung convergirt der $n$te Differenzenquotient *gleichmässig* nach 0, d. h. es ist, abgesehen von dem Endpunkte, an welchem ein vorwärts gebildeter Differenzenquotient nicht möglich ist, ein und derselbe Werth von Δx ausreichend, so dass $\frac{\Delta^n f}{\Delta x^n} = 0$ wird für alle Werthe von x. Sonach ist die Bedingung der gleichmässigen Convergenz sicherlich eine nothwendige. Umgekehrt soll nun zunächst gezeigt werden, dass sie eine hinreichende ist.

Definitionen. Als $n$ter vorwärts gebildeter Differenzenquotient an der Stelle x werde definirt:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = \frac{f(x+n\Delta x) - n_1 f(x+\overline{n-1}\Delta x) + n_2 f(x+\overline{n-2}\Delta x) + \cdots + (-1)^n f(x)}{\Delta x^n},$$

$$n_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Derselbe convergirt gleichmässig nach 0, wenn für jeden Werth von x $\lim \frac{\Delta^n f}{\Delta x^n}$ für $x = 0$ ebenfalls 0 wird, derart, dass bei allen Werthen von x derselbe Werth von Δx hinreichend ist, um nach Fixirung einer beliebig kleinen Grösse δ die Ungleichung

$$\text{abs}\left[\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right] < \delta$$

zu erfüllen. Dies gilt dann auch von jedem mittleren, oder dem rückwärts gebildeten Quotienten.

Lehrsatz 1. Convergirt für eine stetige Function $f(x)$ $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ für $\Delta x = 0$ gleichmässig nach 0, so ist $f(x)$ eine ganze rationale Function von $n-1$ter oder niederer Ordnung.

Beweis. Es bezeichne a einen beliebigen festen Werth, x eine Variabele, Δx eine willkürliche zunächst feste Grösse. Man bilde die Gleichung:

$$f(a) = f(x) + (a-x)\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{(a-x)(a-x-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} \cdots$$

$$\cdots \frac{(a-x)(a-x-\Delta x)\cdots(a-x-\overline{n-2}\Delta x)}{n-1!}\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}} + \varphi(x).$$

Die Function $\varphi(x)$ heisst der Rest der Entwickelung; sie ist durch diese Gleichung definirt, und ausser von x von den Constanten a und Δx abhängig. Der Kürze wegen werde die Facultät

$$\frac{(a-x)(a-x-\Delta x)\cdots(a-x-\overline{n-1}\Delta x)}{n!} = (a-x)_n$$

gesetzt. Die Function $\varphi(x)$ lässt sich nun auch durch den $n$ten Differenzenquotienten der Function $f(x)$ definiren, indem man die obige Gleichung für den Werth $x + \Delta x$ statt x bildet. Die Facultät $(a - x)_n$ geht über in

$$(a - x - \Delta x)_n = \frac{(a - x - \Delta x)\,(a - x - 2\Delta x) \cdots (a - x - n\Delta x)}{n!}$$

$$= (a - x)_n \frac{a - x - n\Delta x}{a - x},$$

so dass die Gleichung erhalten wird:

$$(a - x - \Delta x)_n = (a - x)_n - (a - x - \Delta x)_{n-1} \cdot \Delta x$$

und durch die Substitution $x + \Delta x$ folgt die Gleichung:

$$f(a) = f(x + \Delta x) + (a - x - \Delta x)_1 \frac{\Delta f(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdots$$

$$\cdots (a - x - \Delta x)_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} f(x + \Delta x)}{\Delta x^{n-1}} + \varphi(x + \Delta x).$$

Ersetzt man in der früheren den Werth $(a - x)_n$ durch $(a - x - \Delta x)_n - (a - x - \Delta x)_{n-1} \cdot \Delta x$, so erhält sie die Form

$$f(a) = f(x) + [(a - x - \Delta x) + \Delta x] \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdots$$

$$\cdots [(a - x - \Delta x)_{n-1} + (a - x - \Delta x)_{n-2} \cdot \Delta x] \frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}} + \varphi(x),$$

so dass durch Subtraction dieser Gleichung und Division mit Δx, weil sich die übrigen Terme gegenseitig aufheben, die Relation erkannt wird:

$$(a - x - \Delta x)_{n-1} \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = 0.$$

Es ist nun $\varphi(a) = 0$ wie aus der ersten Definition hervorgeht; und diese neue Differenzengleichung kann man zur Bestimmung von $\varphi(x)$ folgendermassen verwerthen. Man wähle Δx so, dass es einen aliquoten Theil von $x - a$ bildet, $\Delta x = \frac{x - a}{m}$, m eine ganze Zahl. Bezeichnet man die Differenzen $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ mit $\Delta\varphi(x)$, so ist

$$\varphi(a + \Delta x) - \varphi(a) = \Delta\varphi(a),$$
$$\varphi(a + 2\Delta x) - \varphi(a + \Delta x) = \Delta\varphi(a + \Delta x),$$
$$\varphi(a + 3\Delta x) - \varphi(a + 2\Delta x) = \Delta\varphi(a + 2\Delta x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(a + m\Delta x) - \varphi(a + \overline{m - 1}\Delta x) = \Delta\varphi(a + \overline{m - 1}\Delta x).$$

Durch Summation folgt, weil $\varphi(a) = 0$ ist,

$$\varphi(x) = \Delta\varphi(a) + \Delta\varphi(a + \Delta x) + \cdots + \Delta\varphi(x - \Delta x).$$

Es ist demnach $\varphi(x)$ gleich dem m-fachen eines Mittelwerthes aus den Werthen $\Delta\varphi(a)$, $\Delta\varphi(a+\Delta x)$, $\cdots$, $\Delta\varphi(x-\Delta x)$, und da, wie aus der Stetigkeit der Function $f(x)$ hervorgeht, auch $\varphi(x)$ bei jedem endlichen festen Werthe von Δx stetig ist, so ist dieser mittlere Werth sicherlich enthalten unter den Werthen, die $\Delta\varphi(\xi)$ annimmt, während ξ das Intervall von a bis x durchläuft. Sonach kann man setzen

$$\varphi(x) = m \cdot \Delta\varphi(a+\Theta(x-a)) = \frac{\Delta\varphi(a+\Theta(x-a))}{\Delta x}\cdot(x-a)$$
$$(0<\Theta<1),$$

und sonach besteht, zufolge der oben gefundenen Relation, die Gleichung

$$\varphi(x) = (a-x)\,(-\Theta(x-a)-\Delta x)_{n-1}\,\frac{\Delta^n f(a+\Theta(x-a))}{\Delta x^n}$$

und es ist also:

$$f(a) = f(x) + (a-x)\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \cdots$$
$$\cdots + (a-x)_{n-1}\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}} + (a-x)(\Theta(a-x)-\Delta x)_{n-1}\frac{\Delta^n f(a+\Theta(x-a))}{\Delta x^n}.$$

Diese Gleichung, welche der allgemeine Ausdruck der Taylor'schen Summe ist, mit der von Cauchy dem Restgliede gegebenen Form, und zwar gebildet für endliche Differenzen, findet sich in der Abhandlung von Crelle (Journal, Bd. 22): „Einige Bemerkungen über die Mittel zur Schätzung der Convergenz der allgemeinen Entwicklungs-Reihen mit Differenzen und Differentialen."

Die Grösse Δx kann nun beliebig klein gewählt werden, sie ist nur der Bedingung unterworfen einen aliquoten Theil von $a-x$ zu bilden. Wenn nun die Function $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ gleichmässig nach 0 convergirt, so wird, wenn Δx Null wird, $\frac{\Delta^n f(a+\Theta(x-a))}{\Delta x^n}$, welche Werthe auch die Veränderliche Θ annehmen mag, ebenfalls zu 0, und man erhält die Gleichung:

$$f(a) = f(x) + (a-x)\lim\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{(a-x)^2}{2!}\lim\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}\cdots$$
$$\cdots\frac{(a-x)^{n-1}}{n-1!}\lim\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}},$$

die für alle Werthe von a und x gültig ist, also wenn man a als Variabele, x als constant ansieht, $f(a)$ als ganze rationale Function $n-1$ter Ordnung definirt. Man könnte nur noch die Frage aufwerfen, ob diese Grenzwerthe nicht auch völlig unbestimmt werden können, und ob sie wirklich unabhängig von a sind, da Δx nicht

stetig nach 0 convergirt, sondern aliquote Theile von $a - x$ durchläuft? Da die linke Seite bei allen Werthen von a eine bestimmte, stetig sich ändernde Function sein soll, so ist diese Möglichkeit in der That ausgeschlossen. Denn wenngleich die Summe zweier oder mehrerer Grössen, welche unbestimmt werden, immerhin noch bestimmt sein kann, so ist dieses doch nicht möglich, falls die Grössen mit verschiedenen Variabelen multiplicirt sind. Indessen kann man, um nichts in Zweifel zu lassen, auch folgendermassen verfahren. Es seien $a_1 a_2 \ldots a_n$ beliebige Stellen des für $f(x)$ gegebenen Intervalles, und die Strecken $a_1 a_2, a_1 a_3, \ldots, a_1 a_n$ seien unter einander commensurabel. Bezeichnet dann x eine beliebige Stelle, und ist $a_1 x$ commensurabel mit $a_1 a_2$, so erhält man, wenn Δx ein gemeinsames beliebig kleines Maass dieser Strecken bezeichnet, da dann auch die Strecken $a_2 x, a_3 x, \ldots, a_n x$ durch Δx messbar sind, und da die Werthe

$$\frac{\Delta^n f(a_1 + \Theta(x-a_1))}{\Delta x^n}, \quad \frac{\Delta^n f(a_2 + \Theta(x-a_2))}{\Delta x^n} \cdots \frac{\Delta^n f(a_n + \Theta(x-a_n))}{\Delta x^n}$$

durch Wahl von Δx sämmtlich kleiner werden, als eine beliebig kleine Grösse δ, die Gleichungen:

$$f(a_1) \pm (< \delta) = f(x) + (a_1 - x)\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + (a_1 - x)_2 \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} \cdots + (a_1 - x)_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}},$$

$$f(a_2) \pm (< \delta) = f(x) + (a_2 - x)\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + (a_2 - x)_2 \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} \cdots + (a_2 - x)_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(a_n) \pm (< \delta) = f(x) + (a_n - x)\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + (a_n - x)_2 \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} \cdots + (a_n - x)_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}}.$$

Löst man diese Gleichungen nach $f(x)$ auf, so folgt:

$$f(x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & (a_1 - x) & \cdots & (a_1 - x)_{n-1} \\ 1 & (a_2 - x) & \cdots & (a_2 - x)_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & (a_n - x) & \cdots & (a_n - x)_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(a_1) \pm (< \delta) & (a_1 - x) & \cdots & (a_1 - x)_{n-1} \\ f(a_2) \pm (< \delta) & (a_2 - x) & \cdots & (a_2 - x)_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f(a_n) \pm (< \delta) & (a_n - x) & \ldots & (a_n - x)_{n-1} \end{vmatrix}.$$

und convergirt $\Delta(x)$ nach 0, so geht diese Gleichung über in:

$$f(x)\,\Pi(a_i - a_k) = \begin{vmatrix} f(a_1) & (a_1 - x) & \cdots & (a_1 - x)^{n-1} \\ f(a_2) & (a_2 - x) & \cdots & (a_2 - x)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f(a_n) & (a_n - x) & \cdots & (a_n - x)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Sie definirt also $f(x)$ für jeden Werth von x, bei welchem $a_1 x$ mit $a_1 a_2$ commensurabel ist, als ganze rationale Function $n-1$ter Ordnung; da $f(x)$ stetig ist, so ist die Function damit für alle Werthe von x definirt.

Zusatz. Man kann die allgemeine Entwickelungsformel auch so abändern, dass das Restglied die Form erhält, welche Lagrange der Taylor'schen Reihe gegeben hat.

Definirt man die Function $\varphi(x)$ durch die Gleichung:

$$f(x) = f(x) + (a - x)\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + (a - x)_2 \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} \cdots$$

$$\cdots (a - x)_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}} + (a - x)_n \varphi(x),$$

so folgt, wenn man an Stelle von x den Werth $x + \Delta x$ einsetzt, und von der andern Gleichung die ursprüngliche subtrahirt, auf Grund der oben benutzten Relation:

$$(a - x)_n = (a - x - \Delta x)_n + (a - x - \Delta x)_{n-1} \cdot \Delta x$$

für die Function $\varphi(x)$ die Eigenschaft:

$$(a - x - \Delta x)_{n-1} \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} + (a - x - \Delta x)_n \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$- (a - x - \Delta x)_{n-1} \cdot \varphi(x) = 0,$$

die, wenn man den Factor $(a - x - \Delta x)_{n-1}$ beseitigt, übergeht in

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} + \frac{a - x - n\Delta x}{n\Delta x}(\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)) - \varphi(x) = 0,$$

oder:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} + \frac{a - x - n\Delta x}{n\Delta x}\varphi(x + \Delta x) - \frac{a - x}{n\Delta x}\varphi(x) = 0.$$

Es sei nun Δx ein aliquoter Theil von $x - a$ und zwar $x - a = m\Delta x$, (m ganze Zahl); dann bilde man die vorstehende Gleichung für die Werthe: $x = a,\ a + \Delta x,\ \cdots,\ a + \overline{m-1}\Delta x$, so erhält man:

$$\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n} - \varphi(a+\Delta x) = 0,$$

$$\frac{\Delta^n f(a+\Delta x)}{\Delta x^n} - \frac{1+n}{n}\varphi(a+2\Delta x) + \frac{1}{n}\varphi(a+\Delta x) = 0,$$

$$\frac{\Delta^n f(a+2\Delta x)}{\Delta x^n} - \frac{2+n}{n}\varphi(a+3\Delta x) + \frac{2}{n}\varphi(a+2\Delta x) = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\Delta^n f(a+\overline{m-1}\Delta x)}{\Delta x^n} - \frac{m-1+n}{n}\varphi(a+m\Delta x) + \frac{m-1}{n}\varphi(a+\overline{m-1}\Delta x) = 0.$$

Man addire die Gleichungen, nachdem man sie zuvor mit solchen Factoren multiplicirt hat, dass die Grössen $\varphi(a+\Delta x), \cdots, \varphi(a+\overline{m-1}\Delta x)$ sich dabei fortheben, so folgt:

$$\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n} + n\frac{\Delta^n f(a+\Delta x)}{\Delta x^n} + n\frac{(n+1)}{2}\frac{\Delta^n f(a+2\Delta x)}{\Delta x^n} = \cdots$$

$$\cdots + \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{m-1!}\frac{\Delta^n f(a+\overline{m-1}\Delta x)}{\Delta x^n}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{m-1!}\varphi(a+m\Delta x).$$

Hieraus erkennt man: $\varphi(a+m\Delta x) = \varphi(x)$ ist gleich einem Mittelwerthe aus den Grössen $\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n} \ldots \frac{\Delta^n f(a+\overline{m-1}\Delta x)}{\Delta x^n}$, und da $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ eine stetige Function ist, so kann man setzen:

$$\varphi(x) = \frac{\Delta^n f(a+\Theta(x-a))}{\Delta x^n} \qquad (0 \leqq \Theta < 1).$$

Sonach hat man die Gleichung gewonnen:

$$f(a) = f(x) + (a-x)\frac{\Delta f(x)}{\Delta(x)} + (a-x)_2\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} \cdots$$

$$\cdots (a-x)_{n-1}\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}} + (a-x)_n\frac{\Delta^n f(a+\Theta(x-a))}{\Delta x^n}.$$

Dabei ist wie früher:

$$(a-x)_k = \frac{(a-x)(a-x-\Delta x)\ldots(a-x-\overline{k-1}\Delta x)}{k!}$$

und Δx bedeutet einen aliquoten Theil von $a-x$.

Lehrsatz 2. Der Werth des $n$ten Differenzenquotienten, gebildet für einen endlichen Werth des Incrementes h, $\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}$, ist unter den

Werthen enthalten, die $\lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ in dem Intervalle von x bis $x + nh$ annimmt, falls der $n$te Differenzenquotient gleichmässig nach seinem Grenzwerthe convergirt.

Beweis. Für $n = 1$ ist

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{\Delta f(x+\Theta h)}{\Delta x},$$

sobald Δx einen aliquoten Theil von h bezeichnet. Convergirt der Differenzenquotient gleichmässig nach seinem Grenzwerth, so giebt es eine Stelle im Intervalle, an welcher der Grenzwerth des ersten Differenzenquotienten beliebig wenig vom Werthe $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ abweicht. Da der erste Differentialquotient zufolge der gleichmässigen Convergenz nicht unstetig sein kann, so folgt weiter, dass es eine Stelle geben muss, an welcher er genau gleich $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist. Uebrigens ist der Satz unter allgemeineren Bedingungen schon im § 2 bewiesen. Lehrsatz 6.

Für die höheren Differenzenquotienten kann man demnach den Schluss von $n-1$ auf n anwenden.

Es sei für den $n-1$ten Differenzenquotienten die Gleichung bewiesen:

$$\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{h^{n-1}} = \frac{\Delta^{n-1} f(x + \Theta(n-1)h)}{\Delta x^{n-1}}$$

wobei Δx beliebig klein ist, und lediglich der Bedingung zu genügen hat, einen aliquoten Theil von h zu bilden, so soll bewiesen werden, dass auch

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = \frac{\Delta^n f(x+\Theta n h)}{\Delta x^n}$$

ist. Nun ist

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = \frac{\Delta^{n-1} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h^{n-1}},$$

also, wenn man den Quotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ mit $\varphi(x)$ bezeichnet:

$$\frac{\Delta^{n-1} \varphi(x)}{h^{n-1}} = \frac{\Delta^{n-1} \varphi(x + \Theta(n-1)h)}{\Delta x^{n-1}}$$

$$= \frac{\Delta^{n-1} \frac{f(x+h+\Theta(n-1)h) - f(x+\Theta(n-1)h)}{h}}{\Delta x^{n-1}}.$$

Wenn aber Δx einen Theiler von h bildet, so ist auch:

$$\frac{f(x+h+\Theta(n-1)h)-f(x+\Theta(n-1)h)}{h}$$
$$=\frac{\Delta f(x+(n-1)\Theta h+\Theta' h)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x+\Theta n h)}{\Delta x},$$

wobei Θ einen neuen Bruch zwischen 0 und 1 bezeichnet. Mithin ist in der That:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}=\frac{\Delta^n f(x+\Theta n h)}{\Delta x^n}.$$

Wenn nun der Quotient für $\Delta x = 0$ gleichmässig nach seinem Grenzwerthe convergirt, so ist

$$\frac{\Delta^n f(x+\Theta n h)}{\Delta x^n}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^n f(x+\Theta n h)}{\Delta x^n}\pm(<\delta),$$

also ist:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^n f(x+n\Theta h)}{\Delta x^n}\pm(<\delta).$$

Es giebt mithin eine Stelle, an welcher der Grenzwerth des $n$ten Differenzenquotienten um weniger als die beliebig kleine Grösse δ vom Werthe $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ differirt; und da zufolge der gleichmässigen Convergenz der $n$te Differentialquotient nicht unstetig sein kann, so muss es eine Stelle geben, an welcher er gleich $\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}$ ist.

Aus der abgeleiteten Gleichung folgt noch:

Lehrsatz 3. Der Werthevorrath der Function $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ im Intervalle von x bis $x+nh$, d. h. die Gesammtheit der Werthe, welche man erhält, wenn man nach Fixirung einer beliebig kleinen Grösse Δx den Quotienten für alle Werthe von x bildet, und sodann Δx nach 0 convergiren lässt, schliesst immer auch den Werth des Differenzenquotienten $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$, gebildet mit einem festen endlichen Werthe von Δx, in sich ein.

Dagegen brauchen die Werthe $\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$, gebildet für sämmtliche Stellen des Intervalles von x bis $x+n\Delta x$ keineswegs mehr den Werth des $n$ten Differenzenquotienten $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ in sich zu enthalten, sobald, wie dies beim Lehrsatz 3 gedacht ist, die gleichmässige Convergenz nicht mehr besteht.

Die Bedingungen der Sätze 1 und 2 enthalten die gleichmässige Convergenz. Da nun aber der Nachweis gleichmässiger Convergenz in

jedem einzelnen Falle häufig nicht ohne Schwierigkeit gelingt, so ist die Frage nicht überflüssig, ob man dieselbe nicht durch andere Bedingungen zu ersetzen vermag. Die in den ersten Paragraphen ausgeführten Untersuchungen haben darin ihren Werth, dass sie dieser Bedingung nicht bedürfen. Dieselben werden für den $n$ten Differenzenquotienten durch den folgenden allgemeinen Satz generalisirt:

Lehrsatz 4. Hat eine stetige Function $f(x)$ die Eigenschaft, dass der Werthevorrath des Quotienten $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ durchaus endlich bleibt, und dass $\lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = 0$ wird für jeden einzelnen Werth von x, so ist $f(x)$ eine ganze Function von $n-1$ter oder niederer Ordnung.

Beweis. Man kann zunächst beweisen, dass die Function für jeden Werth von x eine bestimmte Ableitung von der Ordnung $n-1$ hat, und dass diese Ableitung stetig ist.

Es sei $\frac{\Delta^{n-1} f(x+\Delta x) - \Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^n}$ kleiner als eine endliche Grösse K bei allen Werthen von x, wie klein auch Δx wird. Wenn nun die Function an der Stelle x keinen bestimmten Werth des $n-1$ten Differentialquotienten besitzt, so heisst dies, es lässt sich nach Fixirung einer beliebig kleinen Grösse Δx, noch immer eine beliebig kleine Grösse $\Delta' x < \Delta x$ bestimmen, so dass die Differenz

$$\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}} - \frac{\Delta'^{n-1} f(x)}{\Delta' x^{n-1}}$$

dem Betrage nach grösser ist als eine endliche Zahl σ, die nicht mit Δx nach 0 convergirt. Der Quotient

$$\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}}$$

ist aber nach dem vorigen Satze gleich $\frac{\Delta'^{n-1} f(\xi)}{\Delta' x^{n-1}}$, wenn ξ einen Werth im Intervalle von x bis $x + \overline{n-1}\Delta x$, und $\Delta' x$ einen aliquoten beliebig kleinen Theil von Δx bezeichnet. Dass man in der That $\Delta' x$ auch als einen aliquoten Theil von Δx bestimmen kann, folgt daraus, dass der Differenzenquotient bei allen endlichen Werthen von Δx eine stetige Function von Δx ist. Es ist also auch

$$\left[\frac{\Delta'^{n-1} f(\xi) - \Delta'^{n-1} f(x)}{\Delta' x^{n-1} \cdot (\xi - x)}\right] > \frac{\sigma}{\xi - x}.$$

Man kann von vornherein Δx so klein wählen, dass $\frac{\sigma}{\xi - x}$ grösser ist als K. Demnach ist

$$\left[\frac{\Delta'^{n-1} f(\xi) - \Delta'^{n-1} f(x)}{\Delta' x^{n-1} (\xi - x)}\right] > K.$$

Wählt man h beliebig klein, so giebt es im Intervalle von x bis ξ auch eine Stelle x_1, für welche

$$\left[\frac{\Delta^{n-1}f(x_1+h)-\Delta' f(x_1)}{\Delta' x^{n-1}h}\right] > K.$$

Denn die Grenzwerthe für $h=0$, gebildet für alle Werthe von x bis ξ, müssen die Werthe der Differenzenquotienten in sich enthalten. Hat man h so fixirt, dass es einen aliquoten Theil von $\Delta' x$ bildet, so wird nach dem vorigen Satze im Intervalle von x_1 bis $x_1+\overline{n-1}\,\Delta' x$ auch eine Stelle x_2 ausfindig gemacht werden können, für welche

$$\frac{\Delta^{n-1}f(x_2+h)-\Delta^{n-1}f(x_2)}{h^n} > K.$$

Dies widerstreitet aber der Voraussetzung; d. h. es existirt an jeder Stelle eine $n-1$te Ableitung der Function. Diese Ableitung ist stetig. Denn aus den Gleichungen

$$\frac{\Delta^{n-1}f(x+\Delta x)-\Delta^{n-1}f(x)}{\Delta x^{n-1}} < K\Delta x,$$

$$\frac{\Delta^{n-1}f(x+2\Delta x)-\Delta^{n-1}f(x+\Delta x)}{\Delta x^{n-1}} < K\Delta x,$$

. . . . . .

gebildet bis zu dem Werthe $x+n\Delta x = x_1$, folgt durch Summation:

$$\frac{\Delta^{n-1}f(x_1)}{\Delta x^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1}f(x)}{\Delta x^{n-1}} < K(x_1-x).$$

Hier bedeutet Δx einen aliquoten Theil von x_1-x. Lässt man aber Δx nach 0 convergiren, so können x und x_1 zwei beliebige Stellen bezeichnen, und es ist, wenn $f^{n-1}(x)$ den $n-1$ten Differentialquotienten darstellt,

$$f^{n-1}(x_1) - f^{n-1}(x) < K(x_1-x),$$

woraus die Stetigkeit hervorgeht. Ferner kann man beweisen, dass der $n-1$te Differenzenquotient gleichmässig nach seinem Grenzwerthe convergirt. Denn wenn es bei noch so kleinem Werthe von Δx Stellen giebt, an welchen für $\Delta' x < \Delta x$ die Differenz

$$\frac{\Delta^{n-1}f(x)}{\Delta x^{n-1}} - \frac{\Delta'^{n-1}f(x)}{\Delta' x^{n-1}}$$

gleich oder grösser ist als eine endliche Zahl σ, die nicht mit Δx

nach 0 convergirt, so könnte auch, wie eben gezeigt wurde, $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ nicht durchaus endlich sein.

Aus der gleichmässigen Convergenz des $n-1$ten Differenzenquotienten und der Bedingung, dass $\lim \frac{\Delta^n f}{\Delta x^n}$ allenthalben 0 ist, kann man schliessen, dass der $n-1$te Differentialquotient durchaus constant ist. Denn es ist nach dem vorigen Satze:

$$\frac{\Delta^{n-1} f(x+\Delta x) - \Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^n}$$

$$= \frac{\Delta'^{n-1} f(x+\Delta x+\Theta(n-1)\Delta x) - \Delta'^{n-1} f(x+\Theta(n-1)\Delta x)}{\Delta' x^{n-1} \cdot \Delta x},$$

wenn $\Delta' x$ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet, die einen aliquoten Theil von Δx bildet. Lässt man dieselbe nach 0 convergiren, so erkennt man, dass es auch eine Stelle $x+\varepsilon$ im Intervalle von x bis $x+(n-1)\Delta x$ giebt, an welcher

$$\frac{f^{n-1}(x+\varepsilon+\Delta x) - f^{n-1}(x+\varepsilon)}{\Delta x} = \frac{\Delta^{n-1} f(x+\Delta x) - \Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^n}.$$

Lässt man Δx stetig nach 0 convergiren, so convergirt auch ε nach 0. Auf Grund des Lehrsatzes 10 im § 2 kann man hieraus schliessen, dass, da bei jedem Werthe von x

$$\lim_{\Delta x=0 \; \varepsilon=0} \frac{f^{n-1}(x+\varepsilon+\Delta x) - f^{n-1}(x+\varepsilon)}{\Delta x} = 0$$

und da, wie vorhin bewiesen wurde, überall

$$\frac{f^{n-1}(x_1) - f^{n-1}(x)}{x_1 - x} = K$$

wird, $f^{n-1}(x)$ eine Constante ist. Bezeichnet man mit C den Werth dieser Constante, so ist

$$f(x) - \frac{C}{n-1!} x^{n-1} = \varphi(x)$$

eine stetige Function, deren $n-1$ter Differenzenquotient *gleichmässig* nach 0 convergirt. Also ist $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function von $n-2$ter oder niederer Ordnung, und also $f(x)$ von der Ordnung $n-1$.

Auf Grund des Lehrsatzes 13 im § 2 erkennt man, dass auch hier der Satz besteht:

Lehrsatz 5. Der Werth des $n$ten Differenzenquotienten $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$, gebildet bei endlichem Werthe von Δx ist, falls der Werthevorrath dieses Quotienten im Intervalle von x bis $x+n\Delta x$ durchaus endlich

bleibt, unter den Werthen enthalten, die $\lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ im Intervalle von x bis $x + n\Delta x$ annimmt.

Denn es ist:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = \frac{f^{n-1}(x + (n-1)\Theta\Delta x + \Delta x) - f^{n-1}(x + (-1)\Theta\Delta x)}{\Delta x}$$

und der Quotient auf der rechten Seite ist unter den Werthen enthalten, die

$$\lim \frac{f^{n-1}(x + \Delta x + (n-1)\Theta\Delta x) - f^{n-1}(x + (n-1)\Theta\Delta x)}{\Delta x}$$

im Intervalle von $x + (n-1)\Theta\Delta x$ bis $x + (n-1)\Theta\Delta x + \Delta x$ annimmt.

Lehrsatz 6. Hat eine stetige Function $f(x)$ die durch successive Differentiation nach einander gebildeten Ableitungen: $f'(x), f''(x) \cdots f^{n-1}(x)$, und sind diese Functionen ebenfalls stetig, so ist auch

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = \lim_{h=0} \frac{f^{n-1}(x+h) - f^{n-1}(x)}{h}$$

überall, wo die rechte Seite überhaupt einen bestimmten Grenzwerth besitzt.

Beweis. Man kann zeigen, dass der Satz, wenn er für $n-1$ gültig ist, auch für n gilt; für den zweiten Differenzenquotienten wurde er bereits direct bewiesen (§ 4, Satz 1).

Ist die Gleichung richtig:

$$\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}} = \frac{f^{n-2}(x + (n-2)\Theta\Delta x + \Delta x) - f^{n-2}(x + (n-2)\Theta\Delta x)}{\Delta x},$$

unter der Voraussetzung, dass $f^{n-2}(x)$, sowie alle vorangehenden Ableitungen stetig sind, so folgt aus derselben, weil auch $f^{n-1}(x)$ eine durchaus bestimmte und stetige Function sein soll,

$$\frac{\Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^{n-1}} = f^{n-1}(x + (n-1)\Theta\Delta x),$$

also wird

$$\frac{\Delta^{n-1} f(x + \Delta x) - \Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^n}$$

$$= \frac{f^{n-1}(x + (n-1)\Theta\Delta x + \Delta x) - f^{n-1}(x + (n-1)\Theta\Delta x)}{\Delta x},$$

d. h.

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = \frac{f^{n-1}(x + (n-1)\Theta\Delta x + \Delta x) - f^{n-1}(x)}{((n-1)\Theta + 1)\Delta x}$$

$$+ (n-1)\Theta \left\{ \frac{f^{n-1}(x + (n-1)\Theta\Delta x + \Delta x) - f^{n-1}(x)}{((n-1)\Theta + 1)\Delta x} \right.$$

$$\left. - \frac{f^{n-1}(x + (n-1)\Theta\Delta x) - f^{n-1}(x)}{(n-1)\Theta\Delta x} \right\},$$

woraus die Behauptung hervorgeht.

Ich will zum Schlusse noch anführen, dass man die für die ersten beiden Differenzenquotienten hinsichtlich der Existenz von Maxima und Minima geltenden Beziehungen für den $n$ten Differenzenquotienten allgemein so aussprechen kann:

Lehrsatz 7. Convergirt der $n$te Differenzenquotient gleichmässig nach positiven Werthen, d. h. ist ein und dieselbe obere Grenze von Δx ausreichend, so dass bei allen Werthen von x innerhalb eines Intervalles $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ nur positiv ist, so kann die Function im Innern dieses Intervalles nur höchstens $n-2$ mal den Wechsel eines Minimums und eines Maximums erleiden, und zwar muss, wenn diese grösste Anzahl zu Stande kommen soll, bei einem geraden n die Reihe mit einem Minimum, bei einem ungeraden n mit einem Maximum im Innern beginnen.

Beweis. Ist $\frac{\Delta^{n-1} f(x+\Delta x) - \Delta^{n-1} f(x)}{\Delta x^n}$ gleichmässig positiv, so wird für die Function $\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, in welcher h eine beliebig kleine feste Grösse bezeichnet,

$$\lim \frac{\Delta^{n-1} \varphi(x)}{\Delta x^{n-1}}$$

gleichmässig positiv. Denn wäre nach Fixirung eines beliebig kleinen Werthes Δx, der zugleich als aliquoter Theil von h bestimmt werden möge, der Quotient

$$\frac{\Delta^{n-1} \varphi(x)}{\Delta x^{n-1}} = \frac{\Delta^{n-1} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\Delta x^{n-1}}.$$

negativ, so gäbe es auch eine Stelle $x + \Theta h$, zwischen x und $x+h$, für welche der Quotient

$$\frac{\Delta^n f(x + \Theta h)}{\Delta x^n}$$

negativ wäre, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist. Demnach kann man durch Schluss von $n-1$ auf n folgendermassen verfahren.

Aus der Gleichung $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} > 0$ folgt, dass $\lim \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} > 0$, also $\varphi(x)$ eine wachsende Function ist. Mithin kann die Function $f(x)$ kein Maximum haben; denn es liesse sich h so bestimmen, dass vor dem Maximum der Quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ positiv, an der Maximalstelle dagegen negativ wird.

Aus der Gleichung $\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} > 0$ folgt, dass $\lim \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} > 0$, also dass $\varphi(x)$ im Intervalle kein Maximum besitzt. Würde nun bei der

Function $f(x)$ auf ein Minimum ein Maximum folgen, so würde sich h so bestimmen lassen, dass die Function $\varphi(x)$ successive die Vorzeichen minus, plus, minus erhält; sie würde also ein Maximum besitzen.

Aus der Gleichung $\frac{\Delta^4 f(x)}{\Delta x^4} > 0$ folgt, dass $\lim \frac{\Delta^3 \varphi(x)}{\Delta x^3} > 0$, dass also $\varphi(x)$ eine Function ist, die im Intervalle nicht die Folge eines Maximums auf ein Minimum erfahren kann. Würde nun bei der Function $f(x)$ die Reihenfolge Maximum, Minimum, Maximum eintreten, so würde $\varphi(x)$ die Reihenfolge plus, minus, plus, minus erfahren, und würde auf ein Minimum ein Maximum folgen u. s. w.

Auf Grund dieses Satzes kann man zu der Erkenntniss, dass das gleichmässige Verschwinden des $n$ten Differenzenquotienten nur bei einer ganzen rationalen Function von $n-1$ter oder niederer Ordnung eintritt, durch eine Reihe von Schlüssen gelangen, die den beim ersten und zweiten Quotienten angewandten ganz analog sind.

Das Ergebniss der Untersuchungen in diesem Paragraphen lässt sich in dem Satze zusammenfassen: Die Differentialgleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$, gegeben für ein bestimmtes Intervall von x, besitzt als Integral in diesem Intervalle nur eine ganze rationale Function von $n-1$ter Ordnung mit n willkürlichen Constanten, wenn man von dieser Function ausserdem noch verlangt,

entweder, dass sie eine stetige Function ist, für welche die $n-1$ ersten Ableitungen ebenfalls stetig sind, und für welche $\frac{d^n y}{dx^n}$ den Differentialquotienten der $n-1$ten Ableitung bedeutet,

oder, dass der $n$te Differenzenquotient der stetigen Function gleichmässig nach dem Werthe 0 convergirt,

oder, dass der $n$te Differenzenquotient der stetigen Function durchaus endlich bleibt, und überall den Grenzwerth Null hat.

Werden diese Bedingungen nicht hinzugefügt, so giebt es noch unermesslich viele andere stetige und unstetige Lösungen derselben Differentialgleichung, d. h. Functionen, für welche der vorwärts gebildete $n$te Differentialquotient überall den Werth Null hat.

Dresden, im August 1883.

Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige.

Von

Axel Harnack in Dresden.

Kann eine stetige lineare Mannigfaltigkeit auf eine in jedem kleinsten Theile unstetige derart umkehrbar eindeutig bezogen werden, dass zweien Elementen der letzteren a_1, a_2, welche eine Folge bilden $a_1 < a_2$, immer zwei Elemente der stetigen Mannigfaltigkeit a_1', a_2' entsprechen, für welche auch $a_1' < a_2'$ ist? Es scheint mir bemerkenswerth, dass dieser Satz zu bejahen ist, dass er aber zwei wesentlichen Einschränkungen unterliegt, die beim ersten Anblick den Satz aufzuheben scheinen: Die discontinuirliche Mannigfaltigkeit darf keine isolirten Punkte enthalten und sie darf in keinem noch so kleinen Intervalle überall dicht sein, vorausgesetzt, dass sie dort nicht stetig ist. Das erstere ist unmittelbar einleuchtend. Denn sind die beiden Punkte a_1, a_2 isolirt, d. h. enthalten sie kein weiteres Element der Mannigfaltigkeit zwischen sich, so entsprächen ihnen zwei getrennte Punkte a_1', a_2' der stetigen Mannigfaltigkeit, und allen Punkten zwischen a_1' und a_2' könnte kein anderer Punkt mehr zugeordnet werden. Von der Nothwendigkeit der zweiten Forderung überzeugt man sich zunächst auf Grund der allgemeinen Sätze über stetige Functionen. Angenommen es liesse sich eine Function $y = f(x)$ bilden, welche, während x ein stetiges Intervall durchläuft, discontinuirliche Werthe annimmt, die überall dicht in einem Intervalle gelegen sind, (etwa bloss alle rationalen Werthe), und die dabei der Forderung genügen, dass für $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ ist, so müsste diese Function $f(x)$ auch die Eigenschaft haben, dass zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine obere Grenze für h gefunden werden könnte, so dass

$$\text{abs}\,[f(x \pm h) - f(x)] < \delta$$

wird. Die Function $f(x)$ würde also unter die übliche Definition der Stetigkeit fallen, während sie doch nicht, dem aus derselben abgeleiteten Lehrsatze gemäss, sämmtliche Werthe zwischen zwei vorhandenen annimmt.

In der That kann man die zweite Forderung direct beweisen. Es seien die Werthe der Function $f(x)$ in jedem kleinsten Theile eines Intervalles überall dicht, jedoch discontinuirlich. Man fixire einen Werth A innerhalb dieses Intervalles, der von der Function $f(x)$ nicht angenommen wird, und definire eine unendliche Reihe von Werthen der Function

$$f_1 < f_2 \cdots < f_n < \cdots,$$

welche nach A convergirt. Diesen Werthen entsprechen die Punkte $x_1 < x_2 \cdots < x_n < \cdots$ der stetigen Mannigfaltigkeit, die ebenfalls einen Grenzwerth X definiren. Der Stelle X kann nun nicht der Werth A entsprechen, da A von der Function f übersprungen wird. Es kann ihr auch nicht ein Werth kleiner als A entsprechen, da sonst die Aufeinanderfolge der Functionswerthe f und der Argumente x gestört wird. Mithin gehört zu X ein Werth $A + \delta$, und keiner der Werthe zwischen A und $A + \delta$ kann von der Function $f(x)$ angenommen werden, da das zugehörige x weder grösser noch kleiner als X sein kann. Die Function $f(x)$ ist also nicht überall dicht in dem Intervalle.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass man trotz dieser Einschränkungen die Abbildung eines Discontinuums auf ein Continuum mit Wahrung der Aufeinanderfolge entsprechender Elemente ausführen kann. Discontinuirliche Punktmengen, mit denen das möglich ist, sind Mengen ohne Isolationen, die in keinem Intervalle überall dicht sind. Wie man solche Mengen construiren kann, habe ich an einem Beispiele (Annalen, Bd. XIX, pag. 239) gezeigt; ein ähnliches hat Herr Cantor (Bd. XXI, pag. 590) gegeben.

Es giebt bekanntlich stetige Functionen, die in jedem kleinsten Intervalle oscilliren. Die von Herrn Weierstrass gebildete Function (Mittheilung an Herrn du Bois-Reymond, Journal Bd. 79, pag. 29) welche Herr Wiener geometrisch discutirt hat (Bd. 90, pag. 221), gehört zu denselben. Für solche Functionen kann das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ in keinem noch so kleinen Intervalle schliesslich überall positiv, oder schliesslich überall negativ werden; denn die Function würde alsdann in diesem kleinen Intervalle nur wachsen, oder auch nur abnehmen; vielmehr bilden die Stellen, an denen das Vorzeichen von $\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ positiv ist, (einschliesslich von $+0$) sicherlich in jedem Intervalle ein Discon-

tinuum. (Vergleiche den vorhergehenden Aufsatz § 2). An irgend einer Stelle x sei ein endlicher Werth Δx so fixirt, dass

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \eta > 0.$$

Convergirt Δx nach 0, so convergirt auch η stetig nach 0, und zwar, da die Function eine oscillirende ist, derart, dass es bald wächst, bald abnimmt. Man kann Δx so fixiren, dass der Werth η im Innern nicht mehr erreicht wird, und ebenso x derart wählen, dass der Werth 0 im Innern nicht vorkommt. Es geht also η stetig mit Oscillationen in den Werth 0 über. Bedeutet nun ε einen Werth $< \eta$, und $x + \Delta' x$ die Stelle, an welcher zum *erstenmale* $f(x + \Delta' x) - f(x) = \varepsilon$ wird, so ist

$$f(x + \Delta x) - f(x + \Delta' x) = \eta - \varepsilon > 0.$$

Die Stelle $x + \Delta' x$ hat jedenfalls die Eigenschaft, dass der Differenzenquotient daselbst positiv ist; denn convergirt Δx stetig nach $\Delta' x$, so ist diese Differenz, indem sie nach 0 convergirt, nur positiv. Alle Stellen, an denen der Werth ε zum erstenmale erreicht wird, sind, wenn ε alle Werthe von η bis 0 durchläuft, eindeutig bezogen auf das Continuum η bis 0. Aber alle diese Stellen gehören zu denjenigen, an denen der Differenzenquotient positiv wird, und bilden daher sicherlich in keinem noch so kleinen Intervalle ein Continuum. Die Abbildung hat zudem die verlangte Eigenschaft, dass die Aufeinanderfolge entsprechender Elemente in beiden Mannigfaltigkeiten die gleiche ist.

Die charakteristischen Eigenschaften der Weierstrass'schen Function stehen, soweit ich es übersehe, immer in Zusammenhange mit discontinuirlichen Punktmengen ohne Isolationen, die aber auch überall dicht in einem Intervalle gelegen sein können. Will man den Begriff des Unendlichkleinen, seiner Entstehung gemäss, nur bei stetigen Mannigfaltigkeiten beibehalten, so werden durch Punktmengen ohne Isolationen räumliche Trennungen innerhalb des Unbegrenzt- oder Unmessbar-kleinen definirt.*)

Dresden, im August 1883.

*) Der vorstehende Satz über Abbildung eines Discontinuums auf ein Continuum ist aus der Erkenntniss hervorgegangen, dass es stetige, nicht constante Functionen giebt, für welche der erste Differentialquotient an allen Punkten Null ist, mit Ausnahme von solchen, die nur ein discretes System ohne Isolationen bilden, und an denen der Differentialquotient unendlich ist. Wenn solch eine Function, während x von a bis b wächst, das Intervall von $f(a)$ bis $f(b)$ durchaus wachsend (monoton) durchläuft, so sind alle Werthe dieses stetigen Intervalles eindeutig, und zwar in der geforderten Weise, auf ein Discontinuum abgebildet,

sobald man jedem Functionswerthe $f(x)$ das Argument x desjenigen Punktes zuordnet, bei welchem zum ersten Male der Werth $f(x)$ erreicht ist. In dem zweiten Theile meiner Untersuchungen über Differentialquotienten werde ich etwas ausführlicher auf diese Functionen eingehen, da durch dieselben, was mir früher entgangen war, und was durch diese Note vorbereitet werden soll, der Fundamentalsatz der Integralrechnung eine Einschränkung erleidet, wenn man ihn auf den Fall ausdehnen will, dass die zu integrirende Function in allgemeinster Weise Unendlichheitsstellen besitzt. Inzwischen habe ich auch von Herrn G. Cantor brieflich erfahren, dass er auf dieselben bemerkenswerthen Functionen geführt worden ist.

December 1883.

UNIVERSITÄTS
19 APR 84

Ueber die 27 Geraden der cubischen Fläche.

Von

RUDOLF STURM in Münster i./W.

Die interessante Configuration der 27 Geraden der cubischen Fläche scheint noch längst nicht eingehend genug untersucht. *Die Dupel, Tripel, ... von windschiefen Geraden* der Fläche wurden von mir im 2. Kapitel meines Buches über die Flächen 3. Ordnung Nr. 21, 22 betrachtet; ich begnügte mich dort im Ganzen damit, bei jeder dieser Gruppen die Zahl *derjenigen unter den übrigen Geraden der Fläche* zu bestimmen, *welche keine oder* 1, 2, ... *Gerade der Gruppe treffen.* Aber *die durch diese Geraden entstehenden neuen Gruppen* haben selbst merkwürdige Eigenschaften, die ich neuerdings untersucht habe und die mich auch zu *geschlossenen durch Gerade der Fläche gebildeten Figuren: Vierseiten, Fünfseiten, Sechsseiten* geführt haben. Die Vierseite (die sich als Degeneration einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Species auffassen lassen) hatten schon a. a. O. Nr. 23 Erwähnung gefunden; die Fünfseite und Sechsseite hat, wie ich nachträglich bemerkt habe, Herr Affolter gefunden und behandelt*). Jedoch lehnt derselbe an eine bestimmte Erzeugung sich an, während meine Betrachtung eine solche nicht voraussetzt und auch viel eingehender ist; auch meine Bezeichnung, denke ich, ist übersichtlicher.

Eine Mittheilung weiterer Eigenschaften der 27 Geraden dürfte nicht blos an und für sich von Interesse, sondern vielleicht auch für algebraische und analytische Untersuchungen von Nutzen sein. Ich erinnere an den Zusammenhang der 27 Geraden mit der Drei-

*) Grunert-Hoppe's Archiv, Bd. 56, S. 113. — Auch Herr Zeuthen beschäftigt sich in seinem Aufsatze über die Situationseigenschaften der Fläche 3. Ordnung (Math. Ann. Bd. VIII, S. 1) mit auf derselben gelegenen Polygonen; indem er als Seiten nur Segmente der *reellen* Geraden nimmt, bildet er aus diesen Figuren Netze, welche die ganze Fläche bedecken; so dass z. B. die Fläche mit lauter reellen Geraden aus 10 Dreiecken, 30 Fünfecken, 90 Vierecken (die in zwei Arten von je 30 und 60 zerfallen) zusammengesetzt ist.

theilung der hyperelliptischen Functionen von 4 Perioden, welcher 1869 von Herrn Camille Jordan bemerkt wurde*), so wie an den Zusammenhang einer andern geometrischen Configuration, der Kegelschnitte auf der Kummer'schen Fläche, mit den Thetafunctionen.

Die Vierseite, Fünfseite, Sechsseite finden sich in eigenthümlicher Weise insbesondere bezüglich mit den Quadrupeln, Dupeln (oder Quintupeln II), Tripeln von windschiefen Geraden verbunden und gelangen wir deshalb auch zu ihnen am besten, wenn wir von diesen Gruppen ausgehen.

Die blosse Geschlossenheit genügt übrigens noch nicht zur Definition der Vielseite; es muss noch bestimmt festgesetzt werden, dass *nur benachbarte Seiten sich schneiden, nicht benachbarte windschief sind* (windschiefe Vielseite).

Die Eigenschaften der Dupel, Tripel, . . ., so weit ich sie a. a. O. angegeben, setze ich als bekannt voraus, insbesondere auch den Begriff der Doppelsechs. Sei

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6,$$
$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$$

eine solche, so mögen entsprechend die Configurationen, welche von den 6, 8, 10 Geraden gebildet werden, die in 3, 4, 5 dieser Colonnen stehen, eine *Doppeldrei*, *Doppelvier*, *Doppelfünf* genannt werden. Damit freilich verstehe ich nun unter Doppeldrei etwas anderes, als was ich in meinem Buche, aber eben nicht der von Herrn Schläfli geschaffenen Terminologie entsprechend, mit diesem Worte bezeichnet habe. Dort nannte ich Doppeldrei den Inbegriff zweier Tripel, welche zusammen den vollen Schnitt einer Fläche 2. Ordnung bilden; zwei solche Tripel werden wohl besser (sich gegenseitig) *ergänzende Tripel* genannt.

I.

1. Wir betrachten zuerst ein *Quadrupel* (von windschiefen Geraden) und die Figuren, welche es inducirt. *Es seien* g_1, g_2, g_3, g_4 *seine* 4 *Geraden;* wir haben dann 2 *Gerade* l', l'', *welche alle* 4 *treffen;* dann weiter 4 *Gerade* l_1, l_2, l_3, l_4, *die nur je drei von ihnen treffen* (z. B. l_4 die g_1, g_2, g_3) und deshalb gegen einander windschief sind. Beide Quadrupel bilden eine *Doppelvier:*

*) Comptes rendus Bd. 68, S. 865; Traité des substitutions S. 368; vergl. auch dazu Sylvester, Proc. London Math. Soc. Bd. II, S. 155 Anm.; Clebsch, zur Theorie der binären Formen 6. Grades und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen, Abh. der Gött. Ges. der Wiss. Bd. 14 (1868—69); Cremona, sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine, Rendiconti dell' Istituto Lombardo, ser. II, vol. III, (1870).

$$g_1\, g_2\, g_3\, g_4,$$
$$l_1\, l_2\, l_3\, l_4;$$

aus welcher eine einzige Doppelsechs hervorgeht (Fl. 3. O. S. 55). Die Tripel $g_1\, g_2\, g_3$ und $l'\, l''\, l_4$ sind offenbar ergänzende. Sodann giebt es 6 *das gegebene Quadrupel zweimal treffende Geraden*, die Schnittlinien m_{ik} der Ebenen $g_i\, l_k$ und $g_k\, l_i$; sie treffen auch das „Gegenquadrupel" der l_i zweimal. Sodann geben die 8 Ebenen $g_i\, l'$, $g_i\, l''$ in ihren dritten Geraden n_i', n_i'' *die 8 das Quadrupel der g_i einmal treffenden Geraden;* betrachten wir das Dreieck $g_2\, l_1\, m_{12}$, so trifft die n_1' (oder n_1'') von ihm weder die g_2, noch die m_{12}, da $n_1'\, l'$ und $m_{12}\, l_2$ zwei verschiedene an g_1 hängende Paare sind, also die l_1; demnach sind die n_i', n_i'' auch die einmal treffenden Geraden für das Quadrupel der l_i. Endlich haben wir noch 3 *Gerade, welche gegen alle g_i windschief sind; zwei von ihnen, g', g'', sind gegen einander windschief und schneiden die dritte t. Nennen wir l', l'', bez. g', g'' das Dupel der Schneidenden, bez. der Windschiefen für die g_i.* Die Gerade t ist die fünfte Gerade, welche l', l'' trifft, ausser den g_i, während g', g'' die dritten Geraden in den Ebenen $l''\, t$, $l'\, t$ sind. Da demnach $g'\, l''$, $g''\, l'$ zwei Paare sind, die an t hängen, so sind jene gegen diese windschief.

Die l', l'' sind windschief gegen die l_i, denn sie bilden, wie gesagt, mit jeder ein Tripel; also ergänzen sie die l_i zum Sextupel, ebenso wie g', g'' die g_i; wir haben die Doppelsechs:

$$g_1\, g_2\, g_3\, g_4\, g'\, g'',$$
$$l_1\, l_2\, l_3\, l_4\, l'\, l'',$$

welche aus der Doppelvier der g_i und l_i oder aus jedem der beiden Quadrupel hervorgeht; die g', g'' bilden also das Dupel der Schneidenden für die l_i. Die Gerade t ist auch gegen die l_i windschief, zusammen mit den beiden sie schneidenden l', l''; denn z. B. in $t\, g'\, l''$ trifft l_i die g', also nicht die t. *In Bezug auf die beiden Quadrupel der g_i und der l_i verhalten sich demnach die zweimal und die einmal schneidenden Geraden m, n und diejenige windschiefe t, welche die beiden andern schneidet, gleichartig; die Dupel der Schneidenden und der Windschiefen* (sowie auch die g_i, l_i selbst) *haben ihre Stellung ausgetauscht.*

2. Die Dreiseite $g_i\, l_k\, m_{ik}$ zeigen, dass *zwei Gerade m ohne gemeinsamen Index sich schneiden und solche mit einem gemeinsamen windschief sind und dass t alle 6 m trifft;* folglich bilden die 6 Geraden m die 3 übrigen Paare $m_{23}\, m_{14}$, $m_{31}\, m_{24}$, $m_{12}\, m_{34}$ an t, ausser $g'\, l''$, $g''\, l'$.

Die 8 Geraden n bilden ebenfalls eine Doppelvier:

$$n_1'\; n_2'\; n_3'\; n_4',$$
$$n_1''\; n_2''\; n_3''\; n_4'';$$

die n' z. B. schneiden sich nicht, weil sie zu verschiedenen Paaren

an l' gehören; die Dreiseite $g_1 l' n_1'$ und $l'' g_2 n_2''$ zeigen, dass n_1' die n_2'' schneidet; n_1' und n_1'' schneiden sich nicht. Aehnlich findet man, dass g' die n_i' trifft, aber nicht die n_i'', g'' aber diese und nicht jene. Endlich zwei Dreiseite wie $g_i l_k m_{ik}$ und $l' g_k n_k'$ beweisen, dass m_{ik} *von Geraden* n_k', n_k'' *mit verschiedenem Index getroffen wird.*

Für das Quadrupel der n_i' *werden die Dupel der Schneidenden und Windschiefen durch* $g'l'$, $g''l''$ *gebildet, für das Quadrupel der* n_i'' *umgekehrt. Die Gerade* t *ist auch für diese beiden Quadrupel diejenige Windschiefe, welche die beiden andern schneidet.*

Also zerfallen die 16 *Geraden* g_i, l_i, n_i', n_i'', *welche gegen die Gerade* t *windschief sind, in* 4 *Quadrupel, welche zwei Doppelvierer bilden; diese* 4 *Quadrupel nehmen ihre Dupel von Schneidenden und Windschiefen alle aus zwei von den an* t *hängenden Geradenpaaren* $g'l''$, $g''l'$, *in den Zusammenstellungen*

$$l'l'',\ g'g'';\quad g'g'',\ l'l'';\quad g'l',\ g''l'';\quad g''l'',\ g'l'.$$

Da jedes der Dupel, wie $g', g'', \ldots$ die an t hängen, nur 4 windschiefe Geraden hat, die auch t nicht treffen (die 6 andern sind die Geraden der Paare an t, zu denen g', g'' nicht gehören), so ergiebt sich bei den Geradenpaaren $g'l''$, $g''l'$ nur dies eine Paar von Doppelvieren; denn im andern Falle müsste mindestens eines dieser Dupel gegen mehr als vier t nicht treffende Geraden windschief sein.

Vertauscht man die 2 Geradenpaare $g'l''$, $g''l'$ mit zwei andern an t hängenden, so findet sich, dass *die* 16 *einer Geraden* t *nicht begegnenden Geraden der Fläche auf* 10 *Weisen in zwei solche Doppelvieren zerlegt werden können. Eine Doppelvier kann man nun stets auf drei Weisen in ein Doppelvierseit verwandeln*; z. B. die Doppelvier

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4, \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{matrix}$$

giebt die drei Doppelvierseite:

$$\text{I.}\ \begin{matrix} g_1 & l_2 & g_3 & l_4, \\ l_1 & g_2 & l_3 & g_4, \end{matrix} \qquad \text{II.}\ \begin{matrix} g_1 & l_2 & g_4 & l_3, \\ l_1 & g_2 & l_4 & g_3, \end{matrix} \qquad \text{III.}\ \begin{matrix} g_1 & l_3 & g_2 & l_4, \\ l_1 & g_3 & l_2 & g_4; \end{matrix}$$

die drei weiteren Permutationen reproduciren nur dieselben Vierseite in entgegengesetzter Umlaufung.

Dass die 6 hier auftretenden Vierseite $g_1 l_2 g_3 l_4, \ldots$ der obigen Bedingung für windschiefe Vierseite genügen, bedarf keines Beweises; wir erhalten hier sofort den Begriff des *Doppelvierseits, gebildet durch zwei solche Vierseite, die sich in eine Doppelvier umformen lassen.*

4. Bei jedem Vielseite auf der cubischen Fläche haben wir in den Ebenen je zweier benachbarten Geraden noch eine dritte Gerade; wir wollen diese Geraden *die Winkelgeraden des Vielseits* nennen. *Es seien* d_1, d_2, d_3, d_4 *die vier Geraden der Fläche, welche ein Vierseit*

bilden, und w_{12}, w_{23}, w_{34}, w_{41} *seien die Winkelgeraden.* Zwei benachbarte der letzteren sind, weil zu zwei verschiedenen Paaren an derselben Geraden gehörig, windschief; zwei Dreiseite aber, wie $d_1 d_2 w_{12}$, $d_3 d_4 w_{34}$, beweisen, dass w_{12}, w_{34} sich schneiden; mithin *bilden* $w_{12} w_{34}$, $w_{23} w_{41}$ *zwei gegen einander windschiefe Paare, welche in Folge dessen an derselben Geraden* l *hängen. Diese ist,* weil sie eben alle vier w trifft, *gegen die Seiten des Vierseits windschief,* und da sie die einzige Gerade ist, welche alle 4 Geraden w trifft, *auch die einzige gegen das Vierseit windschiefe Gerade, seine „Gegengerade".* Die 6 andern Geraden, welche l treffen, müssen dem Vierseite — als Degeneration einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Species — zweimal begegnen; sie treffen also zwei Gegenseiten und zwar solche, die ein Paar an l bilden, verschiedene. Die 12 übrigen Geraden treffen je nur eine Seite des Vierseits.

Die Zahl der Vierseite ist 1080, denn jedes der 216 Dupel nimmt an 10 Vierseiten theil, weil es 5 zweimal treffende Geraden hat. *Jede einzelne Gerade nimmt an* 160 *Vierseiten theil,* da an ihr 40 Dupel hängen, deren jedes noch von 4 anderen Geraden zweimal getroffen wird.

Jede Gerade l *ist ferner für* $\frac{1880}{27} = 40$ *windschiefe Vierseite die Gegengerade* (vergl. auch Fl. 3. O. S. 62). Diese 40 Vierseite sind aus den 16 gegen l windschiefen Geraden gebildet. *Jedes von ihnen hat die* 4 *Geraden von zwei an* l *hängenden Paaren zu seinen Winkelgeraden, demnach sind dieselben* 4 *Geraden für je* 4 *Vierseite Winkelgeraden. Vier solche Vierseite umfassen aber die sämmtlichen* 16 *gegen* l *windschiefen Geraden.* Zwei Vierseite nämlich, welche dieselben Winkelgeraden haben, können nicht eine gemeinsame Seite haben; denn eine gemeinsame Seite zöge sofort die Gemeinsamkeit der übrigen 3 nach sich. *Demnach zerfallen die* 16 *gegen eine Gerade* l *windschiefen Geraden auch auf* 10 *verschiedene Weisen in* 4 *Vierseite je mit denselben Winkelgeraden.*

Jede Seite eines dieser Vierseite trifft nur eine Seite eines der 3 andern, denn sie gehört ja für dieses zu den oben erwähnten 12 einmal treffenden; ferner keine zwei Seiten des einen Vierseits treffen die nämliche Seite des andern, weil dann diese zu den zweimal treffenden des ersteren Vierseits gehören würde.

Seien $d_1 d_2 d_3 d_4$, $e_1 e_2 e_3 e_4$ zwei dieser Vierseite, derartig, dass $d_1 d_2$, $e_1 e_2$ dieselbe Winkelgerade w_{12} haben u. s. f., so folgt, dass d_1 gegen e_4, e_1, e_2 windschief ist, weil sie je zu verschiedenen an w_{41} oder w_{12} hängenden Paaren gehören; es treffen daher d_1, d_2, d_3, d_4 bez. nur e_3, e_4, e_1, e_2. Also erhellt, dass die 8 Geraden die Doppelvier

$$d_1\, e_2\, d_3\, e_4$$
$$e_1\, d_2\, e_3\, d_4$$

bilden. *Folglich erzeugen unsere* 4 *Vierseite zu je zweien ein Doppelvierseit*, und wir können nun auch *als Doppelvierseit den Inbegriff zweier Vierseite* definiren, *welche dieselben Winkelgeraden haben*, die wir deshalb auch *die Winkelgeraden des Doppelvierseits* nennen können.

Unsere vier Vierseite mit denselben Winkelgeraden zerfällen die 16 Geraden auf 3 Weisen in zwei Doppelvierseite, welche dieselben Winkelgeraden besitzen; wir werden sofort sehen, dass wir die 16 Geraden auch auf andere Weise in Doppelvierseite zerlegen können, welche nicht mehr in allen vier Winkelgeraden übereinstimmen. *Im Ganzen kann man also die* 16 *Geraden auf* 30 *Weisen in zwei Doppelvierseite mit den nämlichen Winkelgeraden zerlegen.*

Die Winkelgeraden eines solchen Doppelvierseits bilden zwei Paare, die an l hängen; die Dupel der Windschiefen und der Schneidenden für die beiden Quadrupel der zugehörigen Doppelvier gehören ebenfalls zu zwei an l hängenden Paaren; diese sind von jenen verschieden, denn jede Winkelgerade trifft aus jedem der beiden Quadrupel zwei Gerade, kann also nicht für das eine eine Schneidende, für das andere eine Windschiefe sein. *Die aus den* 4 *Vierseiten mit denselben Winkelgeraden gebildeten* 3 *Doppelvieren nehmen ihre Windschiefen und Schneidenden aus je zwei der* 3 *an l hängenden Paare, die nach Abzug der Winkelgeraden bleiben.* Die Geraden des jeweiligen fünften Paares treffen solche Gegenseiten der beiden Vierseite, welche in verschiedenen Quadrupeln der Doppelvier sich befinden; z. B. bei den obigen Vierseiten $d_1 d_3$, $e_1 e_3$; bez. $d_2 d_4$, $e_2 e_4$.

4. Gehen wir zurück zu dem am Schlusse von Nr. 2 erlangten Resultate. Die Doppelvier $\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{matrix}$ gab uns dort die drei mit I., II., III. bezeichneten Doppelvierseite. Die Winkelgeraden derselben sind bez. m_{12}, m_{23}, m_{34}, m_{14}; m_{12}, m_{24}, m_{34}, m_{13}; m_{13}, m_{23}, m_{24}, m_{14}. Dieselben können sich ja auch nur aus den drei Paaren zusammensetzen, die an t hängen, ausser den Schneidenden und Windschiefen der beiden Quadrupel der Doppelvier. Und je zwei dieser Doppelvierseite müssen ein Paar von Winkelgeraden gemein haben.

Die zweite Doppelvier, welche aus den 8 übrigen die t nicht treffenden Geraden gebildet wird, $\begin{matrix} n_1' & n_2' & n_3' & n_4' \\ n_1'' & n_2'' & n_3'' & n_4'' \end{matrix}$, liefert ebenfalls drei Doppelvierseite:

$$\mathrm{I}_1.\ \begin{matrix} n_3' & n_4'' & n_1' & n_2'' \\ n_3'' & n_4' & n_1'' & n_2' \end{matrix}, \qquad \mathrm{II}_1.\ \begin{matrix} n_4' & n_3'' & n_1' & n_2'' \\ n_4'' & n_3' & n_1'' & n_2' \end{matrix}, \qquad \mathrm{III}_1.\ \begin{matrix} n_2' & n_4'' & n_1' & n_3'' \\ n_2'' & n_4' & n_1'' & n_3' \end{matrix},$$

welche bez. dieselben Winkelgeraden haben wie I., II., III.; so dass z. B. m_{12} die Winkelgerade in $g_1 l_2$, $l_1 g_2$, $n_3' n_4''$, $n_3'' n_4'$ ist.

Gruppiren wir z. B. I und I_1, so haben wir zwei solche die 16 gegen t windschiefen Geraden umfassende Doppelvierseite, welche die nämlichen Winkelgeraden haben. Wir können, wie schon oben gesagt, auf 30 Weisen die 16 Geraden in zwei solche Doppelvierseite zerlegen, da wir sie 10 mal in zwei Doppelvieren zerlegen können.

Gruppiren wir aber etwa I und II_1, so *bilden die 16 Geraden zwei Doppelvierseite, die nur ein Paar der Winkelgeraden gemein haben:* m_{12}, m_{34}. *Eine derartige Zerlegung ist also auf 60 Weisen möglich.*

Nehmen wir jetzt die 4 Vierseite von zwei Doppelvierseiten mit den nämlichen Winkelgeraden, etwa die in I, I_1: $g_1 l_2 g_2 l_4$, $l_1 g_2 l_3 g_4$, $n_3' n_1'' n_1' n_2''$, $n_3'' n_4' n_1'' n_2'$, so können wir diese auf drei Weisen zu Doppelvierseiten und also auch zu Doppelvieren gruppiren; wir begnügen uns die letzteren hinzuschreiben, und fügen jedem Quadrupel das Dupel der Schneidenden zu, das dann je für das andere Quadrupel das Dupel der Windschiefen ist:

$$\begin{array}{rl|rl} g_1\ g_2\ g_3\ g_4 & l'\ l'' & n_1'\ n_2'\ n_3'\ n_4' & g'\ l' \\ l_1\ \ l_2\ l_3\ l_4 & g'\ g'' & n_1''\ n_3''\ n_3''\ n_4'' & g''\ l'' \end{array};$$

$$\begin{array}{rl|rl} g_1\ n_2''\ g_3\ n_4'' & l''\ m_{13} & l_2\ \ n_2'\ l_3\ \ n_4' & g'\ m_{13} \\ n_3'\ l_4\ n_1'\ l_2 & g'\ m_{24} & n_3''\ g_4\ n_3'\ g_2 & l''\ m_{24} \end{array};$$

$$\begin{array}{rl|rl} g_1\ n_4'\ g_3\ n_2' & l'\ m_{13} & l_1\ n_4''\ l_3\ n_2'' & g''\ m_{13} \\ n_3''\ l_2\ n_1''\ l_4 & g''\ m_{24} & n_3'\ g_3\ n_1'\ g_4 & l'\ m_{24} \end{array};$$

so dass die Dupel der Schneidenden und Windschiefen aus den 3 weiteren an t hängenden Paaren $g' l''$, $g'' l'$, $m_{13} m_{24}$, ausser den Paaren der gemeinsamen Winkelgeraden der obigen 4 Vierseite $m_{12} m_{34}$, $m_{23} m_{14}$, genommen sind.

Die 16 Geraden einer cubischen Fläche, welche einer Geraden derselben nicht begegnen, lassen sich auf 10 Weisen in zwei Doppelvieren, auf 30 Weisen in zwei Doppelvierseite mit den nämlichen Winkelgeraden und auf 10 Weisen in 4 Vierseite mit den nämlichen Winkelgeraden zerlegen. Jede Vertheilung der ersten Art führt zu je 3 von jeder der beiden letzten, ebenso jede der letzten zu je drei von den beiden ersten.

II.

5. Beim *Dupel g', g''* giebt es 5 *Gerade* l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, *welche beide Geraden des Dupels treffen*, ferner $2 \cdot 5 = 10$ *Gerade, welche je blos einer von ihnen begegnen*, die dritten Geraden t_i', t_i'' in den Ebenen $g' l_i$, $g'' l_i$; endlich 10 *Geraden r, welche gegen g', g'' windschief*

sind. Jede von diesen trifft 3 *Gerade* l_i und bildet mit g', g'' das ergänzende Tripel zu deren Tripel; *wir nennen deshalb die* l_1, l_2, l_3 *treffende* r_{123}. Sie trifft dann noch t_4', t_4'', t_5', t_5'' und darnach 3 andere Geraden r und zwar, da man leicht findet, dass *zwei* r *mit zwei gemeinsamen Indices sich nicht schneiden*, r_{145}, r_{245}, r_{345}. *Also zwei Geraden* r, *die nur einen Index gemein haben, schneiden sich.* Die dritte Gerade in der Ebene zweier sich schneidender r ist immer die l, welche ihren gemeinsamen Index trägt. An jeder l_i hängen 3 Paare von r und $g' t_i'$, $g'' t_i''$. — Ein Quintupel hat höchstens eine Windschiefe, folglich kann aus den 10 gegen ein Dupel windschiefen Geraden kein Quintupel gebildet werden.

Wohl aber lassen sich die 10 *Geraden* r, *die gegen ein Dupel windschief sind, auf* 6 *Weisen in zwei windschiefe Fünfseite zerlegen; von den* 3 *Geraden* r, *die eine Gerade eines der Fünfseite trifft, sind zwei ihre Nachbarseiten, die dritte liegt im andern Fünfseit. Keine zwei Geraden des einen Fünfseits treffen dieselbe Gerade im andern. Die* 5 *Geraden* l_i *sind die Winkelgeraden aller dieser* 12 *Fünfseite.* Zwei so zusammengehörige Fünfseite bilden ein *Doppelfünfseit;* diese Configuration wurde zuerst von Herrn Affolter a. a. O. bemerkt. Wir stellen die 6 Doppelfünfseite zusammen, wobei wir uns begnügen, die Indices der r zu schreiben:

135, 241, 352, 413, 524,	123, 345, 512, 234, 451;
134, 251, 342, 513, 425,	123, 354, 412, 235, 541;
153, 241, 532, 415, 324,	125, 543, 312, 254, 431;
132, 541, 325, 413, 254,	153, 342, 215, 534, 421;
531, 245, 312, 453, 124,	523, 341, 152, 234, 415;
435, 214, 352, 143, 521,	423, 315, 542, 231, 154.

Dass diese Figuren windschiefe Fünfseite sind, ist aus der obigen Regel über das Schneiden und Nichtschneiden der Geraden r sofort klar. Das Gesetz in der ersten Zeile bedarf keiner Erläuterung; die andern Zeilen sind aus ihr durch Vertauschung von 5, 4; 5, 3; 5, 2; 5, 1; 4, 1 hervorgegangen. Mit diesen Vertauschungen sind die von 3, 1; 2, 1; 4, 3; 4, 2; 3, 2 bez. äquivalent, indem sie dieselben Figuren in entgegengesetzter Umlaufung hervorbringen. Denn aus 1 2 3 4 5 gehen z. B. durch die Vertauschungen 5, 4; 3, 1 die Permutationen 1 2 3 5 4, 3 2 1 4 5 $\equiv$ 1 4 5 3 2 von entgegengesetzter Reihenfolge hervor. Fassen wir das erste Doppelfünfseit ins Auge, so sind beim linken Fünfseite die aufeinanderfolgenden Winkelgeraden l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, beim rechten aber l_3, l_5, l_2, l_4, l_1; bei dem einen benachbarte sind beim andern durch eine oder zwei (je nach dem Umlaufungssinne) getrennt. Daraus folgt auch, dass *die Geraden des einen Fünfseits, die*

von benachbarten Seiten des andern getroffen werden, selbst nicht benachbart sind. Die Gerade r_{135} des linken Fünfseits trifft die Winkelgeraden l_5, l_1 und kann also, da die Geraden zweier an derselben Geraden hängenden Paare windschief sind, nicht die von diesen getroffenen 4 Geraden $r_{345}, r_{512}, r_{451}, r_{123}$ treffen, sondern nur die r_{234}, wie dies ja auch aus den Indices hervorgeht; ebenso trifft r_{241} die r_{345}, die von r_{234} durch r_{512} getrennt ist.

Man sieht aber aus den Indices auch, dass *die Winkelgeraden nicht blos je die beiden benachbarten Seiten eines Fünfseits treffen, in deren Ebene sie sich befinden, sondern auch je die dem Winkel gegenüberliegende Seite;* z. B. l_1 auch r_{413} im linken und r_{512} im rechten Fünfseit, welche beide Geraden selbst ein an l_1 hängendes Paar bilden.

Bei einem Dupel haben wir also, ausser dessen beiden Geraden, ein Quintupel II (mit zwei Schneidenden), *gebildet durch die zweimal treffenden Geraden, zwei Quintupel I* (mit einer Schneidenden), *gebildet durch die einmal schneidenden Geraden, und auf* 6 *Weisen ein Doppelfünfseit, gebildet durch die gar nicht treffenden Geraden.*

Da die beiden Geraden eines Dupels mit den 10 einmal schneidenden Geraden eine Doppelsechs bilden, in der sie Gegengerade sind, so zeigt sich, dass *die* 15 *ausserhalb einer Doppelsechs befindlichen Geraden auf* 36 *Weisen ein Quintupel II und ein Doppelfünfseit bilden.*

Statt vom Dupel auszugehen, kann man auch vom Quintupel II ausgehen, da dies dieselben Geradengruppen inducirt. Seien l', l'' dessen beide Schneidenden, so sind die 10 Geraden, welche nur eine Gerade des Quintupels treffen, die 10, welche blos eine Gerade des Dupels l', l'' treffen, die 10, welche 3 Quintupelgeraden treffen, die 10 gegen l', l'' windschiefen.

6. *Behandeln wir nun das Fünfseit selbstständig; es sei* $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$. Nennen wir wieder seine 5 Winkelgeraden w_{12}, w_{13}, ...; von dem Dreiseite $d_1 d_2 w_{12}$ trifft d_4 nicht d_1, d_2, also w_{12}; so dass *jede Winkelgerade auch noch die ihrem Winkel gegenüberliegende Seite des Fünfseits schneidet; wir wollen sie deshalb* $w_{12,4}$, $w_{23,5}$, ..., *nennen.* Weil aber $w_{12,4}$ die d_4 trifft, so trifft sie nicht $w_{34,1}$, $w_{45,2}$, aber auch nicht $w_{23,5}$, $w_{51,2}$, da z. B. $w_{12,4}$, $w_{23\,5}$ zu verschiedenen Paaren an d_2 gehören. Demnach sind alle 5 Geraden w gegen einander windschief. Seien nun l', l'' die beiden Geraden, welche 4 von den w treffen, so sind sie deshalb gegen alle d windschief, weil sie z. B. in $d_1 d_2 w_{12,4}$ schon die Seite $m_{12,4}$ treffen; also schneiden sie auch in $d_5 d_1 w_{51,3}$ die Seite $w_{51,3}$. *Demgemäss bilden die* 5 *Winkelgeraden eines windschiefen Fünfseits ein Quintupel mit zwei schneidenden Geraden und diese beiden Schneidenden sind windschief gegen die Seiten des Fünfseits und,* da

eine Gerade, die dies ist, nothwendig die Winkelgeraden schneiden muss, *die einzigen*. Wir sehen daraus, dass die Fünfseite, welche wir im Vorhergehenden aus den gegen ein Dupel windschiefen Geraden geformt haben, die einzigen sind. Da die Zahl der Dupel 216 ist, so haben wir $216 \cdot 12 = 2592$ Fünfseite und 1296 Doppelfünfseite. Suchen wir diese Zahl auf anderem Wege zu erhalten, um zugleich zu ermitteln, an wie vielen Fünfseiten jede Gerade d_1 der Fläche theilnimmt. Wir haben 40 Dupel, welche sie mit beiden Geraden treffen; sei d_5, d_2 eins derselben und seien $w_{51,3}$, $w_{12,4}$ die dritten Geraden in $d_5\, d_1$, $d_1\, d_2$. Die Gerade d_3 muss nun die windschiefen Geraden d_2, $w_{51,3}$ treffen und deshalb gegen d_1, d_5 windschief sein; wir haben solcher Geraden, ausser d_1, 4. Sei eine derselben gewählt; die Gerade w_{23} trifft von selbst d_5, da d_2, d_3 es nicht thun. Die noch fehlende d_4 hat nun d_4, d_5, $w_{12,4}$ zu treffen; es giebt deren, da diese windschief sind, 3, darunter keine der schon vorhandenen. *Jede Gerade participirt an* $40 \cdot 4 \cdot 3 = 480$ *windschiefen Fünfseiten und die Gesammtzahl derselben ist* $\frac{480 \cdot 27}{5} = 2592$.

7. Für das Fünfseit $d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, d_5$ haben wir l', l'' schon als die einzigen nicht treffenden Geraden erkannt, ebenso die Winkelgeraden $w_{12,4}, \ldots$ als dreimal treffende. Da unter den 10 eine Gerade schneidenden Geraden jede nur einer andern begegnet, so kann keine Gerade drei benachbarte Seiten des Fünfseits schneiden; jede aber, die 3 (oder mehr) Seiten schneidet, muss zwei Nachbarseiten treffen, also haben wir keine mehr als dreimal treffenden und als dreimal treffende allein die 5 Winkelgeraden.

Eine nur zweimal schneidende Gerade muss zwei nicht benachbarte Seiten treffen; solcher giebt es 10; denn z. B. *das Dupel* d_1, d_3 *besitzt, ausser* d_2, $w_{51,3}$, $w_{34,1}$, *noch zwei beide Geraden schneidende Geraden* f'_{13}, f''_{13}. Dieselben treffen von den Winkelgeraden nicht $w_{51,3}$, $w_{12,4}$, $w_{23,5}$, $w_{34,1}$, weil sie d_1, d_3 treffen, wohl aber $w_{45,2}$. Sie sind die 10 einmal schneidenden Geraden des Quintupels II der w; auch umgekehrt, jede Gerade, die nur eine der w trifft, z. B. $w_{45,2}$, trifft nicht d_4, d_5, und in jedem der Paare $d_5\, d_1$, $d_1\, d_2$, $d_2\, d_3$ je nur eine, also nur d_1, d_3.

Wir haben jetzt für jede der 5 *Seiten des Fünfseits schon* 9 *schneidende Geraden, z. B. für* d_1 *die Paare* $d_5\, w_{51,3}$, $d_2\, w_{12,4}$, *ferner* f'_{51}, f''_{51}, f'_{31}, f''_{31}, $w_{34,1}$. *Es bleibt eine, welche* d_1 *allein trifft, und die wir* e_1 *nennen wollen.* Dieselbe muss, da das Quintupel der w nur fünfmal, dreimal, einmal treffende Geraden hat, zu den 10 dreimal treffenden Geraden gehören; zu diesen 10 gehören ersichtlich die 5 Geraden d_i selbst, indem z. B. $w_{51,3}$, $w_{12,4}$, $w_{34,1}$ von d_1 getroffen werden; die 5 übrigen müssen also drei benachbarte w treffen, z. B. $w_{23,5}$, $w_{34,1}$, $w_{25,2}$ und in Folge dessen von den d_i nur d_1. *Also bildet* e_1 *und* $w_{34,1}$

ein Paar an d_1 *und mithin auch die vier f zwei Paare. Seien analog* e_2, e_3, e_4, e_5 *die allein bez.* d_2, d_3, d_4, d_5 *treffenden Geraden*, so zeigt die Zusammenstellung des Dreiseits $d_1 e_1 w_{34,1}$ mit $d_2 e_2 w_{45,2}$ und $d_3 e_3 w_{51,3}$, dass e_1 und e_2 sich nicht treffen, wohl aber e_1 und e_3. *Mithin bilden die* 5 *Geraden* e_i *das windschiefe Fünfseit* $e_1 e_3 e_5 e_2 e_4$, *welches das gegebene zum Doppelfünfseit ergänzt.*

8. Jedes der 2592 Fünfseite der Fläche hat zwei windschiefe Geraden; *demnach sind gegen jede Gerade l der Fläche* $\frac{2 \cdot 2592}{27} = 192$ *Fünfseite windschief.* Die Kegelschnitte in den Ebenen durch die Gerade sind je durch die Spuren der Seiten eines solchen Fünfseits bestimmt. Dies führt zu der von Herrn Affolter behandelten und, wie er mittheilt, schon Steiner bekannten *Erzeugungsweise der cubischen Fläche*, für die ich nun einen allgemeineren Beweis geben will, als ihn Herr Affolter gegeben hat, welcher sich begnügt zu zeigen, dass jede der Diagonalen des Fünfseits der erzeugten Fläche, ausser in den Ecken, noch einmal begegnet.

Es ist also gegeben ein räumliches Fünfseit $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$ und ein Ebenenbüschel um die Axe u. Die Spuren der Seiten des Fünfseits in einer Ebene des Büschels seien $D_1, \ldots, D_5$. Ist nun noch R die Spur einer beliebigen Geraden r in der nämlichen Ebene, so fragt es sich, in wie vielen Ebenen des Büschels bilden diese 6 Spuren ein Pascal'sches Sechseck, oder liegen die 3 Schnitte $(D_1 D_2, D_4 D_5)$, $(D_2 D_3, D_5 R)$, $(D_3 D_4, R D_1)$ in einer Geraden? Der erste derselben bewegt sich auf der Schnittlinie s der Ebenen $d_1 d_2$, $d_4 d_5$, welche durch die Ecke $d_5 d_1$ geht; der zweite und dritte auf den Kegelschnitten, in denen die Hyperboloide $(u r d_5)$ und $(u r d_1)$ durch die Ebenen $d_2 d_3$, $d_3 d_4$ bez. geschnitten werden. Auf beiden Hyperboloiden liegen auch u und die Gerade v, welche durch $d_5 d_1$ geht und u, r trifft; also begegnen auch beide Kegelschnitte denselben. Weil sie von u getroffen werden, so ist die Zahl der Geraden, welche u, s und beide Kegelschnitte treffen, 4 und unter ihnen auch v, da $d_5 d_1$ auf s und r liegt. Die drei übrigen geben mit u die gesuchten Ebenen.

Uebrigens sieht man auch, dass durch die 5 Ecken des Fünfseits, je zwei weitere Punkte auf jeder Seite und vier Punkte auf u eine cubische Fläche eindeutig bestimmt ist, die alle 6 Geraden enthält.

Aus den 6 *Geraden* $d_1, \ldots, d_5$, u *kann man die* 21 *übrigen linear construiren.* Man verbinde in der Ebene $d_1 d_2$ die Spuren von d_4 und u, die wir nun lieber l' nennen wollen, durch die Gerade $w_{12,4}$ und in der Ebene $l' w_{12,4}$ die Spuren von d_3, d_5 durch die Gerade f'_{35}; und analog in den entsprechenden Ebenen. Wird jetzt die zweite Gerade l' construirt, welche vier der Geraden w trifft, (was linear geschehen kann) so muss sie von selbst die fünfte treffen; in den Ebenen

$l' w_{12,4}, \ldots$ construire man die Verbindungslinien $f''_{35}, \ldots$ der Spuren von $d_3, d_5, \ldots$.

Man sieht nebenbei, dass die Geraden f', f'', welche je zwei Seiten des Fünfseits schneiden, bez. l', l'' treffen, und demnach die f' sowohl, wie die f'' gegen einander windschief sind. Die beiden an d_1 hängenden Paare sind also $f'_{51} f''_{12}$, $f''_{51} f'_{12}$.

In den Ebenen $d_1 w_{34,1}, \ldots$ verbinden wir die Spuren von $w_{23,5}$ und $w_{45,2}, \ldots$ und erhalten die 5 Geraden $e_1, e_2, \ldots$.

9. Zwei cubische Flächen, welche sich längs der beiden Geraden eines Dupels tangiren, haben auch die 5 dasselbe zweimal schneidenden Geraden gemein und erzeugen einen Büschel, so dass für eine Fläche 3. Ordnung die Berührung mit einer andern cubischen Fläche längs einer Geraden derselben eine neunfache Bedingung ist. Ebenso umgekehrt, wenn zwei cubische Flächen die zwei Geraden eines Dupels und deren 5 Schneidende gemein haben, (d. i. $2.4+5(4-2)=18$ Punkte), so berühren sie sich längs der ersteren; die beiden Involutionen, die auf jeder der beiden Dupelgeraden durch die beiden Flächen entstehen, sind projectiv, indem sich je zwei Punktepaare entsprechen, in denen die nämliche Ebene berührt. Da aber in unserm Falle fünfmal zwei entsprechende Paare einen Punkt gemein haben, so sind beide Involutionen identisch; also jede Ebene durch eine der Dupelgeraden berührt beide Flächen in den nämlichen zwei Punkten.*)

Indem so die 7 Geraden den vollen Schnitt der cubischen Fläche mit einer andern cubischen Fläche bilden, ergiebt sich der einfachste Beweis der a. a. O. Nr. 1 (und Journ. f. Math. Bd. 88, S. 213, Nr. 36) behandelten Relation:

$$3n = 2(s + s') + \Sigma q_i$$

zwischen den Zahlen $s, s', q_1, \ldots, q_5$ der Schnittpunkte einer auf der cubischen Fläche liegenden Curve n^{ter} Ordnung mit den beiden Dupelgeraden und den 5 Schneidenden. In dem Büschel von cubischen Flächen haben wir auch zwei Regelflächen, welche je die eine Dupelgerade zur doppelten, die andere zur einfachen Leitgeraden haben und sich mit den übrigen Flächen des Büschels nur längs der letzteren tangiren.

III.

10. *Die 3 Geraden eines Tripels seien g_1, g_2, g_3; das ergänzende Tripel der alle drei treffenden Geraden sei $l_1 l_2 l_3$.* Weil beide eben den vollen Schnitt der cubischen Fläche mit einer Fläche 2. Ordnung bilden, so sind die 6, 9, 6 Geraden, welche das erste Tripel zweimal, einmal, gar nicht treffen, für das zweite die gar nicht, einmal, zweimal treffen-

*) Vergl. meinen Aufsatz Math. Ann. Bd. XXI, S. 457, Nr. 19.

den Geraden. *Die* 9 *einmal treffenden Geraden sind* die dritten in den von g_i und l_k gebildeten Ebenen, *die wir deshalb* n_{ik} *nennen wollen;* so dass n_{ki} von n_{ik} verschieden ist. Damit haben wir schon drei an g_1 hängende Paare: $l_1 n_{11}$, $l_2 n_{12}$, $l_3 n_{13}$; die beiden übrigen müssen allein durch zweimal treffende Geraden gebildet werden. Zwei, welche ein Paar an g_1 bilden; können nicht dieselbe von den beiden andern Geraden g_2, g_3 treffen; indem *wir eine Gerade, welche* g_i *und* g_k *trifft, mit* m_{ik} *bezeichnen*, möge also, da ja hier noch die Bezeichnung freisteht, g_1 von den Paaren $m'_{12} m''_{13}$, $m''_{12} m'_{13}$ und g_2 von $m'_{12} m''_{13}$, $m''_{22} m'_{23}$ getroffen werden, dann wird g_3 von $m'_{13} m''_{23}$, $m''_{13} m'_{23}$ getroffen; denn m'_{13} und m'_{23} können sich nicht schneiden, weil $m''_{12} m_{13}$ schon g_1 zur dritten Geraden haben, also nicht auch noch m'_{23}.

So zeigt sich, dass *die* 6 *Geraden* m, *welche das Tripel der* g_i *zweimal treffen, ein Sechsseit bilden:* $m'_{23} m''_{31} m'_{12} m''_{23} m'_{31} m''_{12}$, und da *die gar nicht treffenden* die zweimal treffenden für die l_i sind — *sie mögen entsprechend* $p'_{12}, \ldots$ *genannt werden —, so bilden auch diese ein Sechsseit.*

Aus den Dreiseiten $g_1 m'_{12} m''_{13}$, $l_1 p'_{12} p''_{13}$ ergiebt sich, dass, weil g_1 die l_1 trifft, m'_{12} eine und nur eine der beiden Geraden p'_{12}, p''_{13} treffen muss. Da die Bezeichnungen der l und der g von einander unabhängig sind, so gilt das auch für die Bezeichnungen der m und p. Wir können also annehmen, dass die von m'_{12} getroffene Gerade die p'_{12} sei, andernfalls hätten wir die Benennung für l_2 und l_3 zu vertauschen, was noch freistünde; trifft aber m'_{12} die p'_{12}, dann trifft m''_{13} die p''_{13}. Aus den Dreiseiten $g_1 m'_{12} m''_{13}$, $l_3 p'_{23} p''_{13}$ zeigt sich, dass m'_{12} die p'_{23}, und analog, dass sie p'_{31} trifft.

Also jede Gerade des einen Sechsseits trifft die 3 *abwechselnden im andern, die mit ihr gleichen Accent haben.*

Wir erhalten so die Figur, welche Herr Affolter als ein *Doppelsechsseit* bezeichnet hat. *Wir können dieselbe wiederum leicht in eine Doppelsechs umformen:*

$$m'_{23}\ m'_{31}\ m'_{12}\ p''_{23}\ p''_{31}\ p''_{12},$$
$$m''_{23}\ m''_{31}\ m''_{12}\ p'_{23}\ p'_{31}\ p'_{12}.$$

Umgekehrt kann man natürlich auch jede Doppelsechs:

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6,$$
$$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$$

auf 10 *verschiedene Weisen in ein Doppelsechsseit transformiren: z. B.*

$$a_1\ b_2\ a_3\ b_1\ a_2\ b_3,\quad a_4\ b_5\ a_6\ b_4\ a_5\ b_6.^*)$$

*) Während Doppelvier und Doppelvierseit, Doppelsechs und Doppelsechsseit im Grunde nicht wesentlich verschiedene Figuren sind, gilt dies nicht für Doppelfünf und Doppelfünfseit.

Jede Doppeldrei lässt sich also in ein Sechsseit umformen. Jedes Tripel führt zu zwei Doppelsechsen (Flächen 3. O., S. 55), d. h. es lässt sich auf zwei Weisen zu einem Doppeldrei vervollständigen. *Die beiden Tripel, welche $g_1\, g_2\, g_3$ zu einer Doppeldrei vervollständigen, sind die Tripel der abwechselnden Seiten des Sechsseits (oder der Doppeldrei) der 6 zweimal treffenden Geraden $m'_{23}\, m'_{31}\, m'_{12}$, $m''_3\, m''_{31}\, m''_{12}$;* so dass diese 3 Tripel zu je zweien ein Doppeldrei oder ein Sechsseit bilden. Das ergänzende Tripel jedes der Tripel der Doppeldrei der m oder der p befindet sich in der andern Doppeldrei und zwar ist es das gleichaccentuirte.

11. *Jedes Tripel und die durch dasselbe inducirten Gruppen führen zu drei Triederdurchschnitten: einen bilden die Geraden des Tripels selbst und die 6 es zweimal treffenden Geraden, einen zweiten also die des ergänzenden Tripels und die 6 dieses zweimal, das erste gar nicht treffenden Geraden, den dritten endlich die 9 beide Tripel einmal treffenden Geraden**). Schreibt man die Triederpaare so, dass je die in derselben Fläche des einen oder andern befindlichen Geraden in derselben Zeile oder Colonne stehen; so sind die beiden ersten Triederpaare:

$$\begin{array}{ccc} g_1\ m'_{12}\ m''_{13} & & l_1\ p'_{12}\ p''_{13} \\ m''_{12}\ g_2\ m'_{23} & \text{und} & p''_{12}\ l_2\ p''_{23} \\ m'_{13}\ m''_{23}\ g_3 & & p'_{13}\ p''_{23}\ l_3. \end{array}$$

Nimmt man umgekehrt aus einem Triederdurchschnitt

$$\begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{array}$$

ein Tripel heraus, was auf 6 Weisen möglich ist, etwa $q_1\, r_2\, s_3$, so sind die 6 übrigen Geraden, welche ein Sechsseit $q_2\, q_3\, r_3\, r_1\, s_1\, s_2$ oder eine Doppeldrei

$$\begin{array}{ccc} q_2 & s_1 & r_3, \\ r_1 & q_3 & s_2 \end{array}$$

bilden, die 6 jenes zweimal schneidenden Geraden**).

---

*) Vergl. über 3 Triederdurchschnitte, welche alle 27 Geraden umfassen, Flächen 3. O., S. 63; ganz besonders aber Herrn Cremona's oben erwähnte Note, in welcher die 40 Ternen von Triederpaaren tabellirt sind und aus ihnen $40 + 160$ Neunflache (Enneaeder) abgeleitet werden, deren Ebenen alle 27 Geraden enthalten, und von denen die 40 der ersten Serie mit der erwähnten Dreitheilung zusammenhängen.

**) Schubert, Math. Ann. Bd. XVII, S. 467.

Mit Hilfe zweier Dreiseite $g_i\, l_k\, n_{ik}$ findet man, dass *zwei Gerade n sich stets und nur dann schneiden, wenn sie weder im ersten noch im zweiten Index übereinstimmen;* demnach schneidet n_{12} die n_{21}, n_{23}, n_{31}, n_{33}. Der durch die 9 Geraden n, welche die beiden Tripel der g_i und der l_i einmal schneiden, gebildete Triederdurchschnitt ist:

$$\begin{matrix} n_{11} & n_{22} & n_{33} \\ n_{23} & n_{31} & n_{12} \\ n_{32} & n_{13} & n_{21}. \end{matrix}$$

12. *Betrachten wir ein windschiefes Sechsseit auf der cubischen Fläche selbständig:* $d_1\, d_2'\, d_3\, d_1'\, d_2\, d_3'$. Da die Paare $d_1\, d_2'$, $d_1'\, d_2$ gegen einander windschief sind, so ist die Schnittlinie ihrer Ebenen w_{12} dritte Gerade für beide; *gegenüberliegende Winkel des Sechsseits haben je die nämliche Winkelgerade;* Herr Affolter nennt diese 3 Winkelgeraden w_{12}, w_{23}, w_{31} die Hauptdiagonalen des Sechsseits. Die 6 Geraden des Sechsseits sind für die Bestimmung einer cubischen Fläche mit $6 + 6(4 - 2) = 18$ Punkten äquivalent; die Grundcurve des Büschels wird durch die 3 Winkelgeraden vervollständigt. Da w_{12}, w_{23} zugleich von den windschiefen Geraden d_2, d_2' getroffen werden, so sind sie selbst windschief. *Mithin bilden die 3 Winkelgeraden ein Tripel und die Seiten des Sechsseits sind die zweimal treffenden desselben.* Wir erhalten demnach keine anderen Sechsseite, als die im Vorhergehenden besprochenen. Ferner erkennen wir die eben erwähnte Grundcurve als einen Triederdurchschnitt:

$$\begin{matrix} w_{12} & d_1 & d_2' \\ d_1' & w_{31} & d_3 \\ d_2 & d_3' & w_{23}. \end{matrix}$$

Das ergänzende Tripel zu dem der 3 Winkelgeraden sei l, l', l''; da diese alle Winkelgeraden treffen, so *sind sie gegen alle Seiten des Sechsseits windschief: die Gegengeraden des Sechsseits.*

Wir schliessen an d_1, was, wie oben, auf 40 Weisen möglich ist, das Dupel $d_3'\, d_2'$ an und fügen sofort die Winkelgeraden w_{31}, w_{12} hinzu. Die Gerade d_3 soll die windschiefen Geraden d_2' und w_{31} treffen, wodurch sie dann gegen d_1, d_3' windschief wird; es giebt, ausser d_1, 4 Gerade, welche das thun; nachdem eine gewählt, werde die Winkelgerade w_{23} zugefügt; sie trifft von selbst d_3', wie die Dreiseite $d_3'\, d_1\, w_{31}$, $d_2'\, d_3\, w_{23}$ beweisen. Die fünfte Seite d_1' muss d_3 und w_{31} treffen und ist als dritte Gerade in deren Ebene eindeutig bestimmt; da sie w_{31} trifft, ist sie gegen d_3', d_1 windschief, und weil $d_1'\, w_{31}$, $d_2'\, w_{23}$ zwei Paare an d_3 sind, auch gegen d_2'. In Folge dessen schneidet sie w_{12}. Die sechste Gerade d_2 ist die dritte Gerade in $d_1'\, w_{12}$; weil sie w_{12} trifft, ist sie windschief gegen d_1, d_2' und, da $d_2\, w_{12}$, $d_3\, w_{31}$ an d_1'

hängen, auch gegen d_3, schneidet aber d_3', wie die Dreiseite $d_2 d_1' w_{12}$, $d_3 d_1' w_{13}$ zeigen. Demnach erfolgt der Schluss der Figur von selbst, und so erhellt, dass *es keine Vielseite von mehr als* 6 *Seiten giebt*, ebenso wie keine Gruppen von mehr als 6 windschiefen Geraden.

Nach dem Vorhergehenden *nimmt jede Gerade der Fläche an* $40 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 160$ *Sechsseiten (oder Doppeldreien) theil, und es giebt deren überhaupt* $\frac{160 \cdot 27}{6} = 720$, offenbar eben so viele als Tripel; denn ein Sechsseit und das Tripel seiner Winkelgeraden oder ein Sechsseit und das Tripel seiner Gegengeraden bestimmen sich gegenseitig eindeutig.

Die beiden Sechsseite, für welche zwei ergänzende Tripel bez. die Gegengeraden sind oder in umgekehrter Beziehung die Winkelgeraden, bilden ein Doppelsechsseit.

In dem Büschel von cubischen Flächen, dessen Basis durch die Seiten eines Sechsseits und die 3 Winkelgeraden gebildet wird, erfüllen die jeweiligen Gegengeraden die andere Schaar des Hyperboloids der 3 Winkelgeraden, und die Tangentialebenen dieser Fläche sind demnach die Ebenen, in denen die Spuren der 6 Seiten des Sechsseits je einem Kegelschnitte angehören.*)

13. Wir wollen jetzt noch das Verhalten der 21 übrigen Geraden gegen das Sechsseit untersuchen. Die Gegengeraden sind windschief und, weil sie allein sämmtliche Winkelgeraden treffen, die einzigen; sodann haben wir die 3 Winkelgeraden, welche 4 Seiten treffen. Jede andere Gerade, welche d_1 trifft, schneidet nicht w_{31}, w_{12}, also von den Paaren $d_2 d_1'$, $d_3 d_1'$ eine und nur eine Gerade, demnach entweder d_2, d_3 oder d_1'. *Also haben wir noch Gerade, welche je drei abwechselnde Seiten treffen, und solche, welche zwei Gegenseiten treffen. Der ersten giebt es* 6, für jedes Tripel der abwechselnden Seiten 3, je das ergänzende Tripel. Da jede dieser Geraden 3 abwechselnde Seiten trifft, kann sie keine der Winkelgeraden treffen: *wir erhalten das Sechsseit, welches das gegebene zum Doppelsechsseit ergänzt.* In der That, wenn $e_1 e_2 e_3$ sich mit $d_1 d_2 d_3$, $e_1' e_2' e_3'$ aber sich mit $d_1' d_2' d_3'$ ergänzt, so muss jede e_i' von den 6 Geraden d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3, welche den vollen Schnitt einer Fläche 2. Ordnung bilden, zwei treffen, also zwei der e_i, und ebenso jede e_i zwei der e_i'. Folglich können keine zwei e_i dieselben e_i' treffen. So entsteht ein Sechsseit aus den e_i, e_i'; es sei, da die Benennung ja noch freisteht, $e_1 e_2' e_3 e_1' e_2 e_3'$. —

Je zwei Gegenseiten d_1, d_1' *werden,* ausser von w_{12}, w_{31}, *noch von* 3 *gegen einander windschiefen Geraden getroffen:* f_1', f_1'', f_1''', *und es ergeben sich so* 9 *Gerade f.* Die 3 Geraden f_1 treffen von den Winkel-

*) Steiner, System. Entw. Anhang Nr. 67, (Werke Bd. I, S. 453); Affolter, a. a. O.

geraden nur w_{23}. Wir haben also die einmal treffenden Geraden des Tripels der w.

Die Gerade d_1 wird von den Paaren $d_3' w_{31}$, $d_2' w_{12}$ und den 6 Geraden e_1, e_2, e_3, f_1', f_1'', f_1''' getroffen, welche letztere sich also auch noch paaren müssen. Da wir die f_1 noch nicht unterschieden haben, so mögen $e_1 f_1'$, $e_2 f_1''$, $e_3 f_1'''$ zusammengehören; ebenso an d_2': $e_1' f_2'$, $e_2' f_2''$, $e_3' f_2'''$. Weil nun d_1 mit d_2', e_1 mit e_2', e_3', aber nicht mit e_1' sich trifft, so begegnet f_1' den e_1', f_2'', f_2''', ebenso f_1'' den e_2', f_2', f_2''' und f_1''' den e_3', f_2', f_2''.

An d_1' sind also gepaart $e_1' f_1'$, $e_2' f_1''$, $e_3' f_1'''$, und an d_2: $e_1 f_2'$, $e_2 f_2''$, $e_3 f_2'''$; seien endlich an d_3 gepaart $e_1 f_3'$, $e_2 f_3''$, $e_3 f_3'''$, so sind an d_3': $e_1' f_3'$, $e_2' f_3''$, $e_3' f_3'''$. Und auch jede der f_3 trifft die nicht gleich accentuirten f_1, f_2; der Triederdurchschnitt:

$$\begin{matrix} f_1' & f_2''' & f_3'', \\ f_3''' & f_1'' & f_2', \\ f_2'' & f_3' & f_1''' \end{matrix}$$

ist auch bei der jetzigen Ableitung dieser Geraden, der einmal treffenden des Tripels der w, nachgewiesen.

Die 9 Geraden, welche ein Sechsseit zweimal (je zwei Gegenseiten) treffen, bilden einen Triederdurchschnitt.

IV.

14. Es bleiben noch das *Quintupel I und das Sextupel.* Bei jenem $g_1 g_2 g_3 g_4 g_5$ mit der Schneidenden l' haben wir 5 bloss je 4 Gerade treffende Geraden: $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5$, die mit dem Quintupel eine Doppelfünf bilden, und die windschiefe g', welche alle fünf l_i trifft, während l' gegen sie windschief ist; so dass die Doppelsechs

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g', \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l' \end{matrix}$$

entsteht. Die 15 übrigen Geraden treffen von jedem der beiden Sextupel zwei und zerfallen in *die 10 Geraden, welche auch von jedem der beiden Quintupel zwei treffen:* $m_{12}, \ldots, m_{45}$, wo m_{ik} die Schnittlinie $(g_i l_k, g_k l_i)$ ist, *und die 5 je nur eine Gerade treffenden Geraden* $n_1', \ldots, n_5'$, wo n_i' die Schnittlinie $(g_i l', l_i g')$ ist, so dass auch diese Geraden gegen beide Quintupel gleichartig sind. *Letztere bilden ein Quintupel mit zwei Schneidenden g', l'; die Geraden m aber,* welche gegen g', l' alle windschief sind, *lassen sich auf 6 Weisen zu einem Doppelfünfseit umformen,* z. B.

$$m_{12}\ m_{34}\ m_{51}\ m_{23}\ m_{45}, \qquad m_{13}\ m_{24}\ m_{35}\ m_{41}\ m_{52};$$

denn zwei Gerade m schneiden sich oder sind windschief, je nachdem sie keinen oder einen Index gemein haben. Das Gesetz der Indices bei dem hingeschriebenen Doppelfünfseit ist einleuchtend; die übrigen ergeben sich durch dieselben Vertauschungen wie in Nr. 5.

In Bezug auf *das Sextupel und die aus ihm hervorgehende Doppelsechs:*

$$g_1\ g_2\ g_3\ g_4\ g_5\ g_6,$$
$$l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5\ l_6,$$

aus der, wie schon erwähnt, auf 10 Weisen ein Doppelsechsseit gebildet werden kann, genüge die Bemerkung, dass die 15 ausserhalb befindlichen Geraden $m_{ik} = (g_i l_k,\ g_k l_i)$, welche von jedem der beiden Sextupel zwei Gerade treffen, auf 10 Weisen in zwei ergänzende Tripel und einen Triederdurchschnitt sich zerlegen lassen, z. B.

$$m_{23}\ m_{31}\ m_{12},\qquad m_{14}\ m_{25}\ m_{36},$$
$$m_{56}\ m_{64}\ m_{45},\qquad m_{26}\ m_{34}\ m_{15},$$
$$m_{35}\ m_{16}\ m_{24};$$

während die Doppelsechs selbst auf 10 Weisen in zwei Paare ergänzender Tripel zerfällt, z. B.

$$g_1\ g_2\ g_3,\qquad g_4\ g_5\ g_6,$$
$$l_4\ l_5\ l_6,\qquad l_1\ l_2\ l_3.$$

Alle 27 Geraden kann man auf 120 Weisen in einen Triederdurchschnitt und 3 Paare ergänzender Tripel zerlegen.

V.

15. Aus dem eben Gesagten geht hervor, dass, wie bekannt, die 12 Geraden einer Doppelsechs (oder eines Doppelsechsseits) einen vollen Schnitt F^3F^4, die 15 übrigen einen vollen Schnitt F^3F^5, alle 27 Geraden einen vollen Schnitt F^3F^9 bilden; man kann übrigens 30, 45, 135 Punkte so auf die 12, 15, 27 Geraden vertheilen, dass auf jeder 5, 6, 10 Punkte liegen und also jede durch diese Punkte gelegte F^4, F^5, F^9 die Geraden ganz enthält.

Da bei einem Dupel die Geraden desselben mit den 10 je nur eine von ihnen treffenden Geraden eine Doppelsechs bilden, so führt dies auch zu einem Beweise der in Nr. 9 erwähnten Relation; denn mit den genannten 10 Geraden hat die Curve

$$n - s - q_1,\ n - s - q_2,\ \ldots,\ n - s' - q_5$$

Punkte gemein; also:

$$s + s' + 10n - 5s - 5s' - 2\Sigma q_i = 4n,$$

oder:

$$3n = 2(s + s') + \Sigma q_i.$$

Doch die erwähnten vollen Schnitte haben relativ geringeres Interesse, weil die einschneidenden Flächen in solche niedrigerer Ordnung zerlegt werden können. *Als solche durch Gerade der Fläche gebildete volle Schnitte, die nicht durch zusammengesetzte Flächen eingeschnitten werden, habe ich nur gefunden:*

1) das Dreiseit, 2) zwei sich ergänzende Tripel, 3) ein Dupel mit seinen fünf Schneidenden, wobei die Dupelgeraden doppelt zu rechnen sind (Nr. 9).

Ob es noch andere dem letzten Schnitte analoge giebt, bei denen auch mehrfach zu zählende Geraden auftreten, bleibt noch zu untersuchen; ich habe einige Relationen gefunden, welche darauf hinzudeuten scheinen und die ich hier noch mittheilen will.

16. Es sei S die Gesammtzahl der Schnitte einer auf der cubischen Fläche befindlichen Curve n^{ter} Ordnung mit den Geraden einer gewissen Gruppe von g windschiefen Geraden, S_i hingegen die Gesammtzahl der Schnitte mit denjenigen weitern g_i Geraden, welche i Gerade der Gruppe treffen, so lautet die obige Formel für das Dupel:

$$2S + S_2 = 3n;$$

ferner haben wir noch:

$$S + S_1 = 4n, \qquad S_2 + S_0 = 5n,$$

weil die Geraden, auf die sich die erstere dieser beiden Formeln bezieht, eine Doppelsechs bilden.

Beim Tripel haben wir:

$$S + S_3 = 2n \text{ (Hyperboloid)},$$
$$S + S_2 = 3n \text{ (Triederpaar)},$$
$$S_3 + S_0 = 3n \text{ (Triederpaar)};$$

woraus dann folgen:

$$S_1 = 3n \text{ (Triederpaar)},$$
$$S_2 + S_0 = 4n \text{ (Doppelsechs)}.$$

Beim Quadrupel haben wir, ausser:

$$S + S_4 + S_3 + S_0'' = 4n \text{ (Doppelsechs)},$$

worin S_0'' sich nur auf die beiden gegen einander windschiefen das Quadrupel nicht treffenden Geraden bezieht, noch:

$$3S + 4S_4 + S_3 = 8n,$$
$$3S + 3S_3 + 2S_2 = 12n,$$
$$2S_2 + 3S_1 = 12n;$$

beim Quintupel mit einer Schneidenden, ausser:

$$S + S_5 + S_4 + S_0 = 4n \text{ (Doppelsechs)},$$

noch:

$$3S + 5S_5 + 2S_4 = 10n,$$
$$2S + 2S_4 + S_2 = 10n.$$

Diese Formeln sind erhalten, indem Quadrupel und Quintupel in Dupel und Tripel zerlegt, die auf diese bezüglichen Formeln addirt und transformirt wurden. Eine nothwendige, aber freilich nicht hinreichende Bestätigung der Vermuthung des vollen Schnitts ist, dass sich in der That richtige Formeln ergeben, wenn $S, S_1, S_2, \ldots, n$ durch $g, g_1, g_2, \ldots, 3$ ersetzt werden; denn wenn z. B. die erste Formel:

$$3S + 4S_4 + S_3 = 8n$$

wirklich einem vollen Schnitt mit einer Fläche 8. Ordnung entspricht, so muss ja: $3g + 4g_4 + g_3 = 8 \cdot 3$ sein; was der Fall ist, da $g = 4$, $g_4 = 2$, $g_3 = 4$. So auch bei den andern.

Anhang.

In diesem Anhange erlaube ich mir *eine Zusammenstellung der mir bekannten Erzeugungsweisen der cubischen Fläche* mitzutheilen in der Hoffnung, dass dieselbe nicht unwillkommen sei.

1) Die Kegelschnitte, in denen sich die entsprechenden Elemente eines Flächenbüschels 2. Ordnung und eines ihm projectiven Ebenenbüschels durchschneiden, erzeugen eine Fläche 3. Ordnung: zweite Steiner'sche Erzeugungsart, von welcher die dritte ein Specialfall ist (Journ. f. Math. Bd. 53, S. 133; Monatsberichte der Berl. Akademie Jan. 1856; ges. Werke, Bd. II, S. 649*).

2) Ein windschiefes Fünfseit und ein Ebenenbüschel sind gegeben, die Kegelschnitte in den Ebenen des letzteren je durch die Spuren der Seiten des Fünfseits erzeugen eine cubische Fläche: Steiner-Affolter'sche Erzeugungsweise (Grunert-Hoppe's Archiv Bd. 56, S. 113); vergl. oben Nr. 8.

3) Ein vollständiges räumliches Fünfeck und ein Ebenenbüschel sind gegeben. In jeder Ebene des letzteren existirt ein Kegelschnitt, für den als ausgeartete Fläche 2. Classe das Fünfeck ein Polfünfeck ist, d. h. für welchen die Spur jeder der 10 Seiten des Fünfecks und je die der gegenüberliegenden Fläche Pol und Polare sind; alle diese Kegelschnitte erzeugen eine Fläche 3. Ordnung: Picquet'sche Erzeugungsweise (Bull. Soc. math. Bd. IV, S. 128).

4) Durch die Schnittpunkte homologer Ebenen dreier collinearer Ebenenbündel entsteht eine cubische Fläche: Grassmann'sche Er-

*) In Bezug auf den letzten Absatz des Steiner'schen Aufsatzes sehe man mein Buch S. 110 und Salmon-Fiedler's Raumgeometrie, 3. Aufl. Litteratur-Nachweis Nr. 149.

zeugungsart (Journ. f. Math., Bd. 49, S. 62), von welcher die vierte Steiner'sche ein Specialfall ist.

5) Ein fester Bündel B von 9 Ebenen $\beta_1, \ldots, \beta_9$ ist gegeben; sowie 9 Punkte $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_9$. Der Ort aller Punkte A, deren Bündel auf den Bündel B so collinear bezogen werden kann, dass die Ebene, welche zu β_i homolog ist, durch $\mathfrak{A}_i$ geht, ist eine Fläche 3. Ordnung. Die Ebenen, welche in den verschiedenen Bündeln A je der nämlichen Ebene von B homolog sind, laufen in einen Punkt zusammen und alle diese Punkte erzeugen dieselbe Fläche 3. Ordnung (Reye, Geom. der Lage, Abth. II', 21. Vortr. der ersten, 24. Vortr. der zweiten Auflage; Sturm, Math. Annalen Bd. XII, S. 292).

6) Ein Punkt A_1 und 4 Gerade a_2, a_3, a_4, a_5 sind gegeben nebst einem einförmigen Grundgebilde von 5 Elementen $b_1, b_2, \ldots, b_5$. In jeder Ebene durch A_1 giebt es einen Punkt A von der Beschaffenheit, dass der Büschel der Strahlen von A nach A_1 und den Spuren von $a_2, \ldots, a_5$ zu dem Gebilde $b_1, \ldots, b_5$ projectiv ist. Der Ort der Punkte A ist eine cubische Fläche (am eben angef. O. S. 289).

7) Drei Ebenenbüschel a, b, c sind beziehlich projectiv zu drei andern a', b', c'; ein Punkt X' beschreibe eine Ebene, dann durchläuft der Schnittpunkt X der Ebenen, welche in a, b, c zu den Ebenen von a', b', c', die nach X' gehen, bez. homolog sind, eine Fläche 3. Ordnung: Grassmann-August'sche Erzeugungsart (Grassmann, Journ. f. Math. Bd. 49, S. 64; F. August, de superficiebus 3. ordinis, Diss. Berlin 1862).

8) Drei Ebenenbüschel seien in trilinearer Beziehung, d. h. ihre Elemente haben einen solchen algebraischen Zusammenhang, dass man in zweien der Büschel je ein Element beliebig annehmen kann, um dadurch im dritten ein einziges entsprechendes zu erhalten. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen ist eine cubische Fläche: Schubert'sche Erzeugungsweise (Math. Annalen Bd. XVII, S. 457, § 6), von welcher die vorige ein Specialfall ist.

9) Ein Flächennetz 2. Ordnung sei auf einen Bündel reciprok bezogen, so dass jeder Fläche des Netzes ein Strahl des Bündels, jeder Grundcurve des Netzes eine Ebene des Bündels entspricht. Die Schnittpunkte entsprechender Flächen und Strahlen, entsprechender Curven und Ebenen erzeugen dieselbe cubische Fläche. Specialfall: Man beziehe die Ebenen eines Bündels reciprok auf die Sehnen einer cubischen Raumcurve (die dann allen Flächen des Netzes gemeinsam ist), d. h. so, dass den Ebenen eines Büschels im Bündel die Geraden einer Regelschaar entsprechen, so ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente eine cubische Fläche (meine Fl. 3. O. Nr. 110).

10) Der Punktraum Σ sei collinear auf ein Gebüsch Σ' von Flächen 2. Ordnung bezogen und also der Ebenenraum Σ auf die Gruppen von

8 associirten Punkten des Gebüsches. Der Ort der Punkte von Σ, die auf ihre entsprechenden Flächen in Σ' fallen, ist eine Fläche 3. Ordnung, welche zugleich der Ort von Punkten von Σ' ist, deren jeder in die Ebene von Σ fällt, zu deren entsprechender Gruppe von associirten Punkten er gehört (v. Escherich, Wiener Sitzungsber. 1877).

11) Die Grundcurven zweier Flächenbüschel 2. Ordnung bestehen je aus zwei Kegelschnitten K, K_1, bez. K', K_1', und K und K' befinden sich in derselben Ebene. Die Büschel seien so projectiv bezogen, dass die beiden Ebenenpaare homolog sind, das Erzeugniss der Durchschnittscurven entsprechender Flächen ist eine cubische Fläche (meine Fl. 3. O. Nr. 109).

12) Zwei Trieder sind gegeben, so wie ein Punkt; in jeder Ebene durch letztern ist durch ihn und die Spuren der 9 Schnittkanten der Flächen des einen Trieders mit denen des andern eine Curve 3. Ordnung eindeutig bestimmt; alle diese Curven erzeugen eine Fläche 3. Ordnung: erste Steiner'sche Erzeugungsweise (a. a. O.).

13) Es seien a_1, a_2, b_1, b_2 4 beliebige Geraden, B ein beliebiger Punkt. Ist dann ξ eine veränderliche Ebene des Bündels B, welche b_1, b_2 in X_1, X_2 schneidet, so erzeugt der Schnittpunkt der Ebenen $a_1 X_1$, a_2, X_2 und ξ eine cubische Fläche. (Grassmann, Crelle's Journal Bd. 49, S. 64 ff.) — Im Uebrigen verweise ich, um hier nicht zu wiederholen, auf meine Besprechung der Grassmann'schen Erzeugungen in den Math. Ann. Bd. XIV, S. 19.

Münster i./W. den 13. September 1883.

Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen.

Von

M. Noether in Erlangen.

In der Theorie der algebraischen Functionen, welche Herr Brill und ich in unserem — in der Folge mit B. N. zu citirenden — Aufsatze „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie", Math. Annalen Bd. VII, aufgestellt haben, ist eine beliebige irreducible homogene Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

einer algebraischen Curve als gegeben zu Grunde gelegt; und bei der Angabe der dort auftretenden Operationen ist weiter angenommen, dass die vielfachen, auch singulären, Punkte der Curve *einzeln* mitgegeben seien. Die letztere Annahme war auch dort erlaubt; einmal, weil diese Punkte durch bekannte, aber irrationale, Processe, bei Singularität mittels eindeutiger Transformationen nach B. N. § 5, aus der Gleichung $f(x) = 0$ einzeln auffindbar sind; sodann, weil es sich dort wesentlich um die Aufstellung von unbeschränkt gültigen *Sätzen* handelt.

Wenn man aber zur wirklichen *Ausführung* der dortigen Operationen, der *Darstellung* der zu $f(x) = 0$ gehörigen algebraischen Functionen und Zahlen aus dieser Gleichung allein, schreitet, tritt der Gesichtspunkt hervor: *keine für diesen Zweck vermeidliche Irrationalität einzuführen.* Ich werde nun, indem ich in dem vorliegenden Aufsatze diese Darstellungen gebe, zeigen, dass sie überhaupt in *durchaus rationaler Weise*, ohne Auflösung von irgend höheren, als linearen Gleichungen, nur aus der gegebenen, beliebig singulären Gleichung

$$f(x) = 0$$

allein abzuleiten sind.

Der hierbei leitende Gedanke ist einfach der, dass bei der Herstellung des Verhaltens der sog. „zu f adjungirten" Curven (IV.), auf welche unsere Theorie sich allein stützt, in den vielfachen Punkten

von $f(x) = 0$, sei es direct, sei es durch eine Reihenfolge eindeutiger Transformationen, immer nur bekannte *Gruppen* dieser Punkte zu betrachten sind. Dasselbe tritt bei der rationalen Zerfällung der Resultante aus $f(x) = 0$ und $f_c(x) = 0$, wo $f_c(x)$ eine beliebige erste Polare von $f(x)$, — analog der Kronecker'schen Zerfällung der Discriminante*), der Resultante in z aus $f(1, z, s) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ — in zwei Factoren, den „Doppelfactor" und den „Verzweigungsfactor" ein, der eine den Schnittpunkten von $f(x)$ mit einer beliebigen zu f adjungirten Curve, der andere den übrigen, die Polare vor einer solchen Curve auszeichnenden, Schnittpunkten entsprechend.

Als Hülfsmittel für diese Entwicklungen werden ausschliesslich einige einfache Sätze aus der *Theorie der Elimination* aus zwei homogenen Gleichungen mit 3 Variablen benutzt. Dass diese Sätze hier in II. eine eingehende Ableitung gefunden haben, bedarf einer Erklärung. In dem citirten Aufsatze, B. N., (1873) sind dieselben ebenfalls zu Grunde gelegt, aber (mit Ausnahme von B. N., § 7) als bekannt angenommen. Nun enthält aber keines der vorhandenen Lehrbücher von diesen Sätzen einen strengen, in allen Fällen gültig bleibenden Beweis; nur von den längst bekannten Sätzen sind in verschiedenen Vorlesungen, besonders über Geometrie, gelegentlich solche Beweise gegeben worden. Da zudem der § 7, B. N., sehr knapp gehalten ist, so möchte sich aus Beidem erklären, dass jener Aufsatz, nach dem Verhalten von analogen späteren Arbeiten zu schliessen, nicht immer richtig beurtheilt worden zu sein scheint, vor Allem in Bezug auf die rein algebraische Grundlage; in der That wird aber dabei von geometrischer Anschauung keinerlei Gebrauch gemacht und es werden, wie es auch hier geschehen soll, nur einige wenige geometrische Benennungen für bestimmte algebraische Processe eingeführt. Von Beweisen, wie sie in neuerer Zeit von St. Smith (London, Math. Soc. 1876) und Stolz (Math. Ann. XV, 1879) veröffentlicht worden sind, sehe ich hier ab, weil dieselben von den Wurzeldifferenzen und Reihenentwicklungen Gebrauch machen. Die jetzigen Begriffe der Eliminationstheorie erlauben aber, alle Beweise und Resultantendarstellungen ausschliesslich auf den Process des Bestimmens des grössten gemeinsamen Divisors zweier algebraischer Formen zurückzuführen.

Um diesem Standpunkt, der dem Zweck der vorliegenden Arbeit allein entspricht, gerecht zu werden und um diesen Aufsatz (wie den B. N.) algebraisch unabhängig zu stellen, mussten die Eliminationssätze hier behandelt werden. Dieses, und die daraus unmittelbar zu ziehenden Schlüsse auf die Definition der „mehrelementigen" Punkte

*) Journal f. r. u. a. Math., Bd. 91, pag. 301.

einer Curve und der „Multiplicität" des Schnittpunkts zweier Curven, vermöge der „allgemeinen" und der „speciellen" Resultante, sowie das Verhalten bei eindeutiger Transformation der Curven, bilden die Abschnitte I., II. dieser Arbeit.

Abschnitt III. beschäftigt sich mit der Anwendung von II. auf den Schnitt einer Curve mit ihren Polaren, wobei die Nr. 18, die Specialisirung in die Discriminante, nur zum Vergleich mit anderen Arbeiten hinzugefügt wurde. Nachdem dann in IV. die „adjungirten" Curven definirt sind, löst V. die in diesem Aufsatz gestellte Aufgabe: die rationale Zerfällung der Resultante von III. in die beiden Factoren, die rationale Aufstellung der Geschlechtszahl und der adjungirten Curven.

VI. endlich giebt solche Entwicklungen, welche die Stellung dieser Betrachtungen in dem System der Theorie der algebraischen Functionen, wie sie durch den Aufsatz B. N. und durch meinen Aufsatz „Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen", Math. Ann. Bd. XVII, geschaffen ist, betreffen. Aus den Eliminationsbetrachtungen folgen nämlich einerseits die Sätze von B. N., andrerseits der vorliegende Abschnitt V.; dabei kann die vorliegende Nr. 28, VI., durch ausführlichere Behandlung den § 7, B. N. ersetzen. Die Sätze von B. N. liefern dann noch für die rationalen Darstellungen von V. wichtige Modificationen (Nr. 30, 31, VI.), wenigstens für die Aufstellung der zur Curve m^{ter} Ordnung, $f(x) = 0$, adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varphi(x) = 0$; Darstellungen, die übrigens vermöge der Nr. 31 auch ohne die Sätze von B. N. bewiesen sind. Die Aufstellung dieser Functionen $\varphi(x)$ genügt aber nach meinem oben citirten Aufsatze, Math. Ann. Bd. XVII, für die Darstellung aller zu f gehöriger Functionen und Zahlen: es sind die Zähler der zu f gehörigen Differentiale erster Gattung (Nr. 32).

I.

Elimination aus zwei binären Formen.

1.

Wir benutzen aus der Eliminationstheorie für zwei binäre Formen folgende Sätze, die als bekannt angenommen werden können:

a) Als Resultante der beiden Formen

$$(1) \qquad \begin{cases} f = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} t' + a_2 t^{m-2} t'^2 + \cdots + a_m t'^m, \\ \varphi = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} t' + b_2 t^{n-2} t'^2 + \cdots + b_n t'^n \end{cases}$$

wird der Ausdruck

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & . & a_m & \\ & & \ddots & & & & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & . & b_n & \\ & b_0 & b_1 & \dots & . & . & b_n \\ & & \ddots & & & & \end{vmatrix},$$

bestehend aus n Reihen der a und m Reihen der b, bezeichnet.

b) Die Resultante D ist eine rationale ganze homogene Function der a vom Grade n, ebenso der b vom Grade m, und vom Gesammtgewicht mn; d. h., wenn

$$\varrho\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m} \cdot b_0^{\beta_0} b_1^{\beta_1} \dots b_n^{\beta_n}$$

irgend ein Glied von D ist, wo ϱ ein Zahlenfactor, so wird

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n, \\ \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n = m, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} &1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \dots + m\alpha_m + 1 \cdot \beta_1 + 2 \cdot \beta_2 + \dots + n\beta_n \\ &= m \cdot \alpha_0 + (m-1) \cdot \alpha_1 + \dots + 1 \cdot \alpha_{m-1} + n \cdot \beta_0 + (n-1) \cdot \beta_1 \\ &\qquad + \dots + 1 \cdot \beta_{n-1} = mn. \end{aligned}$$

c) Das Verschwinden der Resultante D ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die beiden Formen f und φ einen in den homogenen Variablen t, t' wenigstens linearen Factor gemeinsam haben.

d) Der für $D = 0$ auftretende von den t, t' abhängige grösste gemeinsame Factor von f und φ ergiebt sich als ganze rationale Function der Coefficienten a und b.

e) Hat man an Stelle der beiden homogenen Formen (1)

$$f(t, t'), \qquad \varphi(t, t')$$

die nicht homogenen Formen m^{ter}, bez. n^{ter} Ordnung in τ

$$(1') \qquad f(\tau, 1) = f\left(\frac{t}{t'}, 1\right); \quad \varphi(\tau, 1) = \varphi\left(\frac{t}{t'}, 1\right)$$

gegeben, so bildet D immer noch die Resultante von (1') und es gelten die Sätze b), c), d); nur ist hinzuzufügen dass, wenn das Verschwinden der Resultante $D = 0$ durch

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0$$

hervorgebracht ist, in den grössten gemeinsamen Factor, welcher dann in d) einen Factor $t'^{\varkappa}$ $(\varkappa > 0)$ enthält, jetzt an Stelle dessen kein endlicher gemeinsamer Factor von $f(\tau, 1)$, $\varphi(\tau, 1)$ tritt, sondern nur eine gemeinsame $\varkappa$-fache Wurzel $\tau = \infty$ von

$$f(\tau, 1) = 0, \quad \varphi(\tau, 1) = 0.$$

f) Seien

$$f = a_i t^{m-i} + a_{i+1} t^{m-i-1} t' + \cdots + a_m t'^{m-i},$$
$$\varphi = b_\varkappa t^{n-\varkappa} + b_{\varkappa+1} t^{n-\varkappa-1} t' + \cdots + a_n t'^{n-\varkappa},$$
$$f' = a_0' t^m + a_1' t^{m-1} t' + \cdots + a_m' t'^m,$$
$$\varphi' = b_0' t^n + b_1' t^{n-1} t' + \cdots + b_n' t'^n;$$

sei ferner D die Resultante von f und φ, also vom Grade $n - \varkappa$ in den a, $m - i$ in den b, und D_ε die Resultante von

$$t'^i f + \varepsilon f', \qquad t'^\varkappa \varphi + \varepsilon \varphi',$$

also vom Grade n in den Grössen a, a', vom Grade m in den Grössen b, b'; und sei $\varkappa \geqq i$. Dann zeigt die Determinantenform (2) für D_ε, dass man bis auf Glieder von höherer als i^{ter} Dimension in ε erhält:

$$D_\varepsilon = \varepsilon^i (a_0' b_i - b_0' a_i)^i a_i^{\varkappa-i} \cdot D,$$

wo $b_i = 0$ für $\varkappa > i$. Ebenso tritt, wenn auf irgend andere Weise zwei Formen m^{ter} und n^{ter} Ordnung, F und Φ, vermöge $\varepsilon = 0$ in f und φ übergehen, immer D als Factor des in ε niedrigsten Gliedes der Resultante von F und Φ auf; so wird die Resultante D_ε' von

$$t'^i f + \varepsilon^i f', \qquad t'^\varkappa \varphi + \varepsilon^\varkappa \varphi'$$

bis auf Glieder von höherer als $(i\varkappa)^{\text{ter}}$ Dimension in ε zu

$$D_\varepsilon' = \varepsilon^{i\varkappa} (a_0'^\varkappa b_\varkappa^i + \cdots + (-1)^{i\varkappa} b_0'^i a_i^\varkappa) \cdot D.$$

II.

Elimination aus zwei ternären Formen.

2.

Die allgemeine Resultante.

Wir betrachten zuerst zwei Formen

$$(1) \quad \begin{cases} f \equiv f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3^m f_0 + x_3^{m-1} f_1 + x_3^{m-2} f_2 + \cdots + f_m, \\ \varphi \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3^n \varphi_0 + x_3^{n-1} \varphi_1 + x_3^{n-2} \varphi_2 + \cdots + \varphi_n, \end{cases}$$

wo f_i und φ_i homogene ganze Functionen i^{ter} Ordnung der Variablen x_1, x_2 bedeuten. Von den Formen f und φ setzen wir dabei voraus:

a) dass dieselben keinen variablen Factor gemeinsam haben;

b) dass die Constanten f_0 und φ_0 nicht zugleich verschwinden.

Die beiden Formen f und φ haben dann bei Elimination von x_3 eine nicht identisch verschwindende Resultante D, welche in Bezug auf x_1, x_2 ganz, homogen und vom Grade $m \cdot n$ ist.

Denn wenn die nach Nr. 1 existirende Resultante D in $x_1 : x_2$ identisch verschwände, würden nach Voraussetzung b) und nach Nr. 1, d) und e) die beiden Formen f und φ *als Functionen von x_3* einen ge-

meinsamen Factor in x_3 besitzen, der eine ganze Function von x_3 und auch eine ganze Function von x_1, x_2 wäre. Sei P dieser Factor, so wäre

$$f \equiv P \cdot Q,$$

wo Q eine ganze Function von x_3, eine rationale Function von x_1, x_2 würde; der Nenner von Q, eine ganze homogene Function von x_1, x_2, müsste dann in P theilbar sein, und der Quotient wäre eine in x_3, x_1, x_2 ganze Function, die in f und φ theilbar wäre — gegen die Voraussetzung a).

Der Grad $m \cdot n$ von D in x_1, x_2 ergiebt sich aus Gleichung (4) Nr. 1.

3.

Aus Nr. 2 geht hervor, dass die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ nur durch eine endliche Zahl von durch $D = 0$ gegebenen Werthsystemen $\frac{x_2}{x_1}$ und durch eine endliche Zahl zugehöriger Werthe von $\frac{x_3}{x_1}$ erfüllt werden. Man kann daher durch eine vorgängige lineare Transformation der Variablen immer erreichen, dass irgend 2 endlich verschiedenen gemeinsamen Werthsystemen, welche $f = 0$, $\varphi = 0$ erfüllen, auch 2 endlich verschiedene Werthe von $\frac{x_2}{x_1}$, d. h. zwei verschiedene Factoren von D, entsprechen, und dass zugleich die Voraussetzungen a) und b) von Nr. 2 bestehen bleiben. Zu diesen können wir also die folgende fügen:

c) dass nicht zwei endlich verschiedene gemeinsame Werthsysteme von $f = 0$, $\varphi = 0$ auf dasselbe $\frac{x_2}{x_1}$ führen.

4.

Multiplicität der Schnittpunkte zweier Curven.

Wenn unter den Voraussetzungen a), b), c) der Nr. 2 und Nr. 3 die Resultante D einen Factor

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^\alpha$$

besitzt, während kein weiterer Factor von D mit $a_1 x_1 + a_2 x_2$ zusammenfällt, so wird dem entsprechenden Werthsystem $x_1 : x_2 : x_3$, das $f = 0$, $\varphi = 0$ befriedigt — oder, wie wir sagen wollen, dem entsprechenden *Schnittpunkt* der beiden *Curven f und φ* — die *Multiplicität α* beigelegt. Man hat dann unter Berücksichtigung dieser so bestimmten Multiplicität und nach Nr. 2 zu sagen:

dass die beiden Curven f und φ $m \cdot n$ Schnittpunkte besitzen.

5.

Die nach Nr. 4 bestimmte Multiplicität eines $f = 0$ und $\varphi = 0$ gemeinsamen Werthsystemes $x_1 : x_2 : x_3$ *ist unabhängig von dem zu Grunde gelegten Coordinatensystem.*

Denn transformirt man die Formen (1), Nr. 2 durch eine nicht specielle lineare Substitution zwischen den Variablen x_1, x_2, x_3 und neuen Variablen x_1', x_2', x_3', so bleiben für die transformirten Formen

$$f'(x_1', x_2', x_3'), \qquad \varphi'(x_1', x_2', x_3')$$

die Ordnungen m, n und die Voraussetzungen a), b), c) bestehen. Die Elimination von x_3' aus f' und φ' ergiebt also eine nicht identisch verschwindende Resultante D' vom Grade $m \cdot n$ in x_1', x_2', welche einen, dem Factor $(a_1 x_1 + a_2 x_2)^\alpha$ entsprechenden Factor

$$(a_1' x_1' + a_2' x_2')^{\alpha'}$$

besitzen möge. Da nun die Resultante, als rationale ganze Function der Coefficienten, eine *stetige* Function der oben eingeführten Substitutionscoefficienten, α' aber eine *ganze* Zahl ist, so muss, so weit specielle Werthe der Substitutionscoefficienten vermieden werden, α' unabhängig von diesen Coefficienten werden, also mit α übereinstimmen.

Durch speciellere Werthe der Substitutionscoefficienten — immer bei nicht verschwindender Substitutionsdeterminante — kann der Fall eintreten, dass entweder zwei im Allgemeinen verschiedene Factoren von D', von den Exponenten α und β, sich zu *einem* Factor mit dem Exponenten $\alpha + \beta$ vereinigen, oder auch, dass die Resultante identisch verschwindet; je nachdem Voraussetzung c) oder b) nicht mehr erfüllt ist.

6.

Bestimmung der Schnittpunkte.

Um die Coordinaten *irgend eines Theils der gemeinsamen Werthsysteme von* $f = 0$, $\varphi = 0$ zu erhalten, führen wir wieder zuerst allgemeine lineare Functionen x_1', x_2', x_3' von x_1, x_2, x_3 ein und bilden nach Nr. 5 die Resultante aus $f' = 0$, $\varphi' = 0$, $x_2' - \lambda x_1' = 0$:

$$D'(\lambda).$$

An Stelle von $D'(\lambda)$ setzen wir den Ausdruck $\Delta'(\lambda)$, welcher aus $D'(\lambda)$ dadurch hervorgeht, dass jeder in $D'(\lambda)$ in irgend einer Potenz eingehende Factor nur in *erster* Potenz genommen wird; dass also, wenn

$$D'(\lambda) = D_1^1 D_2^2 D_3^3 \ldots$$

wo nicht zwei lineare Factoren eines D_h oder zweier verschiedener D_h, $D_{h'}$ einander gleich sind,

$$\Delta'(\lambda) = D_1 D_2 D_3 \ldots$$

wird. $\Delta'(\lambda)$ wird aus $D'(\lambda)$ dadurch gebildet, dass man D' durch den grössten gemeinsamen Divisor von D' und $\frac{dD'}{d\lambda}$ theilt. — Aus $\Delta'(\lambda)$ sei weiter ein beliebiger Factor vom Grade ϱ,

$$\Delta''(\lambda),$$

herausgenommen.

Um mit a), b), c), Nr. 2, 3, verträgliche Specialitäten zu vermeiden, setzen wir ferner:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \xi_1,$$
$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \xi_2,$$
$$x_3 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \xi_3,$$

wo weder ξ_1 noch ξ_2 für ein zu $\Delta''(\lambda) = 0$ gehöriges gemeinsames Werthsystem von $f = 0$, $\varphi = 0$ verschwinden sollen. Man kann dann die Coefficienten der Substitution der x' in die x so *specialisiren*, dass aus $\Delta''(\lambda) = 0$ eine nicht identisch verschwindende Gleichung ϱ^{ten} Grades in $x = \frac{\xi_2}{\xi_1}$,

$$\Delta_1(x) = 0,$$

entsteht; ferner so, dass eine solche Gleichung ϱ^{ten} Grades in $y = \frac{\xi_3}{\xi_1}$,

$$\Delta_2(y) = 0,$$

und endlich, dass eine solche Gleichung ϱ^{ten} Grades in $z = \frac{y}{x} = \frac{\xi_3}{\xi_2}$,

$$\Delta_3(z) = 0,$$

entsteht. Die Wurzeln seien bezüglich

$$a_1, a_2, \ldots, a_\varrho; \quad b_1, b_2, \ldots, b_\varrho; \quad c_1, c_2, \ldots, c_\varrho;$$

nach den Annahmen a), b), c) sind die Wurzeln a_k von einander verschieden und es gehört zu jeder Wurzel a_k nur je *eine* Wurzel b_k und *eine* Wurzel $c_k = \frac{b_k}{a_k}$; und diese Wurzeln sind nicht ∞, da hierfür ξ_1 und ξ_2 nicht $= 0$ sein sollen. Giebt man ferner in der Gleichung $\Delta_3\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ der Grösse x einen festen Werth a_k aus den Wurzeln von $\Delta_1(x) = 0$, so hat dieselbe, als Gleichung in y aufgefasst, die Wurzeln

$$a_k \frac{b_1}{a_1}, \ldots, a_k \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}}, \quad b_k, \quad a_k \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \ldots, a_k \frac{b_\varrho}{a_\varrho};$$

und keine dieser Grössen, ausser b_k, wird mit irgend einer der Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_\varrho$ übereinstimmen, wenn man nur specielle Werthe der willkürlichen Constanten α, β, γ ausschliesst. Unter der Bedingung $\Delta_1(x) = 0$ haben also die beiden Gleichungen in y:

$$\Delta_2(y) = 0, \quad \Delta_3\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

immer einen und *nur einen* in y *linearen* Factor gemein

$$Py + Q,$$

wo P und Q rationale ganze Functionen von x werden und wo P auch für die Wurzeln a_h von $\Delta_1(x) = 0$ nicht verschwindet. *Vermöge*

$$y = -\frac{Q}{P}$$

hat man also für alle zu $\Delta_1(x) = 0$ *gehörigen gemeinsamen Werthsysteme von* $f = 0$, $\varphi = 0$, $y = \frac{\xi_3}{\xi_1}$ *als rationale Function von* $x = \frac{\xi_2}{\xi_1}$, *und damit auch* $\frac{x_3}{x_1}$ *als rationale Function von* $\frac{x_2}{x_1}$ (bez., für $x_1 = 0$: $\frac{x_3}{x_2}$ als solche von $\frac{x_1}{x_2}$), *unter der Bedingung*

$$\Delta_1(x) \equiv \Delta_1'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 0$$

und unter den Voraussetzungen a), b), c) Nr. 2, 3.

Wendet man dasselbe Verfahren auf $f' = 0$, $\varphi' = 0$ an, so ergeben sich allgemeiner für alle jene Werthsysteme $x_1' : x_2' : x_3'$, also auch $x_1 : x_2 : x_3$, *als rationale Functionen des Parameters* λ, *für* $\Delta''(\lambda) = 0$, wo nur noch die Voraussetzung a) Nr. 2 für f und φ zu erfüllen ist.

7.

Die specielle Resultante.

Analog der in Nr. 2—6 an den Formen (1), Nr. 2 geführten Untersuchung betrachten wir jetzt die bei Elimination von x_3' entstehende *specielle Resultante*

$$D'(x_1', x_2')$$

zweier Formen

$$(2) \qquad \begin{aligned} f' &\equiv x_3'^{m-i} f_i' + x_3'^{m-i-1} f_{i+1}' + \cdots + f_m', \\ \varphi' &\equiv x_3'^{n-\varkappa} \varphi_\varkappa' + x_3'^{n-\varkappa-1} \varphi_{\varkappa+1}' + \cdots + \varphi_n', \end{aligned}$$

in welchen f_h', φ_h' homogene ganze Functionen h^{ter} Dimension von x_1', x_2' bedeuten, und welche aus f, φ durch lineare Coordinatentransformation der x_1, x_2, x_3 in x_1', x_2', x_3' entstanden sind. Es ist also nur angenommen, dass von f und φ alle $(i-1)^{\text{ten}}$, bez. alle $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten, dagegen nicht alle i^{ten}, bez. alle $\varkappa^{\text{ten}}$ für $(x_1' = x_2' = 0)$ verschwinden; geometrisch gesprochen: *die Curve* $f = 0$, *bez.* $\varphi = 0$, *soll im Punkt* $(x_1' = x_2' = 0)$ *einen i-, bez. x-, elementigen Punkt, mit übrigens beliebigen Singularitäten, besitzen.*

Es soll die specielle Resultante D' mit der allgemeinen Resultante D aus Nr. 2 verglichen werden.

Wie in Nr. 2 folgt auch hier

a') *dass* D' *nicht identisch für alle* $x_1 : x_2$ *verschwindet*;

b') *dass der Grad der in* x_1', x_2' *homogenen ganzen Function* $D' = mn - ix$ *wird*; denn aus (3) und (4), I. hat man, wenn

$$f_i^{\alpha_i} f_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots f_m^{\alpha_m} \cdot \varphi_\varkappa^{\beta_\varkappa} \varphi_{\varkappa+1}^{\beta_{\varkappa+1}} \cdots \varphi_n^{\beta_n}$$

ein Glied von D' ist, hier

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m = n - \varkappa,$$
$$\beta_\varkappa + \beta_{\varkappa+1} + \cdots + \beta_n = m - i,$$
$$1 \cdot \alpha_{i+1} + 2 \cdot \alpha_{i+2} + \cdots + (m-i)\alpha_m + 1 \cdot \beta_{\varkappa+1} + 2 \cdot \beta_{\varkappa+2} + \cdots + (n-\varkappa)\beta_n = (m-i)(n-\varkappa),$$

also

$$i \cdot \alpha_i + (i+1)\alpha_{i+1} + \cdots + m \cdot \alpha_m + \varkappa \cdot \beta_\varkappa + (\varkappa+1) \cdot \beta_{\varkappa+1} + \cdots + n \cdot \beta_n = mn - i\varkappa.$$

c') dagegen können hier, abweichend von Nr. 3, zwei endlich verschiedene gemeinsame Werthsysteme von $f = 0$, $\varphi = 0$ auf dieselbe Wurzel $\frac{x_2'}{x_1'}$ von $D' = 0$ führen; aber dann auf verschiedene $\frac{x_2'}{x_1'}$, bez. $\frac{x_3'}{x_2'}$.

8.

Die gemeinsamen Werthsysteme $x_1 : x_2 : x_3$ von $f = 0$, $\varphi = 0$ und die $x_1' : x_2' : x_3'$ von $f' = 0$, $\varphi' = 0$ in 7. entsprechen sich gegenseitig eindeutig. Man kann nun wieder, analog Nr. 4, die *Multiplicität* eines der letzteren Werthsysteme durch die Potenz des entsprechenden Factors in D' definiren. Unter Berücksichtigung *dieser* Definition hat man dann den Inhalt von Nr. 7 so auszusprechen:

Die beiden Curven $f' = 0$, $\varphi' = 0$ haben ausserhalb des Punktes $(x_1' = x_2' = 0)$ $mn - i\varkappa$ Schnittpunkte gemein. Dies gilt, wie singulär der i-, bez. $\varkappa$-elementige Punkt von $f' = 0$, bez. $\varphi' = 0$, auch sei; nur dass bei solcher Singularität ein Theil der $mn - i\varkappa$ Schnittpunkte als in die Nähe des Punktes $(x_1' = x_2' = 0)$ fallend aufzufassen wäre.

Die Uebereinstimmung dieser Definition mit derjenigen von Nr. 4 und die bestimmte Fassung des Satzes sollen in Nr. 9 u. 10 behandelt werden.

9.

An Stelle der beiden Formen f', φ' von Nr. 7 betrachte man zwei Formen

$$f' + \varepsilon^i f'', \quad \varphi' + \varepsilon^\varkappa \varphi'', \tag{3}$$

wo

$$f'' = x_3'^m f_0'' + x_3'^{m-1} f_1'' + \cdots + f_m'',$$
$$\varphi'' = x_3'^n \varphi_0'' + x_3'^{n-1} \varphi_1'' + \cdots + \varphi_n'',$$

und die f_k'', φ_k'' ganze homogene Functionen k^{ten} Grades von x_1', x_2' mit willkürlichen Coefficienten sind. Die durch Elimination von x_3' aus (3) entstehende Resultante D_ε' wird nach Nr. 1, f) bis auf Glieder von höherer als $(i\varkappa)^{\text{ter}}$ Dimension zu

$$D_\varepsilon' = \varepsilon^{i\varkappa}(f_0''^{\,\varkappa} \varphi_\varkappa'^{\,i} + \cdots + (-1)^{i\varkappa} \varphi_0''^{\,i} f_i'^{\,\varkappa}) \cdot D', \tag{4}$$

insbesondere für $\varkappa = i$ zu

$$(4') \qquad \varepsilon^{\varepsilon^2}(f_0''\varphi_i' - \varphi_0''f_i')^{\varepsilon} \cdot D'.$$

Die Coordinatentransformation in Nr. 7, welche f', φ' in f, φ überführt, lässt die Formen (3) dieser Nummer in zwei Formen

$$(5) \qquad f + \varepsilon^i f^{(1)}, \qquad \varphi + \varepsilon^\varkappa \varphi^{(1)}$$

übergehen. Die durch Elimination von x_3 aus (5) entstehende Resultante D_ε geht für $\varepsilon = 0$ in D, Nr. 2, über; jedem Factor $(a_1x_1 + a_2x_2)^\alpha$ in D entsprechend, existiren somit in D_ε — das eine ganze rationale, also stetige Function von ε ist — genau α in x_1, x_2 lineare Factoren, welche sich für genügend kleine ε beliebig wenig von $a_1x_1 + a_2x_2$ unterscheiden.

Nach Nr. 5 hat daher auch D_ε', wenn dieser Factor $(a_1x_2 + a_2x_2)^\alpha$ von D zu einem von $(x_1' = x_2' = 0)$ *endlich* verschiedenen Werthsysteme von $f = 0$, $\varphi = 0$ gehört, wobei also $\frac{x_2'}{x_1'}$ nicht unbestimmt werden kann, α entsprechende, mit genügend kleinem ε beliebig wenig von einander abweichende in x_1', x_2' lineare Factoren. Demselben Werthsystem entsprechend, habe man in D' einen α'-fachen Factor $(a_1'x_1' + a_2'x_2')^{\alpha'}$ $(\alpha' > 1)$, wo $a_1'x_1' + a_2'x_2'$ von jenen α Factoren ebenfalls beliebig wenig abweicht.

Diese α Factoren treten auch auf der rechten Seite der Gleichung (4) auf. Wenn nun zunächst f_i' und $\varphi_\varkappa'$ *keinen* Factor gemein haben, so können die α Factoren in dem vor D' stehenden, mit den willkürlichen Grössen f_0'', φ_0'' sich *endlich* ändernden Factor dieser rechten Seite nicht enthalten sein, treten also alle in D' ein; und jeder Factor von D' ist auch in D_ε enthalten. Für das von $(x_1' = x_2' = 0)$ *endlich* verschiedene Werthsystem ist also $\alpha' = \alpha$. Zugleich wird dann für keinen $D' = 0$ genügenden Werth $\frac{x_2'}{x_1'}$ die gemeinsame Wurzel $\frac{x_2'}{x_1'}$, bez. $\frac{x_1'}{x_2'}$, zu ∞; d. h. die $mn - i\varkappa$ nach Nr. 8 folgenden Punkte liegen alle endlich getrennt von $(x_1' = x_2' = 0)$. Der Factor $(i\varkappa)^{\text{ten}}$ Grades vor D' in (4) liefert nur $x_1' = x_2' = 0$ und keine zugehörige gemeinsame Wurzel x_3' von $f' = 0$, $\varphi' = 0$; wohl aber ein $(i\varkappa)$-faches Werthsystem von $f = 0$, $\varphi = 0$. Man hat also:

Haben f_i' und $\varphi_\varkappa'$ in (2), Nr. 7 keinen Factor gemein, so fallen in $(x_1' = x_2' = 0)$ genau $i\varkappa$ Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi = 0$, während die übrigen Schnittpunkte alle von $(x_1' = x_2' = 0)$ endlich getrennt liegen und sich aus $D' = 0$ (Nr. 8) mit derselben Multiplicität ergeben, wie aus $D = 0$ (Nr. 4).

Wenn aber f_i' und $\varphi_\varkappa'$ einen Factor gemein haben, so variire man zunächst $\varphi_\varkappa'$ in $\varphi_\varkappa' + \eta \cdot \psi_\varkappa'$ derart, dass bei f_i' und $\varphi_\varkappa' + \eta\psi_\varkappa'$ dieses nicht mehr der Fall ist. Für die variirten Functionen gilt dann

noch alles Vorhergehende; und α Schnittpunkte, die auch bei beliebig kleinem η von $(x_1' = x_2' = 0)$ *endlich* getrennt fallen, werden genau α lineare Factoren zu D' liefern, dagegen keinen zu dem vor D' stehenden Factor in Gleichung (4), Dies gilt also auch für $\eta = 0$:

In allen Fällen liefert ein von $(x_1' = x_2' = 0)$ *endlich getrenntes Werthsystem von* $f = 0$, $\varphi = 0$ *in* D' *einen Factor von derselben Multiplicität, wie in* D; nur dass mehrere in D verschiedene Factoren mit den Exponenten $\alpha, \beta, \ldots$ in D' sich zu einem Factor mit dem Exponenten $\alpha + \beta + \cdots$ vereinigen könnten.

10.

Trennung der Multiplicität eines Schnittpunktes in mehrere Theile.

Es möge nun nach Nr. 4 für das gemeinsame Werthsystem $(x_1' = x_2' = 0)$ von $f = 0$, $\varphi = 0$ die Multiplicität μ folgen, d. h. D habe einen entsprechenden Factor $(m_1 x_1 + m_2 x_2)^\mu$. Die übrigen, von $x_1' = x_2' = 0$ *endlich* getrennten, Schnittpunkte haben also zusammen aus D, Nr. 4, und nach Nr. 9 auch aus D', Nr. 8, die Multiplicität $mn - \mu$. D' hat dann noch einen Factor vom Grade $(mn - i\varkappa) - (mn - \mu) = \mu - i\varkappa$, welcher sich auf Schnittpunkte bezieht, die *nicht* von $x_1' = x_2' = 0$ endlich getrennt liegen.

Somit hat man die μ dem Factor $(m_1 x_1 + m_2 x_2)^\mu$ von D zugehörigen Schnittpunkte *in verschiedene Theile* zu trennen. Für den ersten Theil, aus $i\varkappa$ Punkten bestehend, verschwindet der erste Factor $(i\varkappa)^{\text{ten}}$ Grades der rechten Seite der Gleichung (4), Nr. 9, wofür keine gemeinsame Wurzel x_3' von $f' = 0$, $\varphi' = 0$ auftritt. Der zweite Theil, aus $\mu - i\varkappa$ Punkten bestehend, entspricht einem Factor $(\mu - i\varkappa)^{\text{ten}}$ Grades von D':

$$(6) \qquad (m_{11} x_1' + m_{12} x_2')^{\mu_1} \cdot (m_{21} x_1' + m_{22} x_2')^{\mu_2} \ldots,$$

wo

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots = \mu - i\varkappa,$$

zerfällt also weiter in Theile von $\mu_1, \mu_2, \cdots$ Schnittpunkten; und für jeden dieser Punkte hat, obwohl dafür $x_1' = x_2' = 0$ ist, doch $\frac{x_2'}{x_1'}$ ein *ganz bestimmtes*, *durch* (6) *geliefertes Verhältniss*, für welches f_i' und $\varphi_\varkappa'$ zugleich verschwinden, während $f' = 0$, $\varphi' = 0$ die gemeinsame Wurzel $\frac{x_3'}{x_1'} = \infty$ $\left(\text{und } \frac{x_3'}{x_2'} = \infty\right)$ haben.

Wir drücken diese Beziehung geometrisch kurz so aus: dass wir die ersten $i\varkappa$ Schnittpunkte als *in den Punkt* $(x_1' = x_2' = 0)$ *fallend* bezeichnen; dagegen die weiteren $\mu - i\varkappa$ als *in die Nähe des Punktes* $(x_1' = x_2' = 0)$ *fallend* oder *an den Punkt* $(x_1' = x_2' = 0)$ *herangerückt*, und zwar μ_1 derselben in der durch $m_{11} x_1' + m_{12} x_2' = 0$ gegebenen

Richtung, wenn D' in (6) den bezügl. Factor $(m_{11}x_1' + m_{12}x_2')^{\mu_1}$ hat; oder auch: *in dieser Richtung liegt ein Schnittpunkt von μ_1-facher Multiplicität dem $(i\varkappa)$-fachen Schnittpunkt* $(x_1' = x_2' = 0)$ *benachbart.*

Die Aufstellung von D' neben D hat somit den Erfolg, dass der $(x_1' = x_2' = 0)$ zugehörige Schnitt von μ-facher Multiplicität, welcher aus dem beliebig singulären i-elementigen Punkt von f und $\varkappa$-elementigen Punkt von φ resultirt, zerlegt worden ist:

1. in einen in $(x_1' = x_2' = 0)$ gelegenen Schnittpunkt von $i\varkappa$-facher Multiplicität;
2. in Schnittpunkte von bezügl. μ_1-, μ_2-, ... facher Multiplicität, welche in verschiedenen durch (6) gegebenen Richtungen liegen, für die zugleich f_i' und $\varphi_\varkappa'$ verschwinden; wo
$$i\varkappa + \mu_1 + \mu_2 + \cdots = \mu$$
wird.

Die folgenden Transformationsbetrachtungen lehren weitere Zerlegungen.

11.

Die specielle Resultante bei eindeutigen Transformationen.

Die Resultante D' lässt sich noch anders auffassen. Der Einfachheit halber sei hierbei, event. vermöge einer vorherigen Coordinatentransformation, angenommen, dass D' nicht den Factor x_1' und keinen Factor, für welchen $x_3' = 0$ wird, besitze. $(x_1' = x_2' = 0)$ sei als Punkt P bezeichnet.

Setzt man

$$\frac{x_1'}{x_3'} = x, \quad \frac{x_2'}{x_3'} = y, \tag{7}$$

und führt durch

$$\eta = \frac{y}{x} \tag{8}$$

die Variable η an Stelle von y ein, so gehen f' und φ' über in

$$x_3'^m x^i \cdot F(x, \eta), \qquad x_3'^n x^\varkappa \Phi(x, \eta),$$

wo

$$\begin{cases} F \equiv f_i'(1, \eta) + x f_{i+1}'(1, \eta) + \cdots + x^{m-i} f_m'(1, \eta), \\ \Phi \equiv \varphi_\varkappa'(1, \eta) + x\varphi_{\varkappa+1}'(1, \eta) + \cdots + x^{n-\varkappa} f_n'(1, \eta) \end{cases} \tag{9}$$

sind.

War nun

$$f_i'(x_1', x_2') \equiv (m_{11}x_1' + m_{12}x_2')^{i_1'} (m_{21}x_1' + m_{22}x_2')^{i_2'} \cdots, \tag{10}$$

so hatte die Curve $f' = 0$ im Punkte P i_ϱ' in $m_{\varrho 1}x_1' + m_{\varrho 2}x_2' = 0$ fallende Elemente; und dementsprechend hat nach (9) die Curve $F(x, \eta) = 0$ in einem Punkte P_ϱ, der durch

$$x = 0, \quad m_{\varrho 1} + m_{\varrho 2}\eta = 0$$

gegeben ist, die Eigenschaft, daselbst mit $x = 0$ einen Punkt mit genau i_ϱ-facher Multiplicität gemein zu haben.

War ebenso

$$(10') \quad \varphi_\varkappa'(x_1', x_2') = (m_{11}x_1' + m_{12}x_2')^{\varkappa_1'}(m_{21}x_2' + m_{22}x_2')^{\varkappa_2'} \cdots,$$

so wird derselbe Punkt P_ϱ auch ein Schnittpunkt von genau $\varkappa_\varrho'$-facher Multiplicität für $x = 0$, $\Phi(x, \eta) = 0$. Dabei sind, wenn μ_ϱ in (6) > 0 war, zugleich i_ϱ' und $\varkappa_\varrho' > 0$, und umgekehrt.

Der Punkt P_ϱ selbst wird für $F = 0$ ein i_ϱ-elementiger, wo $i_\varrho \leqq i_\varrho'$, für $\Phi = 0$ ein $\varkappa_\varrho$-elementiger, wo $\varkappa_\varrho \leqq \varkappa_\varrho'$.

Die durch Elimination von x aus (9) entstehende Resultante ist, nach Nr. 1, e), identisch mit

$$(11) \qquad D'(1, \eta),$$

wenn $D'(x_1', x_2')$ die Resultante aus (2), Nr. 7, war. Da nun nach der Annahme für keinen der Schnittpunkte, zu denen $D'(x_1', x_2')$ gehört, $x = \infty$ oder $\eta = \infty$ wird, so kann man sagen:

$D'(1, \eta)$ ist auch als Resultante der transformirten Formen F, Φ in (9) aufzufassen und liefert alle den Schnittpunkten von f', φ' entsprechende Schnittpunkte von F, Φ genau in derselben Multiplicität, wie $D'(x_1', x_2')$ jene. Insbesondere folgt die Multiplicität μ des Punktes P auch $= ix +$ den Multiplicitäten $\mu_1, \mu_2, \ldots$ der Punkte $P_1, P_2, \ldots$.

12.

Die Transformation (8) ist eine specielle quadratische und eindeutige. In dieser Hinsicht lässt sich nun die ganze Auffassung von Nr. 11 verallgemeinern.

So sei zunächst, unter der Voraussetzung, dass zwar der singuläre Schnittpunkt P von f', φ' in $(x_1' = x_2' = 0)$ falle, im Uebrigen aber keine weitere specielle Lage des Coordinatensystems gegen f', φ' stattfinde, die allgemeine eindeutige quadratische Ebenentransformation

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_2'x_3' : x_3'x_1' : x_1'x_2', \\ x_1' : x_2' : x_3' = \xi_2\xi_3 : \xi_3\xi_1 : \xi_1\xi_2, \end{cases}$$

welche einen „Fundamentalpunkt" in $(x_1' = x_2' = 0)$ hat, auf f', φ' angewandt, die hierdurch, bis auf einen Factor ξ_3^i, bez. $\xi_3^\varkappa$, übergehen in

$$(13) \quad \begin{cases} F(\xi) \equiv (\xi_1\xi_2)^{m-i} f_i'(\xi_2, \xi_1) + (\xi_1\xi_2)^{m-i-1}\xi_3 f_{i+1}'(\xi_2, \xi_1) + \cdots + \xi_3^{m-i} f_m'(\xi_2, \xi_1), \\ \Phi(\xi) \equiv (\xi_1\xi_2)^{n-\varkappa}\varphi_\varkappa'(\xi_2, \xi_1) + (\xi_1\xi_2)^{n-\varkappa-1}\xi_3 \varphi_{\varkappa+1}'(\xi_2, \xi_1) + \cdots + \xi_3^{n-\varkappa}\varphi_n'(\xi_2, \xi_1). \end{cases}$$

Es gelte (10) und (10'), Nr. 11. Dann erhält auch hier $F(\xi)$ im Punkte P_ϱ, der durch

$$\xi_3 = 0, \quad m_{\varrho 1}\xi_2 + m_{\varrho 2}\xi_1 = 0$$

gegeben ist, einen Schnittpunkt von i_ϱ'-facher Multiplicität mit $\xi_3 = 0$. Und ferner wird, sobald alle Functionen

$$f'_{i+h}(x_1', x_2'), \quad \text{für} \quad h = 0, 1, \cdots, (i_\varrho - 1),$$

den bez. Factor $(m_{\varrho 1} x_1' + m_{\varrho 2} x_2')^{i_\varrho - h}$ haben, der Punkt P_ϱ für $F(\xi)$ ein i_ϱ-elementiger $(i_\varrho \leqq i_\varrho')$; eine Eigenschaft, die also von den Constanten der quadratischen Transformation, wenn dieselbe nur in $(x_1' = x_2' = 0)$ einen nicht speciellen Fundamentalpunkt hat, unabhängig ist.

Ferner wird P_ϱ für $\Phi(\xi) = 0$ und $\xi_3 = 0$ ein Schnittpunkt von $\varkappa_\varrho'$-facher Multiplicität; und P_ϱ wird ein $\varkappa_\varrho$-elementiger Punkt von $\Phi(\xi)$, wo $\varkappa_\varrho \leqq \varkappa_\varrho'$. Für keinen der Punkte P_ϱ wird $\xi_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$, nach der Annahme dieser Nummer 12.

In $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ erhält $F(\xi)$ einen m-fachen, $\Phi(\xi)$ einen n-fachen Punkt, deren Elemente durch

$$f'_m(\xi_2, \xi_1) = 0, \quad \text{bez.} \quad \varphi'_n(\xi_2, \xi_1) = 0$$

bestimmt sind; also nach der Annahme ohne Singularität und gemeinsame Elemente. In $(\xi_2 = \xi_3 = 0)$ erhält $F(\xi)$ einen $(m - i)$-fachen Punkt mit den Elementen

$$\xi_2^{m-i} f'_i(0,1) + \xi_2^{m-i-1}\xi_3 f'_{i+1}(0,1) + \cdots + \xi_3^{m-i} f'_m(0,1) = 0,$$

entsprechend den $m - i$ den Curven $f' = 0$, $x_1' = 0$ ausserhalb P gemeinsamen Schnittpunkten, also nach der Annahme mit $m - i$ einfachen getrennten Elementen; ebenso $\Phi(\xi)$ $n - \varkappa$ solcher, die alle von den $m - i$ Elementen von $F(\xi)$ verschieden sind. Ebenso in $(\xi_1 = \xi_3 = 0)$. Die Curven $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = 0$ treffen $F(\xi)$ oder $\Phi(\xi)$ nicht in weiteren Punkten.

Nun wird die durch Elimination von ξ_3 aus (13) entstehende Resultante nach Nr. 1 bis auf einen Factor, der eine Potenz von $\xi_1 \xi_2$ ist, zu

$$D'(\xi_2, \xi_1).$$

Man erhält daher für alle ausserhalb der drei Punkte

$$(\xi_1 = \xi_2 = 0), \quad (\xi_1 = \xi_3 = 0), \quad (\xi_2 = \xi_3 = 0)$$

gelegenen Schnittpunkte von $F = 0$, $\Phi = 0$ genau dieselbe Multiplicität, wie sie durch $D'(x_1', x_2')$ für die entsprechenden Schnittpunkte von $f' = 0$, $\varphi' = 0$ geliefert wird; insbesondere für die Punkte $P_1, P_2, \ldots$ genau dieselben Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$, wie sie nach Nr. 10 für die entsprechenden dem Punkt P benachbarten Richtungen folgen.

13.

Zerlegung der Multiplicität mittels der eindeutigen Transformationen.

Man kann nun die allgemeinen quadratischen Ebenentransformationen fortsetzen, indem man einen Fundamentalpunkt zunächst in P_ϱ legt und aus F, Φ zwei neue Curven F', Φ' ableitet, welche, P_ϱ ent-

sprechend, $i_{\varrho 1}$-, $i_{\varrho 2}$-, $\cdots$, bez. $\varkappa_{\varrho 1}$-, $\varkappa_{\varrho 1}$-, $\cdots$-elementige Punkte $P_{\varrho 1}$, $P_{\varrho 2}$, $\cdots$ erhalten werden, mit Schnittpunktmultiplicitäten $\mu_{\varrho 1}, \mu_{\varrho 2}, \cdots$. Die Multiplicität von P_ϱ wird dann

$$\mu_\varrho = i_\varrho \varkappa_\varrho + \mu_{\varrho 1} + \mu_{\varrho 2} + \cdots,$$

wonach sich also die von P weiter zerlegt. Diese Operationen, nach und nach auf die P_ϱ, die $P_{\varrho\sigma}, \cdots$ angewandt, werden sich wegen der Endlichkeit der zu P gehörigen Zahl μ nach einer endlichen Zahl von Operationen so schliessen, dass kein weiterer Schnittpunkt erhalten wird.

Wendet man aber eine Anzahl von solchen quadratischen Transformationen an, bei welchen der Punkt P, oder der diesem Punkte nach und nach entsprechende Punkt nur *ein* Mal als nicht specieller einfacher Fundamentalpunkt benutzt wird, so setzen sich dieselben zu einer eindeutigen höheren Ebenentransformation zusammen:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \psi^{(1)}(x') : \psi^{(2)}(x') : \psi^{(3)}(x'),$$

wobei der Punkt $P(x_1' = x_2' = 0)$ ein einfacher nicht specieller Fundamentalpunkt wird — in dem alle $\psi^{(\lambda)}(x')$ einfach verschwinden, ohne gemeinsames Element, während auch die $\psi^{(\lambda)}(x')$ keine weitere specielle Lage gegen diesen Punkt haben —. Auch bei dieser höheren Transformation entsprechen dann nach Nr. 12 dem Punkte P von f', φ' in den transformirten Curven F, Φ Punkte $P_1, P_2, \cdots$, für F bez. i_1-, i_2-, $\cdots$-elementig, für Φ bez. $\varkappa_1$-, $\varkappa_2$-, $\cdots$-elementig, und von den bez. Schnittpunktmultiplicitäten $\mu_1, \mu_2, \cdots$, Zahlen die *identisch* werden mit den aus (12) gefundenen. Wir können daher allgemeiner als in Nr. 12 sagen:

*Unterwirft man f', φ' einer eindeutigen Ebenentransformation, welche den Punkt P, der i-, bez. $\varkappa$-elementiger Punkt von f', bez. φ', ist, zum einfachen Fundamentalpunkt hat, ohne dass eine weitere specielle Lage der Transformationscurven gegen f', φ' stattfindet, so wird die Nr. 10 angegebene Multiplicität μ des Schnittpunktes P auch zu $i\varkappa +$ den Multiplicitäten $\mu_1, \mu_2, \cdots$ der Punkte $P_1, P_2, \cdots$, welche in den transformirten Curven den am Punkte P gelegenen Elementen entsprechen.**)

---

*) Der Satz gilt auch noch für einen nicht speciellen höheren Fundamentalpunkt in P; ferner auch für solche rationale Transformationen, welche nur mit Hülfe von $f' = 0$ rational umkehrbar werden. Das Letztere folgt am Einfachsten auch durch eine vorhergehende quadratische Transformation und eine Grenzbetrachtung. Wir bedürfen indess für das Folgende dieser Erweiterungen nicht.

III.

Das Schnittpunktsystem einer Curve und ihrer ersten Polare.

14.

Erste Zerlegung der Resultante.

14. Wir wenden jetzt die vorhergehenden Betrachtungen auf den Schnitt einer Curve m^{ter} Ordnung

$$f \equiv f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

mit einer ersten Polaren

$$f_c \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} c_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} c_3 = 0 \tag{2}$$

an, zerlegen aber hierbei in Nr. 14—17 dieses ganze Schnittpunktsystem weiter *in zwei völlig getrennte Theile.*

Zunächst haben wir wieder vorauszusetzen: dass f und f_c keinen Factor gemein haben, d. h. da mit diesem von c unabhängigen Factor die drei Ausdrücke $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ verschwinden müssten: dass $f(x_1, x_2, x_3)$ keinen *Doppelfactor* besitze.

Nimmt man dann, um ein nicht specielles Coordinatensystem zu haben, eine Gleichung

$$A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = 0 \tag{3}$$

hinzu, wo A_1 und A_2 willkürlich gewählte lineare Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, derart, dass für $A_1 = A_2 = 0$ die Functionen f und f_c nicht verschwinden, und eliminirt x_1, x_2, x_3 aus (1), (2), (3), so erhält man nach den vorhergehenden Nummern eine Resultante vom Grade $m(m-1)$ in λ_1, λ_2:

$$D(\lambda_1, \lambda_2), \tag{4}$$

zu deren verschiedenen Factoren die von einander getrennten Schnittpunkte von $f = 0$, $f_c = 0$ in durch die Exponenten bezeichneter Multiplicität gehören, und aus deren Gesammtheit, oder irgend einem Theil $\Delta(\lambda_1, \lambda_2)$ derselben, sich die zugehörigen Schnittpunkte durch rationale Ausdrücke

$$\begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_2(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_3(\lambda_1, \lambda_2), \\ \Delta(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

ergeben.

Die Resultante $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in (4) kann in zwei Factoren zerlegt werden, von denen der erste, D_0, von den c ganz unabhängig ist, während der zweite, D_c, keinen von den c unabhängigen Linearfactor enthält, also für nicht specielle c mit D_0 keinen Factor gemein hat. Diese Zerlegung kann in rationaler Weise geschehen, indem man in

der Function $D(\lambda_1, \lambda_2)$, welche in Bezug auf die c rational, ganz und vom m^{ten} Grade ist, den gemeinsamen Factor D_0 der Coefficienten aller verschiedenen Producte der c sucht:

$$D(\lambda_1, \lambda_2) \equiv D_0 \cdot D_c. \tag{6}$$

Dieser erste Factor D_0 bezieht sich nur auf die *mehrelementigen* Punkte von $f = 0$. Denn er gehört zu solchen Schnittpunkten von $f = 0$ mit $f_c = 0$, für welche zugleich jeder der drei Ausdrücke

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \tag{7}$$

zu Null werden. Für *jeden* mehrelementigen Punkt von $f = 0$ liefert D_0 *alle* Schnittpunkte mit $f_c = 0$, welche von den c unabhängig sind.

Specialisirt man jetzt c, nimmt man also etwa die Resultante R von $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, so wird immer

$$R = D_0 \cdot R',$$

mit dem Factor D_0. Es handelt sich jetzt um die weitere Zerlegung von D_0.

15.

Weitere Zerlegung der Resultante durch Transformation.

Sei $(x_1 = x_2 = 0)$ ein i-elementiger $(i > 0)$ Punkt, P, von f:

$$f \equiv x_3^{m-i} f_i(x_1, x_2) + x_3^{m-i-1} f_{i+1}(x_1, x_2) + \cdots + f_m(x_1, x_2), \tag{1'}$$

dann wird

$$f_c \equiv x_3^{m-i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} c_2 \right) + \cdots, \tag{2'}$$

also $P(x_1 = x_2 = 0)$ für nicht specielle c ein $(i-1)$-elementiger Punkt von f_c.

Der auf diesen Schnittpunkt P bezügliche Factor von D, also von D_0, sei

$$(a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^{\mu}. \tag{8}$$

Wendet man jetzt eine der im vorhergehenden Paragraphen II. behandelten eindeutigen Transformationen auf f und f_c an, mit einem gewöhnlichen Fundamentalpunkte in P, so erhält man die in Nr. 13 angegebene Zerlegung von μ in

$$i(i-1) + \mu_1 + \mu_2 + \cdots,$$

wo sich die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots$ auf die Punkte $P_1, P_2, \cdots$ beziehen, welche den P benachbarten Schnittpunkten von $f = 0$, $f_c = 0$ entsprechen. Jede dieser Zahlen μ_ϱ lässt sich nun wieder, wie nun gezeigt werden soll, der Zerlegung (6), Nr. 14, analog, in zwei Theile zerlegen. Es soll dies zuerst wieder an der speciellen Transformation von Nr. 11 ausgeführt werden.

Sei

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{y}{x} = \eta$$

gesetzt. So wird

$$f(x, y, 1) = x^i \cdot F(x, \eta),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^i \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x^{i-1} \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

und μ_ϱ wird nach Nr. 11 oder Nr. 13 gleich der Multiplicität des Schnittpunktes P_ϱ von $F(x, \eta) = 0$ mit $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$.

Während nun $\frac{\partial f}{\partial y}$ die Polare des Punktes $(c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0)$, also bei der nicht speciellen Lage des Coordinatensystems gegen f die Polare eines *nicht* speciell gelegenen Punktes darstellt, mithin für P aus $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ dieselbe Multiplicität μ folgt, wie aus (1) und (2), Nr. 14, bei willkürlichen c, so ist die Polare $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ die eines gegen F *speciell* gelegenen Punktes $(x : \eta : 1 = 0 : 1 : 0)$ geworden.

Die Multiplicität μ_ϱ des Schnittpunktes P_ϱ von $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$ zerfällt daher in zwei Theile: in einen Theil ν_ϱ, den der Schnittpunkt von $F = 0$ mit *irgend* einer beliebigen Polaren von $F = 0$ besitzt; und einen Theil $\mu_\varrho - \nu_\varrho$, der weiter nur auf den Schnittpunkt mit der speciellen Polaren entfällt.

Dementsprechend zerlegt sich der Factor (8) von D_0 so:

$$(9) \quad (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^\mu \equiv (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^{i(i-1)} \cdot \prod_\varrho (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^{\nu_\varrho} \cdot \prod_\varrho (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^{\mu_\varrho - \nu_\varrho}.$$

Der zweite Factor von (9), auf den Schnitt von $F = 0$ mit einer allgemeinen Polaren von F bezüglich, zerlegt sich alsdann durch weitere Transformation in demselben Sinne, wie der Factor (8) selbst, der sich auf $f = 0$, $f_c = 0$ bezog. Man könnte noch zeigen, dass $\mu_\varrho - \nu_\varrho = i_\varrho' - i_\varrho$ wird, wenn i_ϱ' und i_ϱ die Bedeutung wie in Nr. 11 haben.

16.

Die Betrachtung der vorigen Nummer werde jetzt auf die quadratische Transformation von Nr. 12 (oder auch direct auf die allgemeine Transformation der Nr. 13) ausgedehnt. Diese Transformation ist von der Form

$$(10) \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \psi^{(1)}(x) : \psi^{(2)}(x) : \psi^{(3)}(x),$$

wo $\psi^{(h)}(x)$ rationale Functionen gleicher Ordnung in den x, die

für $(x_1 = x_2 = 0)$ in gleicher Ordnung verschwinden; mit der Umkehrung der Form

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varphi^{(1)}(\xi) : \varphi^{(2)}(\xi) : \varphi^{(3)}(\xi), \tag{11}$$

wo

$$\varphi^{(1)}(\xi) = A(\xi) \cdot \varphi^{(1')}(\xi), \quad \varphi^{(2)}(\xi) = A(\xi) \cdot \varphi^{(2')}(\xi) \tag{11'}$$

wird und mit den Annahmen der Nr. 13. Hiernach enthält die Determinante

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi^{(2)}(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi^{(3)}(\xi)}{\partial \xi_3} \tag{12}$$

den Factor $A(\xi)$ in der *ersten* Potenz:

$$\Delta = A(\xi) \cdot \Delta' \tag{13}$$

und der weitere Factor Δ' verschwindet nicht mehr für beliebige, *nicht speciell* gewählte Werthsysteme ξ, für die $A(\xi) = 0$ ist, ebensowenig alle ersten Unterdeterminanten von Δ; also auch nicht für die Werthsysteme, die zu den Punkten $P_1, P_2, \ldots$ gehören, die in der Transformation dem Punkte P entsprechen.

Vermöge $x_i = \varphi^{(i)}(\xi)$ wird nun

$$f(x) \equiv M(\xi) \cdot F(\xi), \tag{14}$$

wo $M(\xi)$, dem i-elementigen Punkt P von f entsprechend, den Factor $A^i(\xi)$ erhält:

$$M = A^i(\xi) \cdot M', \tag{15}$$

während der weitere Factor M' für die Punkte $P_1, P_2, \ldots$ nicht mehr verschwindet. Man findet dann für $F(\xi) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} = M \sum_x \frac{\partial F}{\partial \xi_x} \frac{\partial \xi_x}{\partial x_h},$$

ferner

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_2} \right),$$

etc., daher

$$\sum_h c_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = -\frac{M}{\Delta} \cdot \Phi(\xi) = -A^{i-1}(\xi) \frac{M'}{\Delta'} \sum_x C_x \frac{\partial F}{\partial \xi_x} \tag{16}$$

wo

$$\Phi(\xi) \equiv \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F}{\partial \xi_2} & \frac{\partial F}{\partial \xi_3} \\ c_1 & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi_3} \\ c_2 & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_3} \\ c_3 & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}. \tag{16'}$$

Mit Hülfe von $F(\xi) = 0$ wird $\frac{M'}{\Delta'}\Phi(\xi)$ eine ganze Function der ξ.

Nach Nr. 13 wird die Multiplicität μ des Schnittpunkts P von $f = 0$, $f_c = 0$ zu $i(i-1) + \mu_1 + \mu_2 + \cdots$, wo sich μ_ϱ auf die Multiplicität des Schnittpunkts P_ϱ von $F = 0$ mit $\frac{M'}{\Delta'}\Phi(\xi) = 0$, also, da $\frac{M'}{\Delta'}$ für P_ϱ weder verschwindet, noch unendlich wird, mit $\Phi(\xi) = 0$ bezieht. Unter den μ_ϱ Schnittpunkten von

$$\Phi(\xi) \equiv \sum_x C_x \frac{\partial F}{\partial \xi_x} = 0$$

mit $F(\xi) = 0$ in P_ϱ sind aber wieder diejenigen enthalten, welche von allen C_x unabhängig sind; für welche also auch zu gleicher Zeit

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_3} = 0$$

und alle linearen Combinationen dieser 3 Grössen $= 0$ werden. Diese seien ν_ϱ an Zahl. Diese ν_ϱ Schnittpunkte lassen sich definiren als diejenigen Schnittpunkte von $F(\xi) = 0$ mit einer beliebigen Polaren

$$F_\gamma(\xi) \equiv \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\gamma_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\gamma_2 + \frac{\partial F}{\partial \xi_3}\gamma_3 = 0, \tag{17}$$

welche von den Constanten γ unabhängig sind.

Wir erhalten daher hier dieselbe Art der Zerlegung von D_0, wie in Nr. 15.

17.

Zerlegung der Resultante in Doppel- und Verzweigungsfactor. Geschlecht der Curve.

Der durch die Transformation Nr. 15 oder Nr. 16 entstandene, P entsprechende Punkt P_ϱ von $F(\xi) = 0$ möge ein i_ϱ-elementiger Punkt sein, wobei nach Nr. 12 und Nr. 13 die Zahl i_ϱ für jede unserer Transformationen die gleiche wird. Dasselbe gilt von den zu P_ϱ nach Nr. 16 gehörigen Zahlen μ_ϱ und ν_ϱ.

Setzt man die Transformationen in gleichem Sinne fort, so zerlegt sich die Zahl ν_ϱ in

$$\begin{aligned} &i_\varrho(i_\varrho-1) + \nu'_{\varrho 1} + \nu'_{\varrho 2} + \cdots \\ =&i_\varrho(i_\varrho-1) + \nu_{\varrho 1} + \nu_{\varrho 2} + \cdots + (\nu'_{\varrho 1} - \nu_{\varrho 1}) + (\nu'_{\varrho 2} - \nu_{\varrho 2}) + \cdots \end{aligned}$$

wo sich $\nu'_{\varrho\sigma}$ auf den Schnitt der Curven F' und Φ', die $F(\xi) = 0$ und $F_\gamma(\xi) = 0$ entsprechen, in einem, P_ϱ entsprechenden, Punkte $P_{\varrho\sigma}$ beziehen; und aus dieser Zahl sondern sich wieder diejenigen $\nu_{\varrho\sigma}$ Punkte aus, welche dem Schnitt von $F' = 0$ mit einer beliebigen Polaren von $F' = 0$ angehören. War dieser Punkt $P_{\varrho\sigma}$ ein $i_{\varrho\sigma}$-elementiger Punkt von $F(\xi)$, so wird also

$$\nu_{\varrho\sigma} = i_{\varrho\sigma}(i_{\varrho\sigma} - 1) + \nu'_{\varrho\sigma 1} + \nu'_{\varrho\sigma 2} + \cdots$$
$$= i_{\varrho\sigma}(i_{\varrho\sigma} - 1) + \nu_{\varrho\sigma 1} + \nu_{\varrho\sigma 2} + \cdots + (\nu'_{\varrho\sigma 1} - \nu_{\varrho\sigma 1}) + \cdots$$

Auf diese Weise zerlegt sich die dem Punkt P zugehörige Multiplicität μ von $f(x) = 0$, $f_c = 0$ auf eindeutige Weise in zwei Summanden

$$\mu = M + N, \tag{18}$$

von denen

$$M = i(i-1) + \sum_{\varrho} i_\varrho(i_\varrho - 1) + \sum_{\varrho,\sigma} i_{\varrho\sigma}(i_{\varrho\sigma} - 1) + \cdots, \tag{19}$$

wird, auf alle Zahlen i_ϱ, $i_{\varrho\sigma}$, ... bezüglich, welche zu den bei den successiven Transformationen dem Punkte P nach und nach entsprechenden mehr- ($i_{\varrho'}$, $i_{\varrho\sigma'}$, ...) elementigen Punkten gehören; während

$$N = \mu - M$$

immer noch eine positive ganze Zahl oder 0 wird.

Entsprechend zerlegt sich der Factor (8), Nr. 15, von D_0 in die zwei Factoren:

$$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^\mu \equiv (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^M \cdot (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^N; \tag{20}$$

und, wenn sich das Productzeichen Π' auf alle von einander endlich getrennten mehrelementigen Punkte von $f(x) = 0$ bezieht, D_0 selbst in die zwei Factoren

$$D_0 \equiv \Pi'(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^M \cdot \Pi'(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^N. \tag{21}$$

Da M eine gerade Zahl ist, so bezeichnen wir den ersten Factor als *Doppelfactor* T^2 *von* $D(\lambda_1, \lambda_2)$ ((6), Nr. 14) und verbinden den zweiten Factor von D_0 mit D_c zu einem Factor V, den wir als *Verzweigungsfactor von* $D(\lambda_1, \lambda_2)$ bezeichnen:

$$D(\lambda_1, \lambda_2) = T^2 \cdot V, \tag{22}$$

wo

$$\begin{cases} T = \Pi'(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^{\frac{M}{2}}, \\ V = D_c \cdot \Pi'(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^N. \end{cases} \tag{22'}$$

Aus den angegebenen Zahlen M definiren wir noch eine Zahl

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\Sigma' M, \tag{23}$$

wo sich das Summenzeichen Σ' ebenfalls auf die von einander endlich verschiedenen mehrelementigen Punkte von $f(x) = 0$ bezieht, als *das Geschlecht p der Curve* m^{ter} *Ordnung*, $f(x) = 0$.

18.

Specialisirung der Resultante in die Discriminante.

Wegen des Zusammenhanges mit anderweitigen Untersuchungen sei hier Folgendes hinzugefügt. An Stelle der allgemeinen Resultante

$D(\lambda_1, \lambda_2)$ aus (1), (2), (3), Nr. 14, betrachtet man gewöhnlich nur diejenige, welche durch zwei Specialisirungen aus jener hervorgeht, und zwar

a) dadurch, dass man eine specielle Polare von f nimmt; etwa für $\frac{x_2}{x_1} = z$, $\frac{x_3}{x_1} = s$ die Polare $\frac{\partial f}{\partial s}$ von $f(1, z, s)$; also die Polare $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ des Punktes $(c_1 = c_2 = 0)$ von $f(x_1, x_2, x_3)$;

b) dadurch, dass man $\lambda_1 - z\lambda_2 = 0$ statt (3), Nr. 14, nimmt, also die durch Elimination von s aus $f(1, z, s) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ entstehende specielle Resultante in z, die sogen. „Discriminante nach s von f" aufstellt.

Die hierdurch entstehenden Modificationen sollen einzeln verfolgt werden.

a) Wenn der Punkt $(x_1 = x_2 = 0)$ von $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ (d. h. der Punkt $s = \infty$ von $f(1, z, s) = 0$) ein i-elementiger Punkt P $(i > 0)$ für die Curve m^{ter} Ordnung, $f = 0$, ist, so wird auch die Polare $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ in P sich specieller verhalten, als die allgemeine Polare. War (1'):

$$f \equiv x_3^{m-i} f_i(x_1, x_2) + \cdots + f_m,$$

so wird

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (m-i)\, x_3^{m-i-1} f_i(x_1, x_2) + \cdots,$$

also erhält $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ den Punkt P zum i-elementigen, mit denselben durch $f_i(x_1, x_2) = 0$ gegebenen i Elementen, wie $f = 0$ selbst. Zu dem i-elementigen Punkt P von f mögen weiter, wie im Vorigen, die Zahlen $i_\varrho, i_{\varrho\sigma}, \ldots$ gehören; so wird man aus der Resultante von $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ zuerst wieder den Doppelfactor vom Grade

$$M = i(i-1) + \sum_\varrho i_\varrho (i_\varrho - 1) + \cdots,$$

(19), auf P bezüglich, abtrennen.

Vermöge einer Transformation

$$x_1 = \xi_2 \xi_3, \quad x_2 = \xi_3 \xi_1, \quad x_3 = \xi_1 \xi_2$$

wird nun, wie in (14), (16) von Nr. 16:

$$f(x) = \xi_3^{\,i} F(\xi),$$

und für $F(\xi) = 0$:

$$f_c \equiv \sum_h c_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = -\frac{\xi_3^{\,i-1}}{\xi_1 \xi_2}\left(c_1 \xi_1^{\,2} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + c_2 \xi_2^{\,2} \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + c_3 \xi_3^{\,2} \frac{\partial F}{\partial \xi_3}\right),$$

und man hat, wie in Nr. 16, für $f = 0$, $f_c = 0$ in P im Ganzen $i(i-1)$ Schnittpunkte, $+$ der Zahl jener Schnittpunkte von

$$F = 0, \quad c_1 \xi_1^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + c_2 \xi_2^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + c_3 \xi_3^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_3} = 0,$$

welche in die, P entsprechenden und auf $\xi_3 = 0$ gelegenen, Punkte $P_1, P_2, \ldots$ von $F = 0$ fallen. Speciell für $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ hat man in P im Ganzen $i(i-1)$ Schnittpunkte, + der Zahl der in $P_1, P_2, \ldots$ fallenden Schnittpunkte von

$$F = 0, \quad \xi_3^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_3} = 0.$$

Diese letzteren bestehen aber aus den in $P_1, P_2, \ldots$ fallenden $2i$ Schnittpunkten von

$$F = 0, \quad \xi_3^2 = 0,$$

und aus in $P_1, P_2, \ldots$ liegenden Schnittpunkten von

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_3} = 0.$$

Hiernach sondert sich hier von dem Verzweigungsfactor von $D(\lambda_1, \lambda_2)$ für $c_1 = c_2 = 0$ ein Factor vom Grade $2i$, auf P bezüglich, ab; ein Factor, der sich, da für ihn nicht $\frac{\partial F}{\partial \xi_3} = 0$ wird, *nicht* auf Geraden durch $(x_1 = x_2 = 0)$ bezieht, denen Tangenten an $F = 0$, von $(\xi_2 = \xi_1 = 0)$ aus, entsprächen; und man erhält

$$D(\lambda_1, \lambda_2) = T^2 \cdot (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^{2i} \cdot V',$$

wo V' aus V, (22′) Nr. 17, durch Einsetzen von $c_1 = c_2 = 0$ und Abtrennen des Factors vom Grade $2i$ — und zwar eines Factors vom Grade $\sum_\varrho (\mu_\varrho - \nu_\varrho)$ aus $\Pi'(a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^N$, vom Grade $2i - \sum_\varrho (\mu_\varrho - \nu_\varrho)$ aus D_c — hervorgeht. Dieses V' ist hier an Stelle von V zu setzen.

b) Eliminirt man speciell x_3 aus $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ (d. h. s aus $f(1, s, s) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$), und stellt die Discriminante $R(x_1, x_2)$ auf, so lässt sich diese nach Nr. 7—Nr. 10 direct auf $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in a), diese Nummer, zurückführen.

Hiernach enthält $R(x_1, x_2)$ für die von P endlich getrennt liegenden Schnittpunkte von $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ die entsprechenden Factoren in derselben Multiplicität, und ebenso gesondert, wie $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in a). Für den Punkt P dagegen, der i-elementiger Punkt sowohl von $f = 0$, als von $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ ist, fällt ein Factor vom Grade $i \,.\, i$ ganz aus, und zwar aus T^2 der Factor vom Grade $i(i-1)$, aus dem zweiten Factor von $D(\lambda_1, \lambda_2)$ noch $(a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^i$; und die übrigbleibenden, auf P bezüglichen Factoren zerlegen sich jetzt in weitere, je nach den verschiedenen getrennten Elementen von f in P. Wenn nämlich

$$f_i(x_1, x_2) = \prod_{\varrho} (m_{\varrho 1} x_1 + m_{\varrho 2} x_2)^{i'_\varrho}, \quad \left(\sum_{\varrho} i'_\varrho = i\right),$$

$$R(x_1, x_2) = U^2 \,.\, Q \,.\, R',$$

wo U^2 der Doppelfactor, R' der aus V' sich ergebende Verzweigungsfactor ist; so tritt in U, auf P bezüglich, der Factor ein:

$$\prod_{\varrho} (m_{\varrho 1} x_1 + m_{\varrho 2} x_2)^{M_\varrho - 2},$$

wo

$$M_\varrho = i_\varrho(i_\varrho - 1) + \sum_{\sigma} i_{\varrho\sigma}(i_{\varrho\sigma} - 1) + \sum_{\sigma,\tau} i_{\varrho\sigma\tau}(i_{\varrho\sigma\tau} - 1) + \cdots,$$

$$\sum_{\varrho} M_\varrho = M - i(i-1);$$

Q wird zu

$$Q = \prod_{\varrho} (m_{\varrho 1} x_1 + m_{\varrho 2} x_2)^{i'_\varrho} = f_i(x_1, x_2)$$

(wobei $s = \infty$ für $Q = 0$); und in R' tritt, auf P bezüglich, der Factor

$$\prod_{\varrho} (m_{\varrho 1} x_1 + m_{\varrho 2} x_2)^{N_\varrho},$$

wo, unter der Bezeichnung von Nr. 17:

$$N_\varrho = \sum_{\varrho} (\nu'_{\varrho\sigma} - \nu_{\varrho\sigma}) + \sum_{\sigma,\tau} (\nu'_{\varrho\sigma\tau} - \nu_{\varrho\sigma\tau}) + \cdots$$

Dabei wird natürlich in R' noch ein weiterer Factor einem der auf P bezüglichen gleich werden, sobald dieses in speciellem Fall bei V' geschehen sollte.

R' ist von einem um $2i$ geringeren Grade, als V, (22') Nr. 17, und zwar vom Grade

$$m(m-1) - \Sigma' M - 2i.$$

Man könnte, durch Einschieben von quadratischen Transformationen der Form Nr. 15, wie in jener Nummer zeigen, dass alle diejenigen eindeutigen Transformationen, welche z unverändert lassen — d. h. die Einführung von

$$s' = \psi(s, z),$$

wo ψ eine rationale Function, an Stelle von s — den Factor R' der Discriminante nicht ändern. Es ist dieses R' der „wesentliche Theiler" der Discriminante, nach dem von Herrn Kronecker früher gebrauchten Ausdruck*); U^2 der „ausserwesentliche Theiler". Setzt man

*) Vgl. das Citat der Einleitung.

$s = \frac{\sigma}{\tau}$ und betrachtet, wie es gewöhnlich geschieht, statt der obigen Resultante R von $f(1, s, s) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$, die Resultante R'' von

$$\frac{\partial\left[\tau^{m-i} f\left(1, s, \frac{\sigma}{\tau}\right)\right]}{\partial \sigma} = 0, \qquad \frac{\partial\left[\tau^{m-i} f\left(1, s, \frac{\sigma}{\tau}\right)\right]}{\partial \tau} = 0,$$

so fällt der Factor $Q = f_i(1, s)$ heraus, und es wird, bis auf einen numerischen Factor,

$$R'' = U^2 \cdot R'.$$

IV.

Die zu einer Curve adjungirten Curven.

19.

Definitionen.

Im Vorhergehenden wurde aus einem i-elementigen Punkt P einer Curve $f = 0$ durch eindeutige Transformation eine Reihe $P_1, P_2, \ldots$ von bez. i_1-, i_2- $\cdots$ elementigen Punkten der transformirten Curve, den endlich verschiedenen Richtungen in P entsprechend, abgeleitet. Wir wollen diese Thatsache jetzt kurz so ausdrücken:

Die Curve $f = 0$ besitzt in P einen i-fachen Punkt und ferner eine Reihe von i_1-, i_2-, $\cdots$ elementigen Punkten, welche in endlich verschiedenen Richtungen an den i-fachen Punkt herangerückt sind.

Transformirt man nach dem Vorigen weiter, so zerlegt sich nach diesem Satze jeder der i_ϱ-elementigen Punkte wiederum in einen i_ϱ-fachen Punkt und eine Anzahl $i_{\varrho\sigma}$-elementiger Punkte, etc. und wir können zuletzt sagen:

Die Curve $f = 0$ besitzt nur (gewöhnliche) h_1-, h_2-, $\cdots$ fache Punkte, welche auch zum Theil in bestimmten Richtungen zusammengerückt sein können.

Dieser Ausdruck findet insbesondere dann passende Anwendung, wenn man den Schnitt von $f = 0$ mit einer zweiten Curve $\varphi = 0$ betrachtet. Zerlegt man so auch alle mehrelementigen Punkte von $\varphi = 0$ in (gewöhnliche) mehrfache, so sagen die Sätze von Nr. 10 und Nr. 13 aus:

In dem Schnitte von $f = 0$ mit $\varphi = 0$ zählt jeder h-fache Punkt von $f = 0$, der h'-facher Punkt von $\varphi = 0$ ist, für einen Schnittpunkt von hh'-facher Multiplicität, gleichviel ob mehrere dieser Punkte zusammengerückt sind oder nicht.

In diesem Sinne schreibt sich dann der Doppelfactor T^2 der Resultante $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in (22) Nr. 17 und die dort definirte Zahl p (23):

$$(1) \qquad T^2 = \Pi_j (a_{1j}\lambda_1 + a_{2j}\lambda_2)^{h_j(h_j-1)},$$

$$(2) \qquad p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \sum_j \tfrac{1}{2} h_j (h_j - 1),$$

wo sich die Product- und Summenzeichen, Π_j und Σ_j, auf *alle* (auch die einander benachbarten) mehrfachen (h_1-, h_2-, $\cdots$ fachen) Punkte von $f = 0$ bezieht.

Unter Zugrundelegung dieser Ausdrucksweise bezeichnen wir jetzt eine solche Curve, welche jeden h_j-fachen Punkt von $f = 0$ zum $(h_j - 1)$-fachen Punkt hat, als eine *zu f adjungirte Curve.*

20.

Die Bedingungen für die adjungirten Curven.

Es fragt sich, wie die Forderung des Adjungirtseins zu erfüllen ist, wenn mehrere der vielfachen Punkte zusammen einen singulären, i-elementigen Punkt P von $f = 0$ bilden.

Der Punkt P sei für $f = 0$ ein i-facher Punkt + einer Reihe von in verschiedenen Richtungen an denselben herangerückten i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten; d. h. die erste eindeutige Transformation (Nr. 11, 12 oder 13) möge f überführen in F, mit i_1-, i_2-, ... elementigen getrennten Punkten $P_1, P_2, \ldots$, die P entsprechen.

Die zu bestimmende zu f adjungirte Curvenschaar n^{ter} Ordnung sei mit φ bezeichnet, eine ganze Function n^{ter} Dimension in den Coordinaten x_1, x_2, x_3. Dann soll die Curvenschaar $\varphi = 0$ 1) den Punkt P zum $(i-1)$-fachen Punkt, 2) in den benachbarten i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten alle darin enthaltenen h-fachen Punkte zu $(h-1)$-fachen Punkten haben. Nachdem die Forderung 1) erfüllt ist, sagt aber die 2) nach Nr. 19 nur aus, dass die Schaar $\Phi = 0$, welche aus $\varphi = 0$ durch die obige Transformation zugleich mit F aus f hervorgeht, irgend einen h-fachen Punkt, der in den i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten $P_1, P_2, \ldots$ von $F = 0$ enthalten ist, zum $(h-1)$-fachen Punkt besitzen soll; d. h. wieder, dass Φ in den Punkten $P_1, P_2, \ldots$ sich wie eine „zu F adjungirte" Curve verhalten soll. Man hat daher:

Damit die Schaar von Curven n^{ter} Ordnung, $\varphi = 0$, sich in einem i-elementigen Punkte P von $f = 0$ wie „zu f adjungirte" Curven verhalte, ist nothwendig und genügend: 1) *dass die $\varphi = 0$ den Punkt P zum (gewöhnlichen) $(i-1)$-fachen Punkt erhalten,* 2) *dass die Curvenschaar $\Phi = 0$, welche aus $\varphi = 0$ durch dieselbe eindeutige Transformation (Nr. 11–13) entsteht, die $f = 0$ in $F = 0$ überführt, in den i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten $P_1, P_2, \ldots$ von $F = 0$, die P entsprechen, sich wie „zu F adjungirte" Curven verhalte. Nachdem* 1), *sodann* 2)

erfüllt sind, ergiebt die Transformation von Φ *auf* φ *den verlangten Ausdruck für die* φ, *soweit es den Punkt* P *von* $f = 0$ *betrifft.*

Die Forderung 1) verlangt nur das Verschwinden aller $(i-2)^{ter}$ Differentialquotienten von φ für den Punkt P.

Da ferner, wie der vorhergehende Abschnitt lehrt, die dem Punkte P bei den successiven Transformationen entsprechenden Punkte in ihrer Singularität immer einfacher werden und nach einer *endlichen* Zahl von Operationen die Mehrfachheit der Punkte ganz verschwinden muss, so ist vermöge einer *endlichen* Zahl von Transformationen, auf alle singulären Punkte von $f = 0$ angewandt, das Verhalten der φ völlig festgesetzt.

Insbesondere ergiebt Nr. 15, dass alle *Polaren* von f die Eigenschaft von zu f adjungirten Curven $(m-1)^{ter}$ Ordnung haben, aber darüber hinaus mit $f = 0$ noch weitere in die mehrelementigen Punkte von $f = 0$ fallende Schnittpunkte besitzen, als die allgemeinen zu f adjungirten Curven $(m-1)^{ter}$ Ordnung. Der Doppelfactor von $D(\lambda_1, \lambda_2)$, Nr. 17, bezieht sich gerade auf jenen Theil der Schnittpunkte, welcher nur durch die Eigenschaft des „Adjungirtseins" bestimmt ist.

V.

Rationale Ausführung der Operationen der Abschnitte III., IV.

21.

Hülfsmittel.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass *alle* in den vorhergehenden Abschnitten vorgenommenen Processe — die Trennung der Resultante D aus den Gleichungen einer Curve f und ihrer Polaren f_c in die beiden Theiler, die Bestimmung der Zahl p, die Herstellung der Gleichungen der zu f adjungirten Curven — in *rationaler* Weise, *ohne Auflösung irgend einer höheren als linearen Gleichung*, ausgeführt werden können, wenn nichts weiter gegeben ist, als die Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

der Curve m^{ter} Ordnung, f, wobei $f(x_1, x_2, x_3)$ eine rationale ganze homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3 mit gegebenen Coefficienten ist, die auch reducibel sein kann, aber keine Doppelfactoren enthalten soll.

Die hierbei fortwährend anzuwendende Operation ist diese:

Wenn ϱ getrennte Punkte durch rationale homogene Functionen

$$x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_2(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_3(\lambda_1, \lambda_2), \tag{2}$$

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \tag{3}$$

gegeben sind, wo die ϱ Factoren der ganzen Function $R(\lambda_1, \lambda_2)$ alle

von einander verschieden sind, so sollen die Curven r^{ter} Ordnung bestimmt werden, welche jeden dieser ϱ Punkte zum $\varkappa$-fachen Punkte haben.

Diese Operation wird auf rationale Weise so ausgeführt:

Sei

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{4}$$

die Gleichung einer Curve r^{ter} Ordnung mit unbestimmten Coefficienten. Es müssen dann nur alle $(\varkappa - 1)^{ten}$ Differentialquotienten von Φ nach den Variablen x_1, x_2, x_3, die allgemein mit

$$\Phi^{(\varkappa-1)_j}(x_1', x_2, x_3) \quad \left(\text{für } j = 1, 2, \cdots, \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}\right) \tag{5}$$

bezeichnet seien, für die ϱ Punkte verschwinden, d. h. alle

$$\Phi^{(\varkappa-1)_j}(\psi_1(\lambda_1, \lambda_2), \psi_2(\lambda_1, \lambda_2), \psi_3(\lambda_1, \lambda_2))$$

müssen $R(\lambda_1, \lambda_2)$ aus (3) zum Factor haben:

$$\Phi^{(\varkappa-1)_j}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \equiv R(\lambda_1, \lambda_2) \cdot Q_j(\lambda_1, \lambda_2), \quad \left(j = 1, 2, \cdots, \frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)\right) \tag{6}$$

wo die $Q_j(\lambda_1, \lambda_2)$ ebenfalls ganze Functionen von λ_1, λ_2 werden müssen. Setzt man aber in (6) die Q_j mit unbestimmten Coefficienten an, so liefert die Gleichsetzung der Coefficienten aller Potenzen der λ auf beiden Seiten jeder Gleichung von (6) ein System, aus welchem durch Elimination der Coefficienten von Q_j ein System von genau ϱ, in den Coefficienten von Φ linearen und homogenen, Gleichungen hervorgeht — ein System, das man auch erhält, indem man $\Phi^{(\varkappa-1)_j}$ durch R theilt und den Rest identisch für alle λ verschwinden lässt. Aus allen Gleichungen (6) ergiebt sich so ein System von $\varrho \cdot \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}$, für die Coefficienten von Φ linearen und homogenen Gleichungen, in welche die in (2) und (3) gegebenen Zahlen nur ganz und rational eingehen. Dieselben stellen *höchstens* $\varrho \cdot \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}$ von einander unabhängige lineare Bedingungen für die Coefficienten von (4) dar, in deren Erfüllung die verlangte Operation besteht.

22.

Eindeutige Transformationen.

Das wesentlichste Mittel bei den Processen der vorhergehenden Abschnitte waren eindeutige Transformationen einer Curve

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

welche einen singulären Punkt von f als einfachen, nicht speciellen

Fundamentalpunkt benutzten. Dem Zwecke dieses Abschnittes gemäss sind jetzt solche eindeutige Transformationen von $f = 0$ vorzunehmen, welche gleichzeitig eine ganze *Gruppe* von ϱ, rational in der Form (2), (3) der Nr. 21 gegebenen, getrennten Punkten von f als einfache, nicht specielle Fundamentalpunkte benutzen.

Statt der allgemeinsten, nur mit Hülfe von $f = 0$ eindeutig umkehrbaren Transformation ist es genügend, eine aus quadratischen Ebenentransformationen zusammensetzbare Transformation anzuwenden, insbesondere etwa die durch Curven s^{ter} Ordnung mit $(s-1)$-fachem gemeinsamem Punkte, wenn man nur s genügend hoch wählt. Sei nämlich etwa $(x_1 = x_2 = 0)$ ein gegen f nicht speciell gelegener Punkt; so ist

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_1 \cdot S_{s-1} : x_2 \cdot S_{s-1} : S_s, \tag{7}$$

wo

$$\begin{cases} S_{s-1} = x_3 U_{s-2}(x_1, x_2) + U_{s-1}(x_1, x_2), \\ S_s \quad = x_3 V_{s-1}(x_1, x_2) + V_s \quad (x_1, x_2), \end{cases} \tag{7'}$$

und U_h, V_h ganze Functionen h^{ter} Ordnung bedeuten, eine solche Transformation, mit der Umkehrung

$$\begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 = \xi_1 \Sigma_{s-1} : \xi_2 \Sigma_{s-1} : \Sigma_s, \\ \Sigma_{s-1} = \xi_3 U_{s-2}(\xi_1, \xi_2) - V_{s-1}(\xi_1, \xi_2), \\ \Sigma_s = -\xi_3 U_{s-1}(\xi_1, \xi_2) + V_s(\xi_1, \xi_2). \end{cases} \tag{8}$$

Man bestimme nun nach Nr. 21 die Functionen S_{s-1} und S_s derart, dass dieselben für die ϱ Punkte (2), (3) je einfach verschwinden, während alle übrigen Schnittpunkte von $S_{s-1} = 0$, $S_s = 0$ von diesen ϱ Punkten getrennt liegen. Man wird dabei s so gross annehmen, dass auch keines der Elemente von $f = 0$ in einem solchen i-elementigen Punkte P mit der Richtung von S_{s-1} oder mit der Richtung der Geraden durch P und den Punkt $(x_1 = x_2 = 0)$ zusammenfällt. Dadurch wird bewirkt, dass in der transformirten Curve $F(\xi) = 0$ die P entsprechenden i_1-, i_2-, ... elementigen Punkte $P_1, P_2, \ldots$, die auf eine Gerade durch $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ fallen, alle von einander, von dem Schnittpunkte der Geraden mit $\Sigma_{s-1} = 0$ und vom Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ endlich getrennt liegen.

Man kann ferner s genügend gross und den Punkt $(x_1 = x_2 = 0)$ genügend willkürlich wählen, dass alle Schnittpunkte von f mit S_{s-1} und mit den Geraden, die durch $(x_1 = x_2 = 0)$ und die Schnittpunkte von S_{s-1} und S_s gehen, ausgenommen die in die obigen ϱ Punkte fallenden, von einander getrennte einfache Schnittpunkte werden. Dann werden entsprechend die in den Fundamentalpunkten, den Schnittpunkten von Σ_{s-1} und Σ_s, neu entstehenden vielelementigen Punkte von $F(\xi) = 0$ gewöhnliche *vielfache* Punkte, ohne jede Singularität

und von direct angebbarer Vielfachheit; so der einfache Schnittpunkt von Σ_{s-1} mit der oben bezeichneten Geraden durch P_1, P_2, ... ein $(m-i)$- facher für $F(\xi)=0$, wenn f von der m^{ten} Ordnung ist.

Diese Transformationen führen keinerlei Irrationalität ein.

Zugleich sieht man, dass, wenn eine Gruppe von Punkten auf $f(x)=0$ rational von den übrigen Punkten getrennt ist, dasselbe auch für die entsprechende Gruppe von $F(\xi)=0$ eintritt; und umgekehrt. Denn man erhält für die Gruppe (2), (3), Nr. 21 durch Elimination von $\lambda_1 : \lambda_2$ aus

$$R(\lambda_1, \lambda_2)=0, \quad x_1\psi_2(\lambda_1,\lambda_2) - x_2\psi_1(\lambda_1,\lambda_2)=0 \tag{9}$$

eine Resultante

$$S(x_1, x_2)=0 \tag{10}$$

in $x_1 : x_2$; und hat zugleich, nach Nr. 6, $\frac{x_2}{x_1}$ als rationale Function von $\frac{x_2}{x_1}$. Für die transformirte Gruppe wird also

$$S(\xi_1, \xi_2)=0, \tag{11}$$

und diese Gleichung liefert in Verbindung mit $F(\xi)=0$

a) die den ϱ Punkten entsprechenden Punkte von F, wobei Σ_{s-1} nicht $=0$;

b) Punkte von F, für welche $\Sigma_{s-1}=0$ ist.

Bildet man daher durch Elimination von $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ die Resultanten

$$T(\lambda_1', \lambda_2') \text{ aus } F(\xi)=0, \quad S(\xi_1,\xi_2)=0, \quad A_1\lambda_1' + A_2\lambda_2'=0;$$
$$U(\lambda_1', \lambda_2') \text{ aus } F(\xi)=0, \quad \Sigma_{s-1}(\xi)=0, \quad A_1\lambda_1' + A_2\lambda_2'=0,$$

wo A_1, A_2 allgemeine lineare Functionen der ξ sind; lässt T' und U' bez. aus T und U dadurch hervorgehen, dass man jeden Factor nur in der *ersten* Potenz nimmt, und bestimmt endlich den gemeinsamen Factor V von T' und U', so liefert

$$P(\lambda_1', \lambda_2') \equiv \frac{T'(\lambda_1', \lambda_2')}{V(\lambda_1', \lambda_2')} = 0 \tag{12}$$

die gesuchten Punkte a), von allen übrigen getrennt, indem sich dazu $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ nach Nr. 6 als rationale Functionen von $\lambda_1' : \lambda_2'$ ergeben.

Ist umgekehrt ein rationaler Factor P' von P bekannt, sowie

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1 : \chi_2 : \chi_3, \tag{13}$$

wo die χ ganze Functionen von λ_1', λ_2', so folgt aus

$$P'(\lambda_1', \lambda_2')=0, \quad \xi_1\chi_2 - \xi_2\chi_1 = 0 \tag{14}$$

durch Elimination von $\lambda_1' : \lambda_2'$ eine Resultante

$$S'(\xi_1, \xi_2) \equiv S_1^{\,1} \cdot S_2^{\,2} \cdot S_3^{\,3} \cdots S_\varkappa^{\,\varkappa}, \tag{15}$$

wo die linearen Factoren jedes S_h unter sich und von denen der übrigen $S_{h'}$ alle verschieden sind; und wo ferner die einzelnen Factoren

$S_1, S_2, S_3, \ldots$ von S' sich ohne Einführung von Irrationalitäten ergeben, indem man nur nacheinander die grössten gemeinsamen Divisoren

$$S^{(1)} \text{ von } S' \text{ und } \frac{\partial S'}{\partial \xi_1};$$

$$S^{(2)} \text{ von } S^{(1)} \text{ und } \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \xi_1}; \text{ etc.}$$

sucht, deren letzter $S_\varkappa$ wird; oder indem man sogleich den grössten gemeinsamen Divisor $S_\varkappa$ von S' und den $(\varkappa - 1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von S' sucht; hierauf $S_{\varkappa-1}$ aus $S_{\varkappa-1} S_\varkappa^2$; etc.

Dann wird

(16) $$S''(x_1, x_2) = S_1(x_1, x_2) \cdot S_2(x_1, x_2) \cdots S_\varkappa(x_1, x_2)$$

rationaler Factor von $S(x_1, x_2)$; ebenso jedes $S_h(x_1, x_2)$. Da hierzu nach dem Obigen auch $\frac{x_3}{x_1}$ als rationale Function von $\frac{x_2}{x_1}$ bekannt ist, so liefert endlich, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ mit den x durch $A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$ zusammenhing,

(17) $$S_h(x_1, x_2) = 0, \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$$

durch Elimination von $x_1 : x_2$ einen rationalen Factor

(18) $$R_h'(x_1, x_2)$$

von $R(x_1, x_2)$, entsprechend $S_h(\xi_1, \xi_2)$ oder einem Theile von $P'(\lambda_1', \lambda_2')$.

Eine kleine Vereinfachung würde noch dadurch erzielt, dass man den Punkt $(A_1 = A_2 = 0)$ ursprünglich mit $(x_1 = x_2 = 0)$ zusammenfallen liesse.

23.

Erste rationale Zerfällung der Resultante.

Wir betrachten nun die *rationale Zerlegung der Resultante* $D(\lambda_1, \lambda_2)$ (aus (4), Nr. 14) von

(19) $$f(x) = 0, \quad f_c(x) = 0, \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0.$$

Die erste Zerlegung ist die durch (6), Nr. 14, gegebene, welche den von den Grössen c abhängigen Theil D_c in rationaler Weise ausscheidet. Der Rest D_0 bezieht sich nur noch auf die mehrelementigen Punkte von

$$f(x) = 0;$$

und es sei

(20) $$D_0 = D_2^2 \cdot D_3^3 \cdot D_4^4 \cdots D_r^r,$$

wo die linearen Factoren jedes D_μ alle unter sich und von denen aller übrigen D_ν verschieden sind. Diese Zerlegung von D_0 in die Factoren $D_2^2, D_3^3, \ldots$ geschieht ebenfalls ohne Einführung von Irrationalitäten, wie in Nr. 22 bei S'.

Man betrachte hieraus D_μ^μ, wo D_μ von einem Grade μ_0 sei. Dieser Factor gehört dann zu μ_0 Punkten von $f(x) = 0$, deren jeder ein Schnittpunkt von μ-facher Multiplicität von $f = 0$, $f_c = 0$ ist.

Dieses D_μ zerlege man nun *nach den Graden der Vielfachheit* der μ_0 Punkte. Man betrachte nämlich auch der Reihe nach die Resultanten aus

$$f(x) = 0, \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0, \quad f_c^h = 0 \tag{21}$$
$$(\text{für } h = 2, 3, \ldots, (\varkappa - 1))$$

wo f_c^h die allgemeine h^{te} Polare von f, und wo

$$(\varkappa - 1)\,\varkappa \leqq \mu$$

zu nehmen ist, weil ein Punkt, in welchem alle h^{ten} (und nicht alle $(h+1)^{\text{ten}}$) Polaren verschwinden, ein $(h+1)$-elementiger Punkt, mit wenigstens $(h+1)h$-facher Multiplicität für $f = 0$, $f_c = 0$ ist. Der von den c unabhängige Factor dieser Resultante sei bezügl. mit $R^{(h+1)}$ bezeichnet (also $R^{(2)} \equiv D_0$).

Hierauf sind der Reihe nach die gemeinsamen Factoren

$$\Delta_\mu^{(\varkappa)};\ \Delta_\mu^{(\varkappa-1)};\ \cdots;\ \Delta_\mu^{(3)};\ \Delta_\mu^{(2)} \tag{22}$$

bezüglich von

$$D_\mu \text{ und } R^{(\varkappa)};\quad \frac{D_\mu}{\Delta_\mu^{(\varkappa)}} \text{ und } R^{(\varkappa-1)};\ \cdots;\ \frac{D_\mu}{\Delta_\mu^{(\varkappa)} \cdot \Delta_\mu^{(\varkappa-1)} \cdots \Delta_\mu^{(3)}} \text{ und } R^{(2)}$$

zu bilden. *Man hat dann die rationale Zerlegung*

$$D_\mu = \Delta_\mu^{(\varkappa)} \cdot \Delta_\mu^{(\varkappa-1)} \cdots \Delta_\mu^{(2)}; \tag{23}$$

und hierbei gehört $\Delta_\mu^{(i)}$ nur zu solchen von einander getrennten Punkten, welche genau i-elementige Punkte von $f(x) = 0$ sind.

Es giebt einen noch einfacheren Weg zu dieser Zerlegung von $D_\mu(\lambda_1, \lambda_2)$. Da $A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$, so verbinde man die beiden Curven

$$f(x) = 0, \quad D_\mu(-A_2, A_1) = 0, \tag{24}$$

indem man zunächst allgemeine lineare Functionen x_1', x_2', x_3' an Stelle der x_1, x_2, x_3 einführt und x_3' eliminirt. So ergebe sich als Resultante

$$L(x_1', x_2') \equiv L_1^1 \cdot L_2^2 \ldots L_\varkappa^\varkappa, \tag{25}$$

wo die linearen Factoren eines L_i unter sich und von denen der übrigen L_i alle verschieden sind. Dann gehört L_i gerade zu den i-elementigen Punkten von $f(x) = 0$, für welche $D_\mu = 0$ ist. Specialisirt man nun die Substitutionscoefficienten in den Ausdrücken der x' durch die x derart, dass $x_1' = -A_2$, $x_2' = A_1$ wird, so verschwindet der so aus $L(x_1', x_2')$ entstehende Ausdruck nicht identisch, weil $(A_1 = A_2 = 0)$ kein Punkt von $f(x) = 0$ ist; und die Ausdrücke

$$L_2, L_3, \cdots, L_\varkappa$$

gehen also bezüglich in

$$\Delta_\mu^{(2)},\ \Delta_\mu^{(3)},\ \cdots,\ \Delta_\mu^{(\varkappa)}$$

von (22) über.

Sei $\Delta_\mu^{(i)}$ vom Grade $\mu^{(i)}$, so hat man durch

$$\Delta_\mu^{(i)} = 0 \tag{26}$$

$\mu^{(i)}$ von einander getrennt liegende, i-elementige Punkte von $f(x) = 0$, welchen der Factor

$$(\Delta_\mu^{(i)})^\mu$$

von D_0 entspricht, von den übrigen mehrelementigen Punkten von $f(x) = 0$ rational abgesondert.

24.

Rationale Bestimmung des Doppelfactors der Resultante.

Von dem Factor $(\Delta_\mu^{(i)})^\mu$ sondert sich, nach Nr. 17, zunächst

$$(\Delta_\mu^{(i)})^{i(i-1)} \tag{27}$$

für den „Doppelfactor" von D ab. Für $\mu = i(i-1)$ ist die Zerlegung hiermit abgeschlossen; andernfalls geschieht die weitere Zerlegung durch eindeutige Transformation von f. Nach Nr. 6 werden die Coordinaten der entsprechenden $\mu^{(i)}$ Punkte von $f(x) = 0$ rationale Functionen von $\lambda_1 : \lambda_2$:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \psi(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_2 : \psi_3 \cdots \tag{28}$$

wo

$$\Delta_\mu^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{29}$$

und man kann daher nach Nr. 22 eine Transformation der dortigen Art, welche diese $\mu^{(i)}$ Punkte als einfache Fundamentalpunkte benutzt, in rationaler Weise ausführen. Durch diese Transformation gehe $f(x) = 0$ in $F(\xi) = 0$ über.

Für diese Curve $F(\xi) = 0$ stellt sich alsdann dieselbe Aufgabe, wie sie in Nr. 23 für $f(x) = 0$ behandelt worden ist. Nur genügt es hier, um die *Vielfachheit* der den $\mu^{(i)}$ Punkten entsprechenden Punkte, die allein in dem Doppelfactor von D benutzt wird, zu bestimmen, den zweiten einfacheren Weg von Nr. 23 einzuschlagen, ohne auch nur die Polare von $F(\xi)$ aufzustellen; denn diese Punkte sind ohnedies durch die Transformation bekannt.

Dies geschieht nach den letzten Betrachtungen der Nr. 22, indem man nur daselbst $\Delta_\mu^{(i)}$ an Stelle von R (9) zu setzen hat. Die dort aufgestellten Gleichungen (13), (14):

$$\begin{cases} P(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \\ \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_2(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_3(\lambda_1', \lambda_2'), \end{cases} \tag{30}$$

wo

$$A_1\lambda_1' + A_2\lambda_2' = 0, \tag{31}$$

liefern alle Punkte von $F(\xi)=0$, welche den $\mu^{(i)}$ Punkten von $f(x)=0$ durch die Transformation entsprechen, und zwar jeden einfach, da die Factoren von $P(\lambda_1', \lambda_2')$ alle von einander verschieden sind. Um die Vielfachheit dieser Punkte zu bestimmen, wird man daher nach Nr. 23 ((24) etc.) in die Gleichungen

$$F(\xi) = 0, \quad P(-A_2, A_1) = 0$$

allgemeine lineare Functionen ξ_1', ξ_2', ξ_3' an Stelle von ξ_1, ξ_2, ξ_3 einführen und ξ_3' eliminiren, wonach sich, wie dort,

$$L(\xi_1', \xi_2') \equiv L_1^1 \cdot L_2^2 \cdots L_x^x \tag{32}$$

ergebe. Dann liefert

$$L_j(\xi_1', \xi_2') = 0 \tag{33}$$

nur j-elementige Punkte; und L_j ergiebt, nach Nr. 23, durch Specialisirung einen Factor

$$P_j(\lambda_1', \lambda_2') \tag{34}$$

von $P(\lambda_1', \lambda_2')$.

Aus

$$P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \quad \xi_1\chi_2 - \xi_2\chi_1 = 0 \tag{35}$$

folgt hierauf eine Resultante

$$S_j(\xi_1, \xi_2) \equiv S_{1j}^1 \cdot S_{2j}^2 \cdot S_{3j}^3 \cdots; \tag{36}$$

dann liefert endlich (Nr. 22, (17), (18))

$$S_{hj}(x_1, x_2) = 0, \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0 \tag{37}$$

nach Einsetzen von $\frac{x_2}{x_1}$ und Elimination von $\frac{x_2}{x_1}$ einen rationalen Factor

$$\Delta_\mu^{(ij_h)}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{38}$$

von $\Delta_\mu^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2)$)

In diesen Ausdrücken drückt der Grad von $P(\lambda_1, \lambda_2)$, dem der Grad des Productes $L_1 \cdot L_2 \cdots L_x$ gleich ist, die Anzahl der den $\mu^{(i)}$ Punkten von $f(x) = 0$ überhaupt entsprechenden getrennten Punkte von $F(\xi) = 0$ aus. Der Grad von L_j, dem der von P_j und der von S_j gleich wird, stellt die Zahl der darunter befindlichen j-elementigen Punkte vor. Die Potenz h des Factors S_{hj}^h von S_j bedeutet, dass h verschiedenen dieser Punkte, welche durch einen linearen Factor von S_{hj} gegeben sind, ein und derselbe Punkt von $f(x) = 0$, oder vielmehr h diesem in verschiedenen Richtungen benachbart gelegene Punkte von $f(x) = 0$, entsprechen. Dem Grade von S_{hj} wird der von

$\Delta_\mu^{(ij_h)}$ gleich. Nach Nr. 17 sondert sich von dem Factor $(\Delta_\mu^{(i)})^\mu$ für den *Doppelfactor* von D, ausser dem am Anfang dieser Nr. bezeichneten $(\Delta_\mu^{(i)})^{i(i-1)}$ noch, von S_{hj}^h herrührend, in rationaler Weise ab:

$$(39) \qquad \left(\Delta_\mu^{(ij_h)}\right)^{h \cdot j(j-1)}.$$

Solches ist für alle h, dann für alle j, für alle i, endlich für alle μ auszuführen, wobei für j, i, μ nur die Zahlen $\geqq 2$ betrachtet zu werden brauchen.

Der weitere Gang der Zerlegung ist klar: Es werden die durch ((30), (35))

$$(40) \qquad P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_2 : \chi_3$$

gegebenen j-elementigen Punkte von $F(\xi) = 0$ als Fundamentalpunkte einer Transformation der Art Nr. 22 benutzt, und hierdurch, auf dem in dieser Nummer für $\Delta_\mu^{(i)}$ eingeschlagenen Wege, jetzt von $S_{hj}(\xi_1, \xi_2)$, (36), ein rationaler Factor abgesondert, und dementsprechend ein solcher auch von $\Delta_\mu^{(ij_h)}(\lambda_1, \lambda_2)$, (38), wobei sich im Laufe der Transformation wieder die Potenz, in welcher dieser Factor in den Doppelfactor von D eingeht, von selbst ergiebt.

Eine kleine Modification dieses Verfahrens besteht darin, dass man gleichzeitig *mehrere*, rational von einander gesonderte, Punktgruppen der zu transformirenden Curve, oder auch *alle* mehrelementigen Punkte derselben, als einfache Fundamentalpunkte einer und derselben eindeutigen Transformation der Art Nr. 22 nimmt.

25.

Rationale Bestimmung der Geschlechtszahl.

Aus dem Grade $\Sigma' M$ des Doppelfactors von D und der Zahl m bestimmt sich nach Nr. 17, (23) oder Nr. 19, (2) *die Zahl* p durch die Formel

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\Sigma' M.$$

Da es sich hierbei aber nur um den *Grad*, nicht um die wirkliche *Aufstellung* des Doppelfactors von D, handelt, so genügt zur Bestimmung der Zahl p schon ein Theil der in Nr. 23 und 24 geforderten Operationen.

Hiernach ergeben zum Grade $\Sigma' M$ des Doppelfactors die $\mu^{(i)}$ durch $\Delta_\mu^{(i)} = 0$, (26) Nr. 23 gegebenen, i-elementigen Punkte von $f(x) = 0$ zunächst den Beitrag

$$\mu^{(i)} \cdot i(i-1);$$

sodann ergeben, wenn L_j oder P_j (Nr. 24, (33), (34)) vom Grade $i^{(j)}$

wird, die den $\mu^{(i)}$ Punkten auf $F(\xi) = 0$ entsprechenden, bez. durch $L_j(\xi_1', \xi_2') = 0$ oder $P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0$ gegebenen j-elementigen Punkte $(j = 2, 3, \ldots, \varkappa)$ zu $\Sigma' M$ den weiteren Beitrag:

$$\sum_{j=2}^{j=\varkappa} i^{(j)} \cdot j(j-1).$$

Zur Aufstellung dieser Zahl hat man also nur bis zur Bestimmung der mehrelementigen Punkte von $F(\xi) = 0$ zu gehen, d. h. zu den Gleichungen (30), (35), Nr. 24:

$$(40) \qquad P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_2 : \chi_3,$$

und gerade so weit nach Nr. 24 zur weiteren Transformation von $F(\xi) = 0$; daher fällt hier die weitere Beziehung auf $f(x) = 0$ in Nr. 24, (36)—(38), weg.

Es folgt mittels Transformation von $F(\xi) = 0$ die Bestimmung des Beitrags zu $\Sigma' M$, welche von den, den $i^{(j)}$ j-elementigen Punkten entsprechenden Punkten der transformirten Curve herrührt; etc.

26.

Rationale Bestimmung der adjungirten Curven.

Auch für die *rationale Aufstellung der Gleichungen der zu* $f(x) = 0$ *adjungirten Curven* gilt die in Nr. 25 für die Zahl p gemachte Bemerkung: man hat in Nr. 24 wiederum nur bis zu den Gleichungen (40) Nr. 25, zu gehen.

Die hierzu auszuführenden Operationen ergeben sich aus dem Satze der Nr. 20. Man ertheilt den zu bestimmenden Curven n^{ter} Ordnung, $\varphi(x) = 0$, zunächst unbestimmte Coefficienten und schreibt den Curven alsdann vor, die durch ((28), (29), Nr. 24)

$$\Delta_\mu^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_2 : \psi_3$$

gegebene Gruppe von $\mu^{(i)}$ i-elementigen Punkten von $f(x) = 0$ zu (gewöhnlichen) $(i-1)$-fachen Punkten zu haben (Nr. 21); die diesen Bedingungen genügenden Curven $\varphi(x) = 0$ werden hierauf durch die Transformation von Nr. 24 in Curven $\Phi(\xi) = 0$ übergeführt, und den $\Phi(\xi) = 0$ wird weiter vorgeschrieben, die durch ((30), (35), Nr. 24)

$$P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_2 : \chi_3$$
$$(j = 2, 3, \ldots, \varkappa)$$

gegebenen Punkte von $F(x) = 0$ zu vielfachen, die $i^{(j)}$ j-elementigen bez. zu $(j-1)$-fachen, Punkten zu haben; und nach Erfüllung dieser Bedingungen ist Analoges weiter bei den weiteren Transformationen von $F(\xi) = 0$, $\Phi(\xi) = 0$ auszuführen. Die sämmtlichen Transformationen in ihren Umkehrungen angewandt, liefern dann die gesuchten

$\varphi(x)$, soweit es den Factor $\Delta_\mu^{(i)}$ von D betrifft; wonach solches noch für *alle* i und μ zu geschehen hat.

Die hier für die adjungirten Curven $\varphi(x) = 0$ aufgestellten Bedingungen liefern im Ganzen

$$\frac{1}{2}\,\Sigma' M \equiv \frac{1}{2}\,\Sigma_j h_j(h_j - 1)$$

lineare homogene Gleichungen für die Coefficienten von $\varphi(x)$, wo die Zeichen dieselben sind, welche in die p-Formel, Nr. 17, (23) und Nr. 19, (2) eingehen. In wie weit diese linearen Gleichungen von einander unabhängig sind, und wie die Behandlung der Aufgabe dieser Nummer überhaupt bedeutend modificirt und vereinfacht werden kann, darüber vergl. den folgenden Abschnitt, Nr. 30 und 31.

VI.

Bedeutung der adjungirten Curven.

27.

Der Restsatz für nicht-singuläre Curven.

Sei zunächst eine Curve μ^{ter} Ordnung mit nur *nichtsingulären* mehrfachen Punkten vorgelegt:

$$F(\xi) = 0.$$

$\Psi(\xi) = 0$ sei irgend eine Schaar von Curven ν^{ter} Ordnung, welche, ausser gemeinsamen festen Punkten, die Curve $F(\xi) = 0$ in einer Schaar Σ von Gruppen Γ von je r Punkten treffen mögen; $\Psi_0(\xi) = 0$ eine specielle Curve dieser Schaar, welche F in der speciellen Gruppe Γ_0 aus Γ treffe.

Bestimmt man nun eine beliebige durch die Gruppe Γ_0 gehende und zu F adjungirte Curve ν'^{ter} Ordnung, $\Psi_0'(\xi) = 0$, so ist der Restsatz in der Gleichung enthalten (vgl. Math. Ann. VII, p. 271)

$$\Psi(\xi) \cdot \Psi_0'(\xi) - \Psi_0(\xi) \cdot \Psi'(\xi) \equiv \mathsf{A} \cdot F(\xi). \tag{1}$$

in der A und $\Psi'(\xi)$ ganze Functionen der ξ bedeuten, und aus der sich $\Psi'(\xi) = 0$ als eine Schaar von zu F adjungirten Curven ν'^{ter} Ordnung ergiebt, welche ausser gemeinsamen festen Punkten, die Curve $F(\xi) = 0$ in *derselben* Schaar Σ von Punktgruppen treffen, wie

$$\Psi(\xi) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt zugleich, dass die auf $F(\xi) = 0$ existirende lineare *Gesammtschaar* von Gruppen von je r Punkten, unter denen Γ_0 als eine Gruppe enthalten ist, immer durch eine Schaar $\Psi'(\xi) = 0$ von Curven ν'^{ter} Ordnung aus $F(\xi) = 0$ ausgeschnitten werden kann, welche keinen anderen Bedingungen unterliegen, als *zu F adjungirt* zu

sein und durch den Restschnitt von $F(\xi) = 0$, $\Psi_0'(\xi) = 0$ (ausser Γ_0 und den mehrfachen Punkten von F) hindurchzugehen.

Wenn ferner die Schaar $\Psi(\xi) = 0$ einen j-fachen Punkt R von $F(\xi) = 0$ überhaupt nicht zum festen Punkte hatte, so brauchen auch $\Psi_0(\xi) = 0$ und $\Psi_0'(\xi) = 0$ durch diesen Punkt nicht gelegt zu werden; dann ergiebt die Gleichung (1) für $\Psi'(\xi) = 0$ aber keinerlei auf den Punkt R bezügliche Bedingung; und die Gleichung sagt aus, dass diejenige lineare *Theilschaar* von Gruppen von je r Punkten auf $F(\xi) = 0$, welche die Gruppe Γ_0 enthält und welche überhaupt von solchen Curven ausgeschnitten werden kann, die den Punkt R nicht zum festen Punkt haben, immer vollständig durch eine Schaar von Curven einer Ordnung ν', $\Psi'(\xi) = 0$, aus $F(\xi) = 0$ ausgeschnitten wird, welche nur den Bedingungen unterliegen: zu F in allen Punkten, ausser R, adjungirt zu sein und durch den Restschnitt von $F(\xi) = 0$, $\Psi_0'(\xi) = 0$ zu gehen.

28.

Der Restsatz für singuläre Curven.

Sei nun zweitens eine Curve m^{ter} Ordnung

$$f(x) = 0,$$

mit beliebigen Singularitäten vorgelegt. Es soll gezeigt werden, dass der Satz für die *Gesammtschaaren* von Nr. 27 auch hier gilt, indem man zu $f(x) = 0$ adjungirte Curven benutzt.

Wir betrachten hier vorerst eine Schaar von Gruppen H auf $f(x) = 0$, ausgeschnitten durch Curven n^{ter} Ordnung $\chi(x) = 0$, die einen i-elementigen Punkt P von f zum (gewöhnlichen) h-fachen Punkt haben, durch die übrigen mehrelementigen Punkte $R_1, R_2, \ldots$ nicht gehen und eine Anzahl fester einfacher Punkte von f gemein haben; eine specielle der Curven, $\chi_0 = 0$, treffe f in H_0. Legt man nun durch H_0 eine Curve n'^{ter} Ordnung, $\chi_0' = 0$, welche P zum $(i-1)$-fachen Punkt hat und weiter f in einer Gruppe H_0' von einfachen Punkten trifft, so hat man auch hier eine Gleichung, analog (1), Nr. 22,

$$\chi \cdot \chi_0' - \chi_0 \cdot \chi' \equiv A \cdot f, \tag{2}$$

wo χ' und A ganze Functionen der x werden; denn die hierzu hinreichende Bedingung (vgl. meine Note Math. Ann. VI, p. 351), dass $\chi\chi_0'$ den Punkt P, der i-elementiger Punkt von f, h-facher Punkt von χ_0 und Schnittpunkt von nur hi-facher Multiplicität ist, zum $(h+i-1)$-fachen Punkt habe, ist erfüllt. $\chi'(x) = 0$ wird dann eine durch H_0' gehende Schaar von Curven n'^{ter} Ordnung, mit $(i-1)$-fachem Punkte in P, eine Schaar, die f ebenfalls in den Gruppen H trifft. Und es folgt, dass die Curven n'^{ter} Ordnung, welche durch H_0' gehen

und P zum $(i-1)$-fachen Punkte haben, diejenige *allgemeinste* auf f existirende lineare Schaar von Gruppen ausschneiden, in der H_0 als eine Gruppe enthalten ist, und die von Curvenschaaren, welche P zu irgend einem vielfachen Punkte, $R_1, R_2, \ldots$ gar nicht zu festen Punkten haben, überhaupt ausgeschnitten werden kann. —

Sei jetzt die lineare Gesammtheit von Gruppen G auf $f(x)=0$, der eine Gruppe G_0 angehört, zu betrachten. Wir legen eine Curve χ_0' n'^{ter} Ordnung durch G_0, welche zugleich zu f adjungirt sei; dieselbe treffe f weiter in einer einfachen Gruppe H_0'. $\chi'(x)=0$ sei die Schaar *aller* Curven n'^{ter} Ordnung, welche durch H_0' gehen und P zum $(i-1)$-fachen Punkte haben.

Auf $f(x)=0$ und die eben genannten Curvenschaaren wenden wir eine eindeutige Transformation an. Da man durch fortgesetzte Transformationen der Art von Nr. 22 die Curve $f(x)=0$ in eine Curve ohne singuläre mehrfache Punkte verwandeln kann, für welche dann die Restsätze von Nr. 27 gelten, so genügt es, zu zeigen, dass bei einer Transformation mit nur *einem* mehrelementigen Punkte als Fundamentalpunkt die Restsätze für die zu transformirende Curve gelten, wenn sie für die transformirte Curve vorausgesetzt werden. Wir machen daher eine, etwa quadratische Ebenen-, Transformation, welche von den Punkten von $f(x)=0$ nur P zum einfachen Fundamentalpunkte habe, auf $f(x)=0$. Die transformirte Curve, für welche die Restsätze gelten sollen, sei $F(\xi)=0$. Diese Curve erhält in den Fundamentalpunkten $Q_1, Q_2, \ldots$ der ξ-Ebene gewöhnliche mehrfache Punkte, hat ferner eine Reihe von mehrelementigen Punkten $P_1, P_2, \ldots$, den verschiedenen Richtungen von $f(x)=0$ am Punkt P entsprechend und eine Reihe von mehrelementigen Punkten $R_1', R_2', \ldots$ einzeln bez. den Punkten $R_1, R_2, \ldots$ von $f=0$ entsprechend und von derselben Singularität, wie diese.

Bei dieser Transformation geht die Schaar $\chi'(x)=0$ über in eine Schaar $X(x)=0$ von Curven ν^{ter} Ordnung, welche die Punkte $Q_1, Q_2, \ldots$ zu festen mehrfachen Punkten hat und durch die H_0' entsprechenden Punkte von F geht. Nach Nr. 27 lässt sich diese Schaar in Bezug auf den Schnitt mit $F(\xi)=0$ ersetzen durch eine Schaar von Curven ν'^{ter} Ordnung, $X'(\xi)=0$, welche 1) sich in den Punkten $Q_1, Q_2, \ldots$ adjungirt verhalten, 2) durch eine feste Gruppe K von einfachen Punkten von $F'(\xi)=0$ gehen.

Aber diese Schaar $X'(\xi)=0$ genügt auch keiner weiteren Bedingung als 1) und 2).. Denn die *ganze* Schaar der Curven ν'^{ter} Ordnung, welche 1) und 2) genügen, transformirt sich in Curven, welche P zu einem mehrfachen Punkte und eine Anzahl einfacher Punkte von $f(x)=0$ zu festen Punkten haben; diese Curven schneiden dann $f(x)=0$ in Gruppen, zu denen jedenfalls die von den $\chi'(x)=0$ aus-

geschnittenen Gruppen gehören. Dann aber treffen, nach den Bemerkungen zur obigen Gleichung (2), gerade diese $\chi'(x) = 0$ die $f(x)=0$ schon in den allgemeinsten Gruppen, also auch die $X(\xi)=0$ und die $X'(\xi) = 0$ die $F(\xi) = 0$ in den allgemeinsten Gruppen, welche aus den Bedingungen 1), 2) sich ergeben.

Schreibt man nun den $\chi'(x) = 0$ die weitere Bedingung vor, in *allen* mehrelementigen Punkten P, R_1, R_2, ... von $f(x) = 0$ zu f adjungirt zu sein, so geschieht dies nach Nr. 20 dadurch, dass die $X(\xi) = 0$ die weitere Bedingung erfüllen, in den Punkten $P_1, P_2, \ldots$ und $R_1', R_2', \ldots$ zu F adjungirt zu sein. Dieselbe Bedingung stellt sich dann, nach der Annahme über $F(\xi)=0$, auch für die $X'(\xi)=0$; und da diese Curven hierauf die allgemeinste Schaar von zu F adjungirten, durch eine feste Gruppe K gehenden Curven ν'^{ter} Ordnung bilden, so schneiden sie, wieder nach der Voraussetzung, $F(\xi) = 0$ in einer Schaar von Punktgruppen, welche in keiner allgemeineren Schaar als Theilschaar mehr enthalten ist. Dasselbe tritt also auch für die auf $f(x) = 0$ entsprechende Schaar von Punktgruppen ein; d. h. *die zu f adjungirten, durch H_0' gehenden Curven n'^{ter} Ordnung schneiden die oben genannte Schaar G aus $f(x) = 0$ aus.*

So gilt die Gleichung (2), wenn dabei unter $\chi(x) = 0$ eine ganz beliebige Curvenschaar, unter $\chi'(x) = 0$ eine Schaar von zu f adjungirten Curven verstanden wird.

29.

Die weitere Theorie der algebraischen Functionen.

Mit dem Restsatze, dessen Ableitung von den Darstellungen in Nr. 21—26 natürlich unabhängig, ist — in eingehenderer Weise als im § 7 der Arbeit von Herrn Brill und mir: „über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie", Mathem. Ann. VII — auch für die beliebig singuläre Curve $f(x) = 0$ die einzige Grundlage gegeben, aus welcher in jener Arbeit §§ 2—6 zunächst für nicht singuläre Curven die Functionensätze entwickelt werden. Diese Entwicklungen bleiben, wie dort schon gesagt, auch für die singuläre Curve $f(x) = 0$ und ihre adjungirten Curven wortgetreu bestehen.

Insbesondere leitet man also jetzt für die *irreducible* Curve m^{ter} Ordnung, $f(x) = 0$, deren Geschlecht p durch die Formel Nr. 17 oder 19 bestimmt ist, die Sätze her:

dass jede lineare Schaar von Gruppen von je Q Punkten auf $f(x) = 0$, deren Mannigfaltigkeit $q > Q - p$ ist, von zu f adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, — den sog. Curven φ — ausgeschnitten werden kann; dass es von diesen Curven φ überhaupt genau ∞^{p-1} giebt, von den zu f adjungirten Curven $(m - 3 + \alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung aber, für $\alpha > 0$, vermöge $f(x) = 0$ genau $\infty^{p+m\alpha-2}$.

Hieran schliessen sich für die irreducible Curve $f(x) = 0$ der Riemann-Roch'sche Satz über die genauere Bestimmung der Constantenzahl der von Curven φ aus f ausgeschnittenen Schaaren von Punktgruppen; ferner der Satz, dass diese Schaaren bei eindeutiger Transformation von $f(x) = 0$ in eine Curve $F(\xi) = 0$ in Schaaren von gleicher Mannichfaltigkeit übergehen, welche aus $F(\xi) = 0$ von zu F adjungirten Curven φ ausgeschnitten werden; also dass die Zahl p hierbei erhalten bleibt.

Die in diesem Gedankengange sich ergebenden Definitionen für die Zahl p sind die folgenden:

1) für eine auch reducible, nur keine Doppelcurve enthaltende, Curve $f(x) = 0$: die numerische Definition aus Nr. 17 oder 19; rational nach Nr. 25 zu finden. Damit identisch ist die Definition, dass die zu f adjungirten Curven $(m - 3 + \alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung die Curve $f(x) = 0$ in Gruppen von je

$$2p - 2 + m\alpha$$

Punkten schneiden;

2) für eine irreducible Curve $f(x) = 0$:

a) aus der Mannichfaltigkeit

$$q = Q - p$$

einer Schaar von je Q Punkten, unter welchen *eine* Gruppe aus ganz willkürlich (nicht speciell) gewählten Q Punkten besteht; wenn $q > 0$ wird;

b) aus der Zahl p der linear von einander unabhängigen zu f adjungirten Curven $(m - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, der Curven φ.

30.

Modificirte Bestimmung der Verhältnisse der Curven φ.

Für die rationalen Darstellungen der Nr. 21—26 ergeben diese Sätze von Nr. 29 noch weitere Resultate.

Nach diesen Sätzen stellt die Forderung für die Curven $(m-3+\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung, in allen mehrelementigen Punkten von $f(x) = 0$ zu f adjungirt sein, d. h. (Nr. 19) alle h_j-fachen Punkte von $f(x) = 0$ zu $(h_j - 1)$-fachen Punkten zu haben, für $\alpha \geqq 0$ und eine irreducible Curve $f(x) = 0$ genau

$$\sum \tfrac{1}{2} h_j(h_j - 1)$$

lineare von einander unabhängige Bedingungen für die Coefficienten der Curvenschaar dar. *Die in Nr.* 26 *genannten* $\sum \frac{1}{2} h_j(h_j - 1)$ *linearen Gleichungen sind also, sobald nur* $f(x) = 0$ *irreducibel und die dortige Zahl* $n \geqq m - 3$ *ist, von einander unabhängig.*

Die in Nr. 26 behandelte rationale Aufstellung der zu f adjungirten Curven kann aber für irreducible Curven $f(x) = 0$ nach Nr. 29 überhaupt noch bedeutend modificirt werden. Denn zunächst gehen bei einer eindeutigen Transformation von $f(x) = 0$ in eine Curve μ^{ter} Ordnung, $F(\xi) = 0$, die zu f adjungirten Curven von der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, $\varphi(x) = 0$, in die Schaar der zu F adjungirten Curven $(\mu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\Phi(\xi) = 0$, über; vermöge $f(x) = 0$ und $F(\xi) = 0$. Wenn es sich daher nur um die Schnittgruppen von $f(x) = 0$ mit der Curvenschaar $\varphi(x) = 0$ handelt, so genügt es, durch successive Transformationen $f(x) = 0$ in eine Curve ohne Singularitäten, $F(\xi) = 0$, überzuführen, die zu F gehörige Curvenschaar φ, $\Phi(\xi) = 0$, aufzustellen und vermöge der Transformationen aus $\Phi(\xi) = 0$ rückwärts eine Schaar $\varphi'(x) = 0$ abzuleiten. Diese Schaar ersetzt dann vermöge $f(x) = 0$ die Schaar $\varphi(x) = 0$ vollständig.

Die hierzu auszuführenden Operationen beschränken sich auf Folgendes:

Man zerlegt, wie in Nr. 23, den Factor D_0 der Resultante $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in

$$D_0 = D_2^2 D_3^3 \cdots D_r^r,$$

bestimmt, wie dort, die Coordinaten der zu

$$D_2 D_3 \cdots D_r = 0$$

gehörigen mehrelementigen Punkte von $f(x) = 0$ und benutzt diese sämmtlichen Punkte als Fundamentalpunkte einer ersten Transformation von $f(x) = 0$ in eine Curve $f^{(1)}(x^{(1)}) = 0$, nach Art von Nr. 22. Die Unterscheidung dieser Punkte nach dem Grade der Vielfachheit ist dabei unnöthig.

Sodann bestimmt man nach Nr. 22 die Coordinaten der allen vielelementigen Punkten von $f(x) = 0$ entsprechenden Punkte von $f^{(1)}x^{(1)} = 0$, durch analoge Gleichungen, wie bei $f(x) = 0$. Diese sämmtlichen Punkte, soweit sie höhere als 1-elementige sind, werden weiter als Fundamentalpunkte einer Transformation, nach Art von Nr. 22, von $f^{(1)}(x^{(1)}) = 0$ auf eine Gleichung $f^{(2)}(x^{(2)}) = 0$ benutzt; etc. Man gelangt so endlich zu einer Curve $F(\xi) = 0$, welche keine, den mehrelementigen Punkten von $f(x) = 0$ entsprechende, mehrelementige Punkte besitzt, sondern nur noch gewöhnliche mehrfache Punkte in den Fundamentalpunkten der ξ-Ebene.

Für diese Curve $F(\xi) = 0$ ergiebt sich die Schaar $\Phi(\xi) = 0$ alsdann lediglich nach Nr. 23 und 21, ohne dass man noch weitere Transformationen, wie in Nr. 24, anzuwenden hätte. Aus den $\Phi(\xi) = 0$ folgen endlich die $\varphi'(x) = 0$, wie oben gesagt.

Was nun weiter die zu f adjungirten Curven von *höherer* als $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung betrifft, so habe ich in meinem Aufsatze „Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen", Mathem. Ann.

Bd. XVII, gezeigt, dass sich dieselben für $f(x) = 0$ durch ganze Functionen der $\varphi(x)$, also auch der $\varphi'(x)$ ersetzen lassen. Sei nämlich eine Schaar von Gruppen G auf $f(x) = 0$ gegeben, G_0 eine specielle dieser Gruppen; wenn dann $\Phi_0^{(\mu)}(x) = 0$ wo $\Phi_0^{(\mu)}(x)$ eine ganze homogene Function μ^{ter} Ordnung der $\varphi'(x)$ vorstellt, irgend eine Curve ist, welche durch G_0 hindurchgeht, so wird die Schaar der G aus $f(x) = 0$ durch eine Schaar von Curven $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ausgeschnitten, wo auch $\Phi^{(\mu)}(x)$ eine ganze homogene Function der $\varphi'(x)$ ist und wo alle $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ durch den Restschnitt von $f(x) = 0$ mit $\Phi_0^{(\mu)}(x) = 0$, ausser G_0 und den mehrelementigen Punkten von $f(x) = 0$, hindurchgehen. Diese Schaaren sind also mit den $\varphi'(x) = 0$ bekannt. In der rationalen Aufstellung von

$$\frac{\Phi^{(\mu)}(x)}{\Phi_0^{(\mu)}(x)}$$

hat man die einfachste Lösung der Aufgabe, eine rationale Function der x zu bestimmen, welche nur in der Gruppe G_0 von $f(x) = 0$, oder in einem Theil dieser Gruppe, unendlich in der ersten Ordnung wird.

31.

Modificirte Bestimmung der Curven φ.

Der in Nr. 30 angegebene Weg liefert zwar alle Schaaren von Punktgruppen, welche aus der irreduciblen Curve $f(x) = 0$ von den zu f adjungirten Curven ausgeschnitten werden können; zunächst aber nicht die Gleichungen dieser Curven selbst, wie es bei dem Verfahren von Nr. 26 der Fall war. Denn die Anwendung des diesem Zwecke dienenden Restsatzes verlangte noch die Kenntniss wenigstens *einer* zu f adjungirten Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varphi_0(x) = 0$, welche $f(x) = 0$ in derselben Gruppe trifft, wie eine specielle Curve $\varphi_0'(x) = 0$ aus der Schaar $\varphi'(x) = 0$.

Ich will aber jetzt zeigen, dass die Curven, in welche sich die $\Phi(\xi) = 0$ in Nr. 30 transformiren, sich von den Curven $\varphi(x) = 0$ in der That nur um *einen angebbaren Factor* unterscheiden.

Wenn nämlich unsere Transformation gegeben ist durch

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_h = \Theta_h(x_1, x_2, x_3) & , \quad (h = 1, 2, 3), \\ \Delta(x) = \sum \pm \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial x_2} \dfrac{\partial \Theta_3}{\partial x_3}, \end{cases}$$

$$(4) \qquad F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv A(x) \cdot f(x),$$

wo die $\Theta_h(x)$ von der Ordnung s seien, so soll bewiesen werden, dass

$$(5) \qquad \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \frac{s \cdot A(x)}{\Delta(x)} \cdot \varphi(x)$$

wird; und zwar, dass diese Identität bei unseren speciellen Transformationen, wie den von Nr. 22, welche aus gewöhnlichen quadratischen Ebenentransformationen zusammengesetzt sind, ohne Hülfe von $f(x)=0$ besteht (welch letztere Eigenschaft bei allgemeiner eindeutiger Transformation nicht mehr stattfinden würde).

Es ist nur nöthig, die Gleichung (5) für die quadratische Transformation und dann für die Zusammensetzung mehrerer solcher zu beweisen.

Die quadratische Transformation, mit drei getrennten Fundamentalpunkten P_1, P_2, P_3 für die ξ-Ebene, Q_1, Q_2, Q_3 für die x-Ebene (wo $\xi_2 = \xi_3 = 0$ für P_1, etc.), sei

$$\xi_1 = x_2 x_3, \quad \xi_2 = x_3 x_1, \quad \xi_3 = x_1 x_2,$$
$$\Delta(x) = 2 x_1 x_2 x_3.$$

Die Curve μ^{ter} Ordnung, $F(\xi) = 0$, habe die Punkte P_1, P_2, P_3 bez. zu i_1-, i_2-, i_3-fachen Punkten; dann wird

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \cdot f(x),$$

also

$$A(x) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3},$$

und die Curve $f(x) = 0$ wird von der Ordnung $m = 2\mu - i_1 - i_2 - i_3$, mit $(\mu - i_2 - i_3)$-fachem Punkte in Q_1, etc.

Ferner wird, wenn alle Zahlen i_1, i_2, i_3 grösser als 0 sind, für die zu F in den Punkten P_1, P_2, P_3 adjungirte Curve $(\mu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\Phi(\xi) = 0$:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} x_3^{i_3-1} \cdot \varphi'(x) = \frac{2A(x)}{\Delta(x)} \cdot \varphi'(x),$$

wo $\varphi'(x) = 0$ eine Schaar von Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, mit $(\mu - i_2 - i_3 - 1)$-fachem Punkte in Q_1 etc., also in Q_1, Q_2, Q_3 zu f adjungirt. Schreibt man dann den $\Phi(\xi) = 0$ weiter vor, auch in den übrigen mehrfachen Punkten von $F(\xi) = 0$, ausser den Fundamentalpunkten P_1, P_2, P_3, zu F adjungirt zu sein, so tritt dasselbe auch für die $\varphi'(x) = 0$ in Bezug auf $f(x) = 0$ ein, auch wenn die mehrfachen Punkte von $F(x) = 0$ einem der Fundamentalpunkte benachbart liegen (Nr. 20); die Schaar $\varphi'(x)$ wird daher dann gerade zur gesuchten Schaar $\varphi(x)$.

Ist

$$i_3 = 0, \quad i_1 > 0, \quad i_2 > 0,$$

so wird

$$A(x) = x_1^{i_1} x_2^{i_2},$$
$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-2} \cdot \varphi'(x) = \frac{2A(x)}{\Delta x} \cdot x_3 \varphi'(x),$$

und $x_3\varphi'(x)$ wird in der That zur Schaar $\varphi(x)$; und analog für $i_2 = i_3 = 0$.

Die Gleichung (5) gilt daher für die quadratische Transformation. Seien jetzt zwei successive Transformationen betrachtet, für welche die Gleichung (5) Gültigkeit habe:

$$(6)\quad \begin{cases} y_k = \psi_k(x), \quad (k = 1, 2, 3;\ s_1 = \text{Ordnung der } \psi), \\ \Delta_1(x) = \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}, \\ f_1(y) = f_1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = A_1(x) \cdot f(x), \\ \varphi_1(y) = \frac{s_1 A_1(x)}{\Delta_1(x)} \cdot \varphi(x), \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} z_h = \chi_h(y), \quad (h = 1, 2, 3;\ s_2 = \text{Ordnung der } \chi) \\ \Delta_2(y) = \sum \pm \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \frac{\partial \chi_3}{\partial y_3}, \\ F(z) = F(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = A_2(y) \cdot f_1(y), \\ \Phi(z) = \frac{s_2 A_2(y)}{\Delta_2(y)} \cdot \varphi_1(y). \end{cases}$$

Dann folgt zunächst aus (6) und (7):

$$(8)\quad \begin{cases} z_h = \chi_h(\psi_1, \psi_2, \psi_3), \\ \sum \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} = \Delta_2(\psi(x)) \cdot \Delta_1(x), \\ F(z) = A_2(\psi(x)) \cdot A_1(x) \cdot f(x), \\ \Phi(z) = \frac{s_1 s_2 A_2(\psi(x)) \cdot A_1(x)}{\Delta_2(\psi(x)) \cdot \Delta_1(x)} \cdot \varphi(x). \end{cases}$$

Beim Zusammensetzen der Transformationen (6), (7) wird sich aber im Allgemeinen ein den $\chi_h(\psi(x))$ gemeinsamer Factor $C(x)$, von einem Grade r, herausheben, so dass die resultirende Transformation wird:

$$(9)\quad \begin{cases} \xi_h = \frac{z_h}{C(x)} = \Theta_h(x), \quad (h = 1, 2, 3;\ s = s_1 s_2 - r = \text{Ordnung der } \Theta), \\ \Delta(x) = \sum \pm \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Die transformirte Curve ist $F(\xi) = 0$, wo F dasselbe Zeichen ist, wie in (8); also:

$$(10)\quad F(\xi) = \frac{1}{C^\mu(x)} F(z) = \frac{A_2(\psi(x)) \cdot A_1(x)}{C^\mu(x)} \cdot f(x) = A(x) \cdot f(x),$$

$$(11)\quad \Phi(\xi) = \frac{1}{C^{\mu-3}(x)}\,\Phi(\varrho) = \frac{s_1 s_2 A_2(\psi(x))\cdot A_1(x)}{C^{\mu-3}\cdot\Delta_2(\psi(x))\cdot\Delta_1(x)}\cdot\varphi(x)$$
$$= \frac{(r+s)\cdot A(x)\cdot C^3(x)}{\Delta_2(\psi(x))\cdot\Delta_1(x)}\cdot\varphi(x).$$

Aber man hat allgemein, wenn C eine homogene Function r^{ter} Ordnung, die Θ_k solche von der s^{ten} Ordnung sind:

$$\sum\pm\frac{\partial(C\Theta_1)}{\partial x_1}\frac{\partial(C\Theta_2)}{\partial x_2}\frac{\partial(C\Theta_3)}{\partial x_3} = \frac{r+s}{s}C^3\cdot\sum\pm\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Theta_2}{\partial x^{\text{ten}}}\frac{\partial\Theta_3}{\partial x_3};$$

also hier aus (11):

$$\Phi(\xi) = \frac{s\cdot A(x)}{\Delta(x)}\cdot\varphi(x),$$

was die zu beweisende Gleichung (5) ist.

Sonach erhält man nicht nur nach Nr. 26, sondern auch durch diese Gleichung nach Nr. 30 die zu f adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varphi(x) = 0$. Zugleich ist durch diese Gleichung (5) der Satz der Nr. 28 wenigstens für die zu f adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von Neuem bewiesen.

32.

Die Differentiale erster Gattung.

Für eine nicht-singuläre Curve $F(\xi) = 0$, μ^{ter} Ordnung, sind die *Differentiale erster Gattung* bekanntlich die (von den γ unabhängigen) Ausdrücke:

$$(12)\quad du = \frac{\Phi(\xi)\cdot\Sigma\pm\gamma_1\xi_2 d\xi_3}{\Sigma_k\gamma_k\dfrac{\partial F(\xi)}{\partial\xi_k}},$$

wo die $\Phi(\xi)$, $= 0$ gesetzt, die Gleichungen der zu f adjungirten Curven $(\mu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellen.

Auch für eine, beliebig singuläre, Curve $f(x) = 0$, welche der Curve $F(\xi) = 0$ in gegenseitig rationaler Transformation eindeutig zugeordnet ist, stellen die du aus (12) die Differentiale erster Gattung dar; denn die u sind auch Integrale über rationale Functionen der x, für $f(x) = 0$, und sind für alle Werthsysteme von $f(x) = 0$ endlich.

Durch die Transformationsformeln von Nr. 31 erhält man für diese Differentiale den (von den c unabhängigen) Ausdruck:

$$du = \frac{\Phi(\Theta(x))\cdot\Delta(x)\cdot\Sigma\pm c_1 x_2 dx_3}{s\cdot A(x)\cdot\Sigma_k c_k\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}};$$

und hieraus nach Nr. 31, wenn, wie wir annehmen können, $F(\xi)=0$ aus $f(x)=0$ durch eine unserer speciellen Transformationen abgeleitet war:

$$du = \frac{\varphi(x)\cdot\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\Sigma_k c_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}}. \tag{13}$$

D. h. *auch für eine beliebig singuläre irreducible Curve* $f(x)=0$, *von der* m^{ten} *Ordnung, stellen die im Zähler der zugehörigen Differentiale erster Gattung* (13) *auftretenden Functionen* $\varphi(x)$, $=0$ *gesetzt, die zu* f *adjungirten Curven* $(m-3)^{ter}$ *Ordnung,* $\varphi(x)=0$, *vor.*

Die rationale Aufstellung dieser Differentiale aus der gegebenen Gleichung, $f(x)=0$, erfolgt daher nach Nr. 26 oder nach Nr. 30 und 31.

Erlangen, 28. October 1883.

Theorie der rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme.

Von

A. Voss in Dresden.

In einer früheren Arbeit*) bezeichnete ich als Punkt-Ebenen oder P-E-System das Gebilde, bei welchem überhaupt jedem Punkte des Raumes eine bestimmte durch ihn gehende Ebene, also auch umgekehrt jeder Ebene ein auf ihr liegender Punkt zugeordnet ist. Bei einem *rationalen algebraischen P-E-System* ist jedem Punkte x eine durch ihn gehende Ebene zugewiesen, deren Coordinaten rationale Functionen von x sind; *es ist das Gebilde von Punkten und Flächenelementen, welches durch die Differentialgleichung:*

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 + f_4 dx_4 = 0$$

dargestellt wird. Indem ich rücksichtlich der allgemeinen Theorie der P-E-Systeme auf die genannte Arbeit verweise, stelle ich mir hier die Aufgabe, den *Zusammenhang zwischen der Theorie der rationalen algebraischen P-E-Systeme oder des durch eine solche Differentialgleichung von möglichst allgemeiner Form dargestellten Gebildes und der der algebraischen Oberflächen sowie verwandter Untersuchungen zu erläutern.*

Dabei werde ich mich eines Theiles der für die Ebene geltenden Vorstellungen bedienen, welche ich in der Note: „Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen ersten Grades erster Ordnung" ausgeführt habe.

§ I enthält einleitende Bemerkungen, insbesondere auch die *Integrabilitätsbedingung in projectivischer Form.* In den §§ II, III untersuche ich die Beziehung der Brenn- und Wendefläche des Systems zu den ausgezeichneten Punkten desselben. Dabei ergeben sich verschiedene neue Definitionen dieser Flächen, welche an Stelle der Hesse'schen Fläche einer Oberfläche treten; so erscheint z. B. die Brennfläche in doppelter Weise als Enveloppe von ∞^3 sie mehrfach berührenden Curven; eine Erzeugung derselben, welche bei den algebraischen

*) Diese Annalen XXIII, S. 45.

Strahlensystemen zweiter Ordnung in die Kummer'sche Erzeugung der Brennfläche als Umhüllungsgebilde der Strahlen des Systems übergeht. Andere Beziehungen vermittelt die Polarentheorie; so entspricht z. B. der Wendefläche eindeutig eine Steiner'sche Kernfläche, sowie andere covariante Gebilde, deren Singularitäten bis zu einem gewissen Grade untersucht werden. Besonders einfach gestalten sich diese Verhältnisse für das P-E-System 2. Ordnung oder das demselben zugeordnete Strahlensystem 2. Ordnung 3. Classe. In § VI gebe ich eine an die erörterten Anschauungen sich anschliessende analytische Theorie dieses neuerdings von den Herren Reye und H. Stahl synthetisch untersuchten Gebildes.

Die Theorie der singulären Tangenten des Systems (§ VII—IX) zeigt die vollständigste Analogie mit den entsprechenden Problemen der Flächentheorie. Diese Uebereinstimmung geht soweit, dass viele aus der letzteren bekannten Zahlwerthe*) unverändert wiederkehren, obwohl ein directer Uebergang vom allgemeinen P-E-System zu dem speciellen Falle eines Flächenbüschels nicht stattfindet. Zur exacten Ausführung desselben würde es erforderlich sein, auch Systeme mit singulären Curven zu betrachten. Doch dürfte aus den vorliegenden Resultaten schon erhellen, dass fast alle Untersuchungen der algebraischen Flächentheorie ganz unmittelbar dem Studium der totalen Differentialgleichung $\Sigma f_i\, dx_i = 0$ subsumirt werden können.

§ I.

Das rationale algebraische P-E-System.

Bei Voraussetzung homogener Coordinaten ist die Gleichung der Ebene, welche im rationalen algebraischen P-E-System dem Punkte mit den Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ (Punkt x) zugeordnet ist:

$$F = \sum X_i f_i = 0 \tag{1}$$

wo die f_i homogene Functionen n. Ordnung der x_i sind, zwischen denen die *Identität*:

$$\sum x_i f_i = 0 \tag{2}$$

besteht. Die Zuordnung (1) ist, wie man sieht, ein specieller Fall derjenigen, bei welcher überhaupt jedem Punkt eine Ebene zugewiesen ist; sie wird insbesondere durch die Zuordnung der Tangentenebenen eines Flächenbüschels zu ihren Berührungspunkten veranschaulicht. Gleichzeitig erhält auch der dualistische Fall:

$$\Phi = \sum U_i \varphi_i = 0$$

*) Wie z. B.: $11n - 24$, $5(n-3)(7n-12)$, $5n(7n^2 - 28n + 30)$, $2(n-2)(3n-2)$.

mit der Identität $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, wo die φ_i homogene Functionen der Ebenencoordinaten u_i sind, ein selbständiges Interesse; doch werde ich von einer besonderen Behandlung desselben absehen.

Bezeichnet man die Differentialquotienten der f_i durch Indices, so dass:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik}, \qquad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = f_{ikl}, \ldots$$

gesetzt wird, so hat man die Identitäten:

$$-f_k = \sum x_i f_{ik},$$
$$n f_k = \sum x_i f_{ki},$$

$$(3) \quad (n+1) f_k = \sum x_i (f_{ki} - f_{ik}), \; (n-1) f_k = \sum x_i (f_{ik} + f_{ki}),$$
$$\sum x_i f_{ikm} + f_{km} + f_{mk} = 0$$
$$\sum x_i f_{iklm} + f_{klm} + f_{lmk} + f_{mlk} = 0 \ldots,$$

mithin kann die Gleichung (1) auch in der Form

$$(4) \quad (n+1) F = \sum (X_k x_i - X_i x_k) f_{ki} = \sum (X_k x_i - X_i x_k)(f_{ki} - f_{ik}) = 0$$

geschrieben werden. Die f_i haben daher nach (3) die folgende Gestalt:*)

$$(5) \quad \begin{aligned} f_1 &= \quad x_2 A + x_3 B + x_4 C, \\ f_2 &= -x_1 A + x_3 D + x_4 E, \\ f_3 &= -x_1 B - x_2 D + x_4 F, \\ f_4 &= -x_1 C - x_2 E - x_3 F \end{aligned}$$

wo die $A, B, \ldots, F$ homogene Functionen $n-1$. Ordnung in den x sind. Setzt man für die $X_k x_i - X_i x_k$ die Liniencoordinaten p_{ik}, so ergiebt sich für den übrigens nicht weiter zu behandelnden Fall $n=1$ aus (4) die Gleichung des linearen Complexes, wie bekannt.

Dem Punkte $x + \lambda y$ entspricht allgemein die Ebene:

$$0 = \sum X_i \left[f_i + \lambda \sum y_k f_{ik} + \frac{\lambda^2}{2} \sum y_k y_l f_{ikl} + \cdots \right];$$

soll dieselbe durch den Punkt x gehen, so muss, da für $X = x$ das erste Glied der vorstehenden Gleichung nach (2) verschwindet,

$$0 = \sum y_k f_k + \frac{\lambda}{2} \sum y_k y_i (f_{ik} + f_{ki}) + \frac{\lambda^2}{6} \sum y_k y_l y_i f_{ikl} + \cdots$$

sein. Hieraus folgt:

Auf jeder Geraden liegen $n-1$ Punkte, deren zugeordnete Ebene durch diese Gerade geht.

*) Vgl. Kummer, Theorie d. algebr. Strahlensysteme, S. 49.

Dagegen drücken die Gleichungen

$$\sum y_i f_i = 0,$$

$$\sum y_i y_k (f_{ik} + f_{ki}) \equiv \sum y_i y_k f_{ik} = 0$$

aus, dass die Richtung (xy) die einer von x auslaufenden Haupttangente des Systems ist. *Die Gleichung der Brennfläche des Systems wird daher:*

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2f_{11} & f_{12}+f_{21} & f_{13}+f_{31} & f_{14}+f_{41} \\ f_{12}+f_{21} & 2f_{22} & f_{23}+f_{32} & f_{24}+f_{42} \\ f_{13}+f_{31} & f_{23}+f_{32} & 2f_{33} & f_{34}+f_{43} \\ f_{14}+f_{41} & f_{24}+f_{42} & f_{34}+f_{43} & 2f_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

die der Wendefläche:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

beide sind, wie man sieht, Flächen der $4(n-1)$. Ordnung.

Ich bemerke hier zunächst einen allgemeinen Satz über geränderte Determinanten, welcher auch bei anderen Gelegenheiten sich nützlich erweisen mag.

Bezeichnet man die *nicht symmetrische* Determinante der n^2 Elemente a_{ik}, horizontal und vertical gerändert mit k Reihen von Grössen

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k}, \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2k}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nk}, \end{matrix}$$

wobei in bekannter Weise die übrig bleibenden Stellen durch Nullen ersetzt werden, durch:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{vmatrix},$$

dagegen die *symmetrische* Determinante der $A_{ik} = a_{ik} + a_{ki}$, auf dieselbe Weise gerändert, durch:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix},$$

und endlich die mit denselben Grössen geränderte *schiefe* Determinante der $(ik) = a_{ik} - a_{ki}$ durch:

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k),$$

so bestehen die Identitäten:

$$2\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1}\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1}\end{pmatrix},$$

$$4\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2}\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2}\end{pmatrix} + (\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_{n-2}),$$

in welcher letzteren für ein gerades n der zweite Term das Quadrat eines Pfaff'schen Ausdruckes ist, für ein ungerades n aber identisch verschwindet.

Der Beweis hierfür ergiebt sich sehr leicht. Denn ersetzt man in der Determinante:

$$4\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2}\end{vmatrix}$$

jedes Glied $2a_{ik}$ durch $a_{ik} + a_{ki} + a_{ik} - a_{ki}$ oder $A_{ik} + (ik)$ so wird die Entwicklung derselben, da die Elemente a_{ik} überhaupt nur in zweiter Dimension auftreten, aus drei Gliedern bestehen, deren erstes und letztes die in der zweiten Identität rechts auftretenden Terme bilden, während das mittlere, die (ik) linear enthaltende, wegen der Beziehung:

$$(ik) + (ki) = 0$$

verschwindet. Auf demselben Wege erkennt man die erste Identität.

Man hat nun insbesondere:

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} & u\\ a_{12}+a_{21} & 2a_{22} & a_{23}+a_{32} & v\\ a_{13}+a_{31} & a_{23}+a_{32} & 2a_{33} & w\\ u & v & w & 0\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w\\ u & v & w & 0\end{vmatrix} + (\alpha_u + \beta_v + \gamma_w)^2$$

wo:

$$\alpha = a_{32} - a_{23},$$
$$\beta = a_{13} - a_{31},$$
$$\gamma = a_{21} - a_{12}$$

gesetzt ist. Somit findet man:

$$x_i^2\left[\frac{4}{n}\Delta + \frac{\Delta'}{(n-1)^2}\right] = [f_3(f_{12}-f_{21}) + f_2(f_{31}-f_{13}) + f_1(f_{23}-f_{32})]^2.$$

Mit Hülfe der Identitäten (3) aber ergiebt sich:

$$\left(\frac{4}{n}\Delta + \frac{\Delta'}{(n-1)^2}\right)(n+1)^2$$
$$= [(f_{34}-f_{43})(f_{12}-f_{21}) + (f_{31}-f_{13})(f_{24}-f_{12}) + (f_{14}-f_{41})(f_{23}-f_{32})]^2.$$

Die Bedingung der Integrabilität des P-E-Systems (specielles System erster Art) *ist mithin durch die eine Gleichung:*

(6) $0=(f_{34}-f_{43})(f_{12}-f_{21})+(f_{31}-f_{13})(f_{24}-f_{42})+(f_{14}-f_{41})(f_{23}-f_{32})$

oder durch je eine der vier bis auf einen Factor x_i äquivalenten Bedingungen ausgedrückt:

$$f_1(f_{23}-f_{32})+f_2(f_{31}-f_{13})+f_3(f_{12}-f_{21})=0,$$
$$f_1(f_{24}-f_{42})+f_2(f_{41}-f_{14})+f_4(f_{12}-f_{21})=0,$$
$$f_1(f_{34}-f_{43})+f_3(f_{41}-f_{14})+f_4(f_{13}-f_{31})=0,$$
$$f_2(f_{34}-f_{43})+f_3(f_{42}-f_{24})+f_4(f_{23}-f_{32})=0,$$

deren jede wieder die Form der Integrabilitätsbedingung eines dreigliedrigen Differentialausdruckes besitzt.

Man entnimmt zunächst den folgenden Satz:

Brennfläche und Wendefläche des Systems berühren sich überall, wo sie sich treffen, also in einer Curve $8(n-1)^2$ Ordnung.

Ist das ganze System überhaupt ein specielles erster Art, d. h. verschwindet die Bedingung (6) identisch, so möge in der ersten der vorstehenden Identitäten durch x^{2n-1} dividirt, die Quotienten $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ durch $\xi_1\xi_2\xi_3$ und die resultirenden Functionen $f_1f_2f_3f_4$ durch $F_1F_2F_3F_4$ bezeichnet werden. Es finden dann, falls man mit M einen Multiplicator bezeichnet, die Gleichungen statt:

$$MF_1=\frac{\partial R}{\partial \xi_1},$$
$$MF_2=\frac{\partial R}{\partial \xi_2},$$
$$MF_3=\frac{\partial R}{\partial \xi_3}.$$

Da

$$\xi_1F_1+\xi_2F_2+\xi_3F_3+F_4=0$$

ist, so wird:

$$-MF_4=\xi_1\frac{\partial R}{\partial \xi_1}+\xi_2\frac{\partial R}{\partial \xi_2}+\xi_3\frac{\partial R}{\partial \xi_3}=-x_4\frac{\partial R}{\partial x_4}.$$

Setzt man wieder für die ξ ihre Werthe ein, so entsteht:

$$Mf_1=x_4^{n+1}\frac{\partial R}{\partial x_1},$$
$$Mf_2=x_4^{n+1}\frac{\partial R}{\partial x_2},$$
$$Mf_3=x_4^{n+1}\frac{\partial R}{\partial x_3},$$
$$Mf_4=x_4^{n+1}\frac{\partial R}{\partial x_4},$$

wo R eine Function der Grössen $\frac{x_1}{x_4}\ \frac{x_2}{x_4}\ \frac{x_3}{x_4}$ ist. Mithin ist das Integral von:

$$\sum f_i \, dx_i = 0$$

gegeben durch:

$$R = \text{const.}$$

Diese Gleichung stellt im allgemeinen ein Büschel von Flächen vor. Und so hat man den Satz:

Die speciellen rationalen P-E-Systeme erster Art werden durch die Tangentenebenen eines — im allgemeinen transcendenten — Flächenbüschels gebildet.

§ II.

Die singulären Punkte des Systems und die Knotenpunkte der Brennfläche.

Die Functionen f_i haben im allgemeinen, ihrer oben (I, 5) angegebenen Form zufolge, eine gewisse Zahl gemeinsamer Verschwindungspunkte. Nach bekannten Betrachtungen erhält man als Anzahl derselben:

$$n^3 - n^2 + n - 1.$$

Diese Punkte, *die singulären Punkte des Systems**), sind conische Knotenpunkte der Wendefläche, durch welche die Fläche $2(n-1)$. Ordnung der Integrabilität einfach hindurchgeht. Während von jedem Punkte im allgemeinen zwei Haupttangenten auslaufen, gehen durch einen singulären Punkt x unendlich viele, welche einen Kegel zweiten Grades $\Sigma y_i y_k f_{ik} = 0$ bilden, unter dessen Kanten sich 6 stationäre Haupttangenten befinden.

Der Tangentenkegel der Wendefläche in einem singulären Punkte wird von den Haupttangenten des Systems gebildet, die von diesem auslaufen. Es geht dies aus der leicht zu erweisenden Gleichung:

$$a_x b_x \sum y_i y_k \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_k} = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \sum y_i y_k f_{ik}$$

hervor, welche für einen singulären Punkt x bestehen muss.

Aber auch die Brennfläche hat in den singulären Punkten conische Knoten. Und die Gleichung des Tangentenkegels der Brennfläche in einem dieser Punkte ist, wenn man zur Abkürzung $\Sigma y_i f_{ii}$ gleich a_i setzt:

$$\frac{c_x^2}{(n-1)^2} \sum \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = \begin{pmatrix} \alpha & c \\ \alpha & c \end{pmatrix} = 0.$$

Nach der in § I entwickelten Identität erhält man aber hierfür:

---

*) Die singulären Punkte können zum Theil oder sämmtlich durch *singuläre Curven* vertreten werden. In den folgenden Untersuchungen ist dieser Fall grundsätzlich ausgeschlossen.

$$4\begin{vmatrix}\alpha & c\\ \alpha & c\end{vmatrix} + \beta_y^2 = 0$$

wo β_y einen Pfaff'schen Ausdruck bezeichnet, oder nach einfacher Umformung:

$$-4\begin{vmatrix}c\\ c\end{vmatrix}\sum y_i y_k f_{ik} + \beta_y^2 = 0.$$

Die beiden Tangentenkegel berühren sich mithin doppelt längs der beiden durch die Ebene $\beta_y = 0$ aus ihnen ausgeschnittenen Geraden.

Dies Verhalten kann man auch direct daraus entnehmen, dass beide Flächen sich überhaupt in ihren gemeinsamen Punkten berühren. Die Ebene $\beta_y = 0$ ist daher zugleich die Tangentenebene der Fläche der Integrabilitätsbedingung im singulären Punkte. Bemerkt man, dass — vergl. § VII, — für $n=2$ die Brennfläche die Kummer'sche Brennfläche des zu dem rationalen P-E-System gehörigen Strahlensystems 2. Ordnung 3. Classe ist, welche von Strahlen doppelt berührt wird, zu denen insbesondere die von dem singulären Punkte auslaufenden Haupttangenten gehören, sowie dass alle 15 Knotenpunkte jener Fläche von gleichartiger Beschaffenheit sind, so hat man den Satz:

In jedem Knotenpunkte der Kummer'schen Brennfläche des Strahlensystems [2, 3] *haben die beiden Tangentenkegel zweiten Grades, welche von einem solchen Punkte an die Grenzfläche gelegt werden können, nämlich der einhüllende Kegel des conischen Punktes und der eigentliche Tangentenkegel zweiten Grades (ausser demselben sind noch vier Tangentenbüschel ersten Grades vorhanden) eine doppelte Berührung.*

Höhere Singularitäten, wie sie z. B. durch das Verschwinden aller $f_{ik} + f_{ki}$ bedingt werden, werde ich hier nicht untersuchen. Dagegen sieht man ohne Weiteres, dass, so oft der Factor $\begin{vmatrix}c\\ c\end{vmatrix}$ verschwindet, der Tangentenkegel der Brennfläche in eine Doppelebene degenerirt. Es wird dies dann der Fall sein, wenn zwei singuläre Punkte unendlich nahe gerückt sind. Denn damit dem Punkte x, für den die f_i verschwinden, ein singulärer Punkt $x + d\lambda y$, wo die y_i der willkürlichen Ebene $c_y = 0$ angehören, verbunden sei, muss es möglich sein, die fünf Gleichungen:

$$\sum y_k f_{ik} = 0, \quad c_y = 0$$

für beliebige c zu lösen. Das ist aber nur möglich, wenn die 4 ersten Gleichungen sich auf 2 reduciren, d. h. wenn alle Unterdeterminanten dritten Grades in der Functionaldeterminante der f_i verschwinden und umgekehrt. Hierzu ist im allgemeinen nur erforderlich, dass eine einzige dieser Unterdeterminanten Null sei, wie aus der leicht zu erweisenden Gleichung:

$$x_i x_k \begin{vmatrix} d \\ c \end{vmatrix} = c_x d_x \Delta_{ik}$$

hervorgeht. Demnach hat man:

Rücken zwei singuläre Punkte zusammen, so erhält die Brennfläche daselbst einen uniplanaren Knotenpunkt, die Wendefläche einen dreifachen Punkt.

Die Brennfläche hat ausserdem noch $10(n-1)^3$ Knotenpunkte zweiter Art, in denen die sämmtlichen Unterdeterminanten dritten Grades von Δ' verschwinden,*) in denen also:

$$f_{ik} + f_{ki} = \alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i$$

wird. An diesen Stellen zerfällt daher die Fläche zweiten Grades

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0,$$

deren durch den Punkt x gehende Erzeugende die beiden Haupttangenten liefern, in zwei Ebenen. Von dieser coincidirt aber die eine mit der Ebene $\Sigma y_i f_i = 0$ selbst, denn aus den angeführten Gleichungen ergiebt sich durch Multiplication mit den x_i und Addition:

$$(n-1) f_k = \alpha_x \beta_k + \alpha_k \beta_x,$$

$$0 = \alpha_x \beta_x$$

also für

$$\beta_x = 0, \quad f_k \equiv \alpha_x \beta_k$$

und

$$\sum y_i y_k (f_{ik} + f_{ki}) \equiv \alpha_y \sum y_i f_i.$$

Einem solchen Punkte ist daher eine gewisse Gerade zugeordnet, die Schnittlinie der Ebenen:

$$\alpha_y = 0, \quad \sum y_i f_i = 0,$$

sie mag die dem *Knoten zweiter Art zugeordnete Gerade* heissen. — Von einem Knoten zweiter Art gehen, wie man sieht, ∞^1 Haupttangenten aus, welche ein ebenes Büschel bilden, unter dessen Strahlen sich drei stationäre Haupttangenten befinden.

Der Tangentenkegel der Brennfläche im Knoten zweiter Art, für den die obigen Gleichungen gelten, hat zur Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & \alpha_1 & \beta_1 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} & \alpha_2 & \beta_2 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} & \alpha_3 & \beta_3 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} & \alpha_4 & \beta_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, 3. Aufl. Bd. II, S. 539).

falls

$$\psi_{ik} = \sum y_l (f_{ilk} + f_{ikl})$$

gesetzt wird, wie sich durch directe Bildung der Form

$$\sum y_i y_k \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial x_i \partial x_k}$$

leicht ergiebt.

In dem besonderen Falle $n = 2$ entspringt hieraus wieder eine Eigenschaft der Kummer'schen Brennfläche. Denn es sind die f_{ikl} Constanten, und es wird:

$$\sum y_l (f_{kil} + f_{ikl}) = \sum f'_{ik} + f'_{ki},$$

wobei das Zeichen f'_{ik} anzeigen soll, dass statt der Variabelen x_i die y_i substituirt sind. Mithin ist die Gleichung des Tangentenkegels durch die mit den α und β geänderte Determinante der $f'_{ik} + f'_{ki}$ gegeben. Aber diese gleich Null gesetzt liefert den Ort der Punkte, deren conische Polare $\Sigma x_i x_k f_{ik}$ die Gerade $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$ berührt. Somit hat man:

Der Tangentenkegel der Kummer'schen Brennfläche des Strahlensystems [2, 3] *in Bezug auf einen der Knotenpunkte ist zugleich der Ort der Punkte, deren conische Polarflächen die diesem Punkte zugeordnete Gerade berühren.*

§ III.

Covariante Flächen des Systems.

Durch die Gleichung (1) des § I wird jedem Punkte ein ebenes Büschel von durch ihn gehenden Geraden in der zugehörigen Ebene zugewiesen. Diese bilden die Tangenten des Systems, der Punkt heisse ihr Berührungspunkt, die Ebene eine Tangentenebene. Jede Gerade des Raumes ist in $n - 1$ ihrer Punkte Tangente des Systems.

Die Tangentenebenen des Systems, welche durch einen Punkt y des Systems gehen, haben ihre Berührungspunkte auf der Fläche n. Ordnung:

$$P = \sum y_i f_i = 0$$

*der n. Polare von y.**) Die Tangentenebene von P im Punkte y selbst ist die diesem Punkte zugeordnete Ebene. Jene Fläche enthält also auch die Tangentialpunkte aller durch y gehenden Geraden. Hieraus folgt weiter:

Die durch einen Punkt y gehenden Haupttangenten des Systems bilden einen Kegel $n(n-1) - 2$. Ordnung, der sich auf den Schnitt

*) Ueber die hier auftretende Polarentheorie vgl.: Diese Annalen XXIII, S. 159.

von P mit der im gewöhnlichen Sinne genommenen Polare von P in Bezug auf den Punkt y stützt.

Die Haupttangenten bilden daher einen Complex $(n+1)(n-2)$. Grades, dessen Complexkegel für jeden beliebigen Punkt $n(n-1)(n-2)-6$ Rückkehrkanten und $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ Doppelkanten hat, und für den die seiner Spitze zugehörige Ebene eine Doppeltangentenebene ist. Die Rückkehrkanten sind stationäre Haupttangenten des Systems. Weiter findet man:

Die Haupttangenten, welche eine Gerade schneiden, haben ihre Berührungspunkte, d. h. diejenigen Punkte, in denen sie Haupttangenten sind, auf einer Fläche $3(n-1)+2$. Ordnung.

Die Gleichung dieser Fläche erhält man durch Elimination der y aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum y_i f_i &= 0, \\ \sum y_i y_k f_{ik} &= 0, \\ \alpha_y &= 0, \\ \beta_y &= 0. \end{aligned}$$

Die hieraus entspringende Determinantengleichung:

$$V = \begin{vmatrix} f & \alpha & \beta \\ f & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

kann in den beiden Formen:

$$\alpha_x^2 \binom{\beta}{\beta} - 2\alpha_x\beta_x \binom{\alpha}{\beta} + \beta_x^2 \binom{\alpha}{\alpha} = 0,$$

$$\alpha_x^2 \begin{vmatrix} \beta \\ \beta \end{vmatrix} - \alpha_x\beta_x \left[\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta \\ \alpha \end{vmatrix} \right] + \beta_x^2 \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden. Man sieht zunächst, dass V die Gerade $(\alpha\beta)$ zur Doppellinie hat. *Ausserdem hat aber V eine Doppelcurve vom Grade n^2, welche sich in $n-1$ Punkten auf die Gerade $(\alpha\beta)$ stützt, und durch alle singulären Punkte geht.* Denn die n. Polaren aller Punkte einer Geraden $(\alpha\beta)$ bilden ein Büschel mit der gemeinsamen Basiscurve n^2 Ordnung, welche offenbar $n-1$ Punkte auf $(\alpha\beta)$ selbst hat. Und für jeden Punkt dieser Curve muss die zugeordnete Ebene durch $(\alpha\beta)$ gehen, er muss daher ein Doppelpunkt von V sein, was sich übrigens auch leicht aus der analytischen Form von V erkennen lässt.*) Jeder Geraden $(\alpha\beta)$ entspricht so eine solche Curve n^2 Ordnung, sie möge als *Polare* derselben bezeichnet werden. Endlich sei noch bemerkt, dass V einfach durch alle Knotenpunkte zweiter Art hindurchgeht.

*) Vgl. hierüber § VII.

Die in einer Ebene $\alpha_x = 0$ liegenden Haupttangenten haben ihre Berührungspunkte auf der Curve $3(n-1)$. Ordnung:

$$\binom{\alpha}{\alpha} \equiv \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha_x = 0.$$

Diese Curve ist die Hesse'sche Curve des in jener Ebene liegenden Systems von Punkten und zugeordneten Geraden; jedem Punkte ist daselbst eine durch ihn gehende Tangente zugeordnet. Andererseits erkennt man aus der bekannten Ordnung der Hesse'schen Curve wieder die Ordnung von V, sowie auch dass in jeder Ebene durch $(\alpha\beta)$ $n^2 - n + 1$ Punkte der Doppelcurve von V liegen, etc.

Jede der ∞^4 Flächen V berührt die Brennfläche überall wo sie dieselbe trifft, also in einer Curve $2(n-1)(3n-1)$. Ordnung.

Der Beweis dieses Satzes, welcher die Brennfläche als Enveloppe eines den Geraden des Raumes zugeordneten Flächensystems charakterisirt, beruht auf der bekannten Identität:

$$\binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta} = \Delta' \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & \beta \end{pmatrix} + \binom{\alpha}{\beta}^2$$

welche auf V angewandt, liefert:

$$V\binom{\alpha}{\alpha} = \Delta' \alpha_x^2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \left[\alpha_x \binom{\alpha}{\beta} - \beta_x \binom{\alpha}{\alpha}\right]^2.$$

Daraus geht hervor, dass der Schnitt von $\binom{\alpha}{\alpha} V$ mit Δ' stets aus der doppeltzählenden Curve:

$$\Delta' = 0, \quad \alpha_x \binom{\alpha}{\beta} - \beta_x \binom{\alpha}{\alpha} = 0$$

besteht. Die Fläche $\binom{\alpha}{\alpha} = 0$ ist aber der Ort der Punkte, deren conische Polarflächen $\Sigma y_i y_k f_{ik} = 0$ die Ebene $\alpha_y = 0$ berühren. Auch diese Fläche berührt die Brennfläche nach einer Curve $6(n-1)^2$. Ordnung. Die Berührungscurve von V und Δ' kann man auch als gemeinsame Curve der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 2f_{11} & f_{12}+f_{21} & f_{13}+f_{31} & f_{14}+f_{41} & \alpha_x\beta_1 - \alpha_1\beta_x \\ f_{12}+f_{21} & 2f_{22} & f_{23}+f_{32} & f_{24}+f_{42} & \alpha_x\beta_2 - \alpha_2\beta_x \\ f_{13}+f_{31} & f_{23}+f_{23} & 2f_{33} & f_{34}+f_{43} & \alpha_x\beta_3 - \alpha_3\beta_x \\ f_{14}+f_{41} & f_{24}+f_{42} & f_{34}+f_{43} & 2f_{44} & \alpha_x\beta_4 - \alpha_4\beta_x \end{Vmatrix} = 0$$

ansehen. Man erkennt dann ebenfalls ihre einfachen Punkte in den Knoten zweiter Art, sowie in den Schnitten der Geraden $(\alpha\beta)$ mit der Brennfläche, ferner ihre Doppelpunkte in den singulären Punkten. Endlich kann man den Tangentenkegel von V in diesen letzteren Punkten auch in die Form bringen:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \sum y_i y_k f_{ik} + (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)\, \gamma_{y_i} = 0$$

wonach der Schnitt von V und Δ daselbst zum Theil aus den Fortschreitungsrichtungen:

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0, \quad \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x = 0$$

besteht, wie zu erwarten war.

Aus dem Bewiesenen geht hervor:

Die Hesse'sche Curve in irgend einer Ebene berührt die Brennfläche überall, wo sie dieselbe trifft, also in $6(n-1)^2$ *Punkten*, oder:

Die Congruenz der parabolischen Haupttangenten ist von der Classe $6(n-1)^2$.

Der Hesse'schen Curve, dem Orte der Berührungspunkte derjenigen Haupttangenten, die in einer Ebene liegen, entspricht in gewisser Beziehung dualistisch eine zweite Curve, welche der Ort der Berührungspunkte von solchen Haupttangenten ist, die durch einen Punkt y gehen. Diese zweite Curve ist der Schnitt der n Polare von y in Bezug auf jene letztere Fläche, *also von* $n(n-1)$. *Ordnung. Bezeichnet man sie als Polcurve des Punktes, so hat man folgenden Satz:*

Die Polcurve jedes Punktes berührt die Brennfläche überall, wo sie dieselbe trifft, also in $2n(n-1)^2$ *Punkten*, oder:

Die Ordnung der Congruenz der parabolischen Haupttangenten ist gleich $2n(n-1)^2$.

Durch die letzten Bemerkungen wird der bekannte Kummer'sche Satz, nach welchem jeder Strahl eines Strahlensystems Doppeltangente der zugehörigen Brennfläche ist, in folgender Weise verallgemeinert:

Jede Hesse'sche Curve des Systems ist $6(n-1)^2 n$*-fache, jede Polcurve* $2(n-1)^2 n$*-fache Tangente der Brennfläche.* Für den Fall $n=2$ wird jede Hesse'sche Curve aus den 3 Strahlen in der betreffenden Ebene, jede Polcurve aus den 2 durch den Pol gehenden Strahlen bestehen. Ganz analoge Verhältnisse finden für die höheren algebraischen Strahlensysteme 2. Ordnung statt.

Auch wird jede Hesse'sche Curve von $6(n-1)^2 n$ unendlich benachbarten Hesse'schen Curven, jede Polcurve von $2(n-1)^2 n$ benachbarten in ebenso viel Punkten getroffen, welche man als *Focalpunkte* dieser Curven bezeichnen kann. Und der Ort dieser Focalpunkte ist die Brennfläche selbst. Dagegen ist die Brennfläche nicht mehr die Enveloppe der Focalebenen, wie dies in dem Falle der geradlinigen Strahlensysteme stattfindet.

Den Beweis des oben angegebenen Verhaltens der Polcurven kann man einfach daraus entnehmen, dass jede Polcurve als Schnitt von zwei Flächen V betrachtet werden kann, welche zu sich schneidenden Geraden gehören. Ein solcher Schnitt ist von der Ordnung $(3n-1)^2$;

er besteht aus der Hesse'schen Curve in der Ebene jener beiden Geraden und der Polcurve ihres Schnittpunktes sowie einer ergänzenden Curve, welche von denjenigen Punkten gebildet wird, deren Haupttangenten sich auf jene Geraden stützen.

Man kann aber auch ganz direct zeigen, dass die drei Tangentenebenen t_1, t_2, t_3 der Brennfläche $\Delta' = 0$, der n. Polare

$$\sum z_i f_i = 0$$

eines Punktes z, und der Polarfläche von z in Bezug auf die letztere Fläche, $\sum z_i z_k f_{ik} = 0$, in einem gemeinsamen Punkte x ein Büschel bilden. Denn es ist

$$t_1 = \sum \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i} Y_i = \sum Y_i \Delta'_{ik} (f_{ik'} + f_{ki}),$$

$$t_2 = \sum z_i f_{ii} Y_i,$$

$$t_3 = \sum z_i z_k (f_{iki} + f_{kii}) Y_i,$$

wo die Y laufende Coordinaten sind. Nun ist aber

$$\sum Y_i Y_k f_{ik} = 0$$

eine Kegelfläche, deren Spitze in y liegt, und es ist:

$$\sum y_i (f_{ik} + f_{ki}) = 0, \quad \Delta'_{ik} = y_i y_k.$$

Daher muss man setzen können

$$z_i = x_i + \lambda y_i$$

und hiernach wird:

$$t_1 = \sum Y_i (f_{kii} + f_{iki}) y_i y_k,$$

$$t_2 = \sum (x_i f_{ii} + \lambda y_i f_{ii}) Y_i,$$

$$t_3 = \sum (x_i x_k + 2\lambda y_i x_k + \lambda^2 y_i y_k) (f_{iki} + f_{kii}) Y_i$$

$$= 2(n-1) \sum (x_i f_{ii} + \lambda y_i f_{ii}) Y_i + \lambda^2 \sum y_i y_k (f_{iki} + f_{kii}) Y_i$$

$$= 2(n-1) t_2 + t_1 \lambda^2,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Die Fläche V steht auch zur Wendefläche Δ in gewisser Beziehung. Aus der Identität:

$$\Delta \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta \\ \beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta \\ \alpha \end{vmatrix}$$

hat man nämlich:

$$V\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha\end{vmatrix} = \alpha_x^2 \Delta \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha & \beta\end{vmatrix} + \left\{\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}\alpha_x - \begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha\end{vmatrix}\beta_x\right\}\left\{\begin{vmatrix}\beta\\ \alpha\end{vmatrix}\alpha_x - \begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha\end{vmatrix}\beta_x\right\}.$$

Demnach zerfällt der Schnitt von V und Δ in zwei Curven $2(n-1)(3n-1)$ Ordnung. Für die eine Curve ist längs der die Gerade $(\alpha\beta)$ schneidenden Haupttangente die ihrem Berührpunkte zugeordnete Ebene stationär, für die andere findet diese letztere Eigenschaft gerade bei der anderen, $(\alpha\beta)$ im allgemeinen nicht schneidenden Haupttangente statt. Und ebenso zerfällt der Schnitt der Hesse'schen Curve mit der Wendefläche in zwei je $6(n-1)^2 n$ Punkte enthaltende Gruppen, welche durch die entsprechende geometrische Bedeutung sich unterscheiden.

§ IV.

Fortsetzung.

Soll die n. Polare von y einen Doppelpunkt haben, so müssen die vier Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = 0$$

bestehen. Daraus folgt:

Der Ort der Doppelpunkte der n. Polaren ist die Wendefläche des Systems.

Die Punkte, deren n. Polaren einen Doppelpunkt haben, liegen auf einer Fläche $4(n-1)^3$. Ordnung, der *Steiner'schen Fläche S des Systems. Die Steiner'sche Fläche wird gleichzeitig umhüllt von den Ebenen, welche den Doppelpunkten der Polaren, d. h. den Punkten der Wendefläche zugeordnet sind.*

Denn aus den Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = 0,$$

$$\sum dy_i f_{iki} + \sum y_i f_{iki}\, dx_i = 0,$$

welche für jeden benachbarten Punkt $y + dy$ der Steiner'schen Fläche bestehen, folgt durch Multiplication mit den x_i und Addition:

$$\sum y_i f_i = 0, \qquad \sum dy_i f_i = 0,$$

wonach sich y und $y + dy$ gleichzeitig in der Ebene

$$\sum z_i f_i = 0$$

befinden. Wendefläche und Steiner'sche Fläche sind eindeutig auf einander bezogen; jedem Punkte x der ersten entspricht der Punkt y der zweiten. Derselbe liegt auf derjenigen Haupttangente, längs welcher die zugehörige Ebene *nicht* stationär sich verhält.

Jede Ebene, welche zu einem Punkte $x + dx$ gehört, der einem Punkte x der Wendefläche benachbart ist, enthält den zugehörigen Punkt der Steiner'schen Fläche. Denn die Gleichung einer solchen Ebene ist:

$$\sum Z_i f_i + \sum Z_i f_{ik} dx_k = 0$$

und sie ist befriedigt für $Z = y$.

Eine zweite Fläche Ψ $4(n-1)^3$. Ordnung ist ebenfalls der Wendefläche eindeutig zugeordnet, sie wird gebildet von den Punkten y', welche durch die Gleichungen

$$\sum y'_i f_{ki} = 0$$

bestimmt sind. Die Verbindungslinie (xy') zeigt die Richtung derjenigen Haupttangente an, längs welcher die x zugehörige Ebene sich stationär verhält.

Endlich ist der Ort der Punkte, deren conische Polaren

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0$$

einen Doppelpunkt haben, die Brennfläche $\Delta' = 0$, und der Ort dieser Kegelspitzen selbst eine Fläche Φ von der Ordnung $4(n-1)^3$, welche eindeutig auf die Brennfläche bezogen ist. Die Fläche Φ enthält, den $10(n-1)^3$ Knoten zweiter Art der Brennfläche entsprechend, $10(n-1)^3$ gerade Linien.

Für die Punkte x der gemeinsamen Berührungscurve von Δ und Δ' liegen x und die zugehörigen Punkte der drei Flächen S, Φ, Ψ in einer Geraden, der entsprechenden parabolischen Tangente und bilden auf jener eine Gruppe von vier Punkten des constanten Doppelverhältnisses $\frac{n}{n-1}$.

Den Punkten einer Geraden entsprechen Ebenen, welche eine rationale Developpabele n. Klasse umhüllen. Da durch die Gerade selbst $n-1$ Ebenen gehen, so ist jedem Punkte derselben eben vermöge dieser Developpabelen seine Ebene eindeutig zugeordnet. Die Rückkehrcurve einer solchen Developpabelen ist bekanntlich von der $3(n-2)$. Ordnung, sie berührt die Steiner'sche Fläche überall, wo sie dieselbe trifft. Somit ist auch die Steiner'sche Fläche als Enveloppe von ∞^4 Curven charakterisirt.

*Den Punkten einer Ebene entspricht eine Fläche Θ von der Classe n^2, welche jene Ebene zur $n^2 - n + 1$-fachen Tangentenebene hat.**) Auch diese Fläche muss die Steiner'sche Fläche längs einer ganzen Curve berühren. Es ist leicht, einige charakteristische Eigenschaften von Θ zu ermitteln.

*) Die Classe erniedrigt sich jedesmal um eine Einheit, so oft die Ebene durch einen der singulären Punkte geht.

Denn zu dem Punkte x der Ebene $a_x = 0$ gehört die Ebene

$$\sum y_i f_i = 0,$$

zu dem benachbarten Punkte $x + dx$ also:

$$\sum y_i f_i + \sum y_i f_{ik}\, dx_k = 0.$$

Der zugehörige Punkt y der Fläche Θ ist mithin bestimmt durch die vier Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = \mu a_k.$$

Soll nun der Punkt y in der Ebene $a_x = 0$ selbst liegen, so hat man den letzteren noch die Gleichung:

$$a_y = 0$$

hinzuzufügen. Damit aber hat man als Curve derjenigen Punkte x, denen Punkte y in der Ebene $a_x = 0$ entsprechen:,

$$a_x = 0, \quad \left|\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}\right| = 0.$$

Es ist das die Hesse'sche Curve in jener Ebene. Und so erhält man den Satz:

Die Fläche Θ schneidet die Ebene, zu welcher sie gehört, in der Steiner-Cayley'schen Curve, welche von den in dieser Ebene liegenden Haupttangenten des Systems umhüllt wird.

Da nun die Steiner-Cayley'sche Curve von der Ordnung $2(n-1)^2$ ist, $12(n-1)(n-2)$ Rückkehrpunkte und ausser den $n^2 - n + 1$ Doppelpunkten, welche mit den Berührungspunkten von Θ und seiner zugehörigen Ebene zusammenfallen, noch

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-1)$$

Doppelpunkte besitzt, so ergiebt sich:*)

Die Fläche Θ ist von der Classe n^2, der Ordnung $3(n-1)^2$, die Ordnung ihrer Doppel- und Rückkehrcurve ist

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11),\ 12(n-1)(n-2),$$

sie hat ferner keine parabolische Curve.

Einige von diesen Zahlen lassen sich auch analytisch bestimmen. Zunächst die Ordnung. Das System der sechs Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = \mu a_k,$$
$$a_y = 0.$$
$$\beta_y = 0$$

liefert diejenigen Punkte y, welche auf einer beliebigen Geraden $(\alpha\beta)$ liegen. Man erhält durch Elimination der y die beiden Gleichungen

*) Vgl. hierüber: Math. Annalen XXIII, S. 169.

$$\left|\begin{matrix} a \\ \alpha \end{matrix}\right| = 0, \qquad \left|\begin{matrix} a \\ \beta \end{matrix}\right| = 0$$

mit $9(n-1)^2$ Lösungen. Aber von diesen sind die $6(n-1)^2$ Lösungen zu entfernen, für welche

$$\sum y_i f_{ik} = 0,$$
$$\alpha_y = 0$$

ist. Diese Punkte haben eine besondere Bedeutung. Denn in der Ebene $a_x = 0$ bestimmt der Schnitt mit der Wendefläche und der Hesse'schen Curve Punkte, denen stationäre Ebenen zugehören. *Und es giebt also* $6(n-1)^2$ *Punkte, für welche längs der in der Ebene liegenden Haupttangente selbst die zugehörige Ebene stationär bleibt.* Diese aber sind als Lösungen in Abzug zu bringen. Denn in dem genannten Falle coincidiren consecutive Ebenen, und es giebt daher auf einer beliebigen Geraden einen den obigen Gleichungen genügenden Punkt y. *Diese* $6(n-1)^2$ *Punkte liefern zugleich Pinchebenen der Fläche* Θ, und man erkennt weiter, dass durch jeden Berührungspunkt einer solchen Ebene eine ganz auf der Fläche Θ liegende Gerade geht; *die Fläche* Θ *enthält also auch* $6(n-1)^2$ *gerade Linien.* Bezeichnet man die Ordnung der Doppel- und Rückkehrcurve durch D und R, die Zahl der Pinchebenen durch j, so besteht in der That die Cayley'sche Gleichung:

$$0 = 4\ 3(n-1)^2[3(n-1)^2 - 2] - 8D - 11R - 2j.^*)$$

Der Tangentenkegel von Θ hat die Classe n^2, ausserdem ist er eindeutig bezogen auf die Schnittcurve der n. Polarfläche seiner Spitze der Ebene $a_x = 0$. Daher ist sein Geschlecht $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, und die Zahl seiner Wendeebenen gleich Null, da, wie gezeigt, zu der Ebene $a_x = 0$ nur $6(n-1)^2$ stationäre Ebenen gehören, von denen keine durch einen willkürlichen Punkt geht. Man hat daher für den Tangentenkegel folgende charakteristische Zahlen:

Ordnung $3n(n-1)$,
Classe n^2,
Geschlecht $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,
Zahl der Rückkehrkanten $3n(2n-3)$,
„ „ Wendekanten 0,
„ „ Doppelebenen $\frac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-3)$,
„ „ Doppelkanten $\frac{n}{2}[9n^3 - 18n^2 - 13n + 30]$.

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Bd. II, S. 674.

Ebenso hat man für den ebenen Schnitt der Fläche Θ:

Classe $3n(n-1)$,

Zahl der Doppeltangenten $\frac{3}{2}(n-1)[3n^3-3n^2-14n+16]$

„ „ Wendetangenten $3(n-1)(4n-5)$.

Ferner wird:

$$t=\frac{1}{3}\left\{\frac{n}{2}(n-1)(n^2+n-3)(n^2-2)-3n(n-2)(n^2-2)\right.$$
$$\left.+3(n-1)(4n-5)\right\}$$

die Zahl der dreifachen Tangentialebenen. Da nun Θ eine n^2-n+1-fache Ebene besitzt, welche für $\frac{1}{6}(n^2+n+1)n(n-1)(n^2-n-1)$ dreifache Ebenen zu rechnen ist, so hat man als Anzahl der eigentlichen dreifachen Ebenen von Θ:

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(n-3)(3n^2+3n-5).$$

Und endlich hat man als Ordnung der Curve der Berührpunkte der Doppeltangentenebenen

$$\varrho'=3(n-1)^2(n^2+n-5),$$

sowie als Zahl der scheinbaren Doppelebenen der Fläche der Doppeltangentenebenen:

$$k=\frac{(n-1)(n-2)}{8}[n^6+3n^5-5n^4-15n^3+15n^2+27n+24].$$

Ich wende mich nun zur Betrachtung der Steiner'schen Fläche S. Ihre Ordnung ist, wie oben bemerkt, gleich $4(n-1)^3$; ihre Classe gleich der Zahl der zu Punkten der Wendefläche gehörigen Ebenen, welche durch eine Gerade gehen, mithin

$$4n^2(n-1)-2(n^3-n^2+n-1).$$

Um die Ordnung des umschriebenen Kegels zu bestimmen, dessen Spitze z ist, setze man:

$$\sum z_i f_i=0,$$
$$\sum (a_z b_y-b_z a_y)=0,$$
$$\sum y_i f_{ik}=0,$$

durch welche Gleichungen ausgedrückt wird, dass die Gerade (zy) die willkürliche Gerade a, b schneidet. Es muss daher die Matrix:

$$\left\|\begin{matrix} f_{11}f_{12}f_{13}f_{14} & a_z b_1-b_z a_1 \\ f_{21}f_{22}f_{23}f_{24} & a_z b_2-b_z a_2 \\ f_{31}f_{32}f_{33}f_{34} & a_z b_3-b_z a_3 \\ f_{41}f_{42}f_{43}f_{44} & a_z b_4-b_z a_4 \end{matrix}\right\|$$

verschwinden, und dies geschieht für Punkte einer Curve $6(n-1)^2$. Ordnung, welche in Verbindung mit $\Sigma z_i f_i = 0$ $6n(n-1)^2$ Durchschnittspunkte liefert. *Daher ist die Classe des ebenen Schnittes der Steiner'schen Fläche gleich* $6n(n-1)^2$.

Aber man kann diese Zahl auch noch auf einem anderen Wege bestimmen. Denn die Ordnung des Kegels ist auch gegeben durch die Zahl der Schnittgeraden consecutiver Tangentenebenen von S, welche durch den Punkt z gehen und eine Gerade mit den Coordinaten $y_i = a_i + \lambda b_i$ schneiden. Und so hat man die Gleichungen:

$$\sum z_i f_i = 0, \quad \sum y_i f_i = 0,$$
$$\sum z_i df_i = 0, \quad \sum y_i df_i = 0,$$
$$\sum k_i dx_i = 0,$$

mithin, wenn man an Stelle von y_i $a_i + \lambda b_i$ setzt:

$$\psi = \begin{vmatrix} \sum z_i f_{i1} & & \\ \sum a_i f_i & \sum b_i f_{i1} - \sum b_i f_i & \sum a_i f_{i1} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & & \\ k_1 & & \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher Determinante nur die erste Verticalreihe hingeschrieben ist. Nun ist nachzuweisen, dass die Flächen $\Delta = 0$, $\psi = 0$ in den singulären Punkten die Tangentenebene von $\Sigma z_i f_i = 0$ in Curven mit gemeinsamen Doppelpunktstangenten schneiden. Da nun in diesen sowohl die f_i als die $\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}$ verschwinden, so erhält man:

$$\sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = \begin{vmatrix} \sum z_i f_{i1} & & \\ \sum y_k a_i f_{ik} & \sum b_i f_{i1} - \sum b_i y_k f_{ik} & \sum a_i f_{i1} \\ \sum \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1 \partial x_k} y_k & & \\ k_1 & & \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diese Determinante mit der folgenden:

$$\delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix},$$

in welcher die α, β willkürliche Grössen bedeuten, so findet man:

$$\delta \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = k_x \left[\sum z_i f_{ik} y_k \cdot P + \sum \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k \cdot Q \right],$$

womit der Beweis geführt ist. Da nun ψ von der Ordnung $7n - 8$ ist, so ergiebt sich als Zahl der Lösungen:

$$4(n-1)\, n(7n-8) - 6(n^4 - n^2 + n - 1).$$

Diese entsprechen aber der zuvor ermittelten Ordnung des Kegels und der Zahl seiner Wendeebenen, für welche der Schnitt consecutiver Ebenen unbestimmt wird, also immer eine willkürliche Gerade schneidet. Mithin hat der Kegel

$$2(n-1)\, n(11n - 13) - 6(n^3 - n^2 + n - 1)$$

Wendeebenen. Daraus erkennt man weiter die Existenz von $4n(n-1)$ $(7n - 11)$ Rückkehrkanten, u. s. w. Man kann übrigens die eben ermittelten Zahlen auch aus dem Geschlechte des Kegels entnehmen, welches das einer Curve $4n(n-1)$. Ordnung mit $n^3 - n^2 + n - 1$ wirklichen Doppelpunkten ist, welche selbst der vollständige Schnitt von zwei Flächen $4(n-1)$. und n. Ordnung ist. Das Geschlecht des Kegels ist daher gleich:

$$2n(n-1)\,(5n-8) - (n^3 - n^2 + n - 1).$$

Aus Geschlecht, Ordnung und Classe des Kegels erhält man dann in bekannter Weise die Zahl der Wende- und Doppelkanten u. s. w.

Die Steiner'sche Fläche S hat conische Knoten in den singulären Punkten, zur Rückkehrcurve den Ort der Punkte y, die gleichzeitig zwei unendlich benachbarten Punkten der Wendefläche entsprechen, zur Doppelcurve den Ort der Punkte z, welche gleichzeitig zu zwei verschiedenen Punkten derselben gehören. Rückkehr- und Doppelcurve bilden zugleich den Ort der Punkte, deren n. Polaren einen biplanaren Knoten, resp. zwei Knotenpunkte erhalten.

§ V.

Beziehungen zur Liniengeometrie.

In meiner früheren Arbeit bezeichnete ich die aus den Haupttangenten gebildeten Curven als *Haupttangentencurven des Systems*. Für den Fall $n = 2$ sind diese geradlinig, sie bilden das Strahlensystem zweiter Ordnung dritter Classe; jeder Ebene entspricht die Reciproke einer Steiner'schen Fläche, welche von dieser Ebene in den drei zugehörigen Strahlen des Systems geschnitten wird. Die von Herrn Kummer untersuchten algebraischen Strahlensysteme zweiter Ordnung geben überhaupt den Fall derjenigen P-E-Systeme, bei denen ∞^2 geradlinige Haupttangentencurven auftreten.

Im Allgemeinen aber bilden die Haupttangenten einen Complex. Die Gleichung desselben lässt sich leicht bilden, wenn man die Gleichung I, 1 in der symbolischen Form:

$$\sum p_i (a_{x_i})^{n-1} = \sum p_i (b_{x_i})^{n-1} = 0$$

schreibt, in welcher die p_i gewöhnliche Liniencoordinaten, die mit ihnen multiplicirten Formen aber allgemeine Formen $n-1$. Ordnung sind. Man erhält sie, wenn man in den symbolischen Ausdrücken statt x $x + \lambda y$ schreibt und die Discriminante nach λ bildet. Dieselbe wird, wovon man sich leicht überzeugt, eine reine Function der Coordinaten p_i, welche dieselben im Grade $(n+1)(n-2)$ enthält. Für die einfachsten Fälle $n = 3, 4, 5$ kann man diese Discriminante wirklich bilden. So erhält man z. B. für $n = 3$:

$$\sum p_i p_j (a_{x_i} b_{y_j} - a_{y_i} b_{x_j})^2 = 0.$$

Setzt man überhaupt den symbolischen Klammerfactor des vorstehenden Ausdruckes, welcher nur von den p_i abhängig ist, in leicht verständlicher Abkürzung gleich:

$$(a b_{ij}),$$

so hat man für $n = 4$

$$\sum p_i p_j p_{i'} p_{j'} (a b_{ij})^2 (c d_{i'j'})^2 (a c_{ii'}) (b d_{jj'}) = 0.$$

Und für $n = 5$ wird der Complex von der Form:

$$i^3 - 6j^2 = 0,$$

wo

$$i \equiv \sum p_i p_j (a b_{ij})^1.$$

Dieser Fall verdient deshalb Interesse, weil hier die Congruenz der stationären Haupttangenten vollständiger Schnitt der beiden Complexe $i = 0$, $j = 0$ wird, welche beziehungsweise vom 6. und 9. Grade sind.

Eine Gerade ist geradlinige Haupttangentencurve des Systems, wenn sie in allen ihren Punkten Tangente ist. Hierzu ist erforderlich, dass die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sum p_i (a_{x_i})^{n-1} &= 0, \\
-(n-1) \sum p_i (a_{x_i})^{n-2} (a_{y_i}) &= 0, \\
+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \sum p_i (a_{x_i})^{n-3} (a_{y_i})^2 &= 0, \\
&\vdots \\
\sum p_i (a_{y_i})^{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

bestehen. Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit den Formen:

$$(b_{y_j})^{n-1},\quad (b_{y_j})^{n-2},\quad \cdots,\quad (b_{x_j})^{n-1}$$

und addirt, so ergiebt sich die Relation:

$$\sum p_i (a\, b_{ij})^{n-1} = 0,$$

welche selbst einen Complex n. Grades vorstellt. Da nun die Indices j 6 verschiedene Werthe annehmen können, so ergiebt sich der allgemeine Satz:

Jede geradlinige Haupttangentencurve gehört sechs Complexen n. Grades an. Insbesondere findet also bei den algebraischen Strahlensystemen zweiter Ordnung der folgende allgemeine, auch eine dualistische Auffassung zulassende Satz statt:

Jedes algebraische Strahlensystem zweiter Ordnung gehört im Allgemeinen sechs Complexen an. Für ein System [2, n] sind nach Herrn Kummer die f_i Functionen $n-1$. Ordnung; ein solches muss daher stets sechs Complexen $n-1$. Grades angehören. Auf das System [2, 2] beziehen sich diese Angaben nicht.

Für das System [2, 3] gestalten sich insbesondere die Verhältnisse wie folgt.

Die Gleichung I, 1 wird $\sum p_i a_{x_i} = 0$, eine Haupttangente muss also den beiden Gleichungen:

$$t_1 = \sum p_i a_{x_i} = 0,\quad t_2 = \sum p_i a_{y_i} = 0$$

genügen. Bildet man nun

$$\mathsf{T}_1 = t_1 a_{y_k} - t_2 a_{x_k} = 0,$$
$$\mathsf{T}_2 = t_1 a_{y_l} - t_2 a_{y_l} = 0,$$

so hat man zwei Complexe zweiten Grades T_1, T_2, denen das Strahlensystem angehört. Aus $\mathsf{T}_1 = 0$, $\mathsf{T}_2 = 0$ folgt nun entweder $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ oder:

$$U = a_{y_k} a_{x_l} - a_{x_k} a_{y_l} = 0.$$

Ein T_1 und T_2 gemeinsamer Strahl ist also entweder Strahl des Systemes oder gehört dem speciellen linearen Complexe U an. Daher sind die beiden von einem Punkte ausgehenden Strahlen des Systems die beiden den Kegeln von T_1 und T_2 gemeinsamen Kanten, welche nicht die Axe von U treffen. Und die drei Strahlen in einer Ebene ergeben sich auf folgendem Wege. Der Complex T_1 hat die Ausnahmeebene $a_{x_k} = 0$; die Complexcurve in einer beliebigen Ebene E berührt daher dieselbe; in derselben Beziehung stehen T_2 und $a_{x_l} = 0$. Die beiden Complexcurven E haben eine gemeinsame durch die Axe

von U gehende Tangente, die drei anderen gemeinsamen Tangenten sind die Strahlen des Systems.

Es sei schliesslich noch auf eine andere Beziehung zur Liniengeometrie hingewiesen. Es ist oben gezeigt, dass, falls die Gleichung I, 1 in der Form

$$\sum p_i A_i = 0$$

geschrieben wird, die Integrabilitätsbedingung die merkwürdige Gestalt:

$$A_1 A_4 + A_2 A_5 + A_3 A_6 = 0$$

annimmt. Die Functionen $n-1$. Ordnung A sind also für jeden Punkt der Fläche der Integrabilität den Coordinaten einer Geraden proportional. Vermöge der Gleichung:

$$\sum p_i A_i = 0$$

sieht man aber, dass diese Gerade jedesmal den Strahl p oder die Gerade (xy) schneidet, *dass sie also überhaupt in der dem Punkte zugehörigen Ebene liegt.* Das von diesen Geraden gebildete, eindeutig auf die Fläche der Integrabilität bezogene Strahlensystem $n-1$. Ordnung und Classe ist dem P-E-System covariant. Für das Strahlensystem [2, 3] existirt also eine demselben covariante lineare Congruenz.

§ VI.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung dritter Classe.

Für den soeben hervorgehobenen Fall $n = 2$ findet eine Reihe besonderer Beziehungen zwischen den Covarianten Δ, Δ', S, Φ, Ψ statt.

Es ist nämlich allgemein nach I, 1

$$f_{ik} + f_{ki} + \sum x_l f_{lik} = 0$$

und da die f_{lik} Constanten sind,

$$\sum y_i(f_{ik} + f_{ki}) + \sum x_l f_{lik} y_i = 0,$$

oder:

$$\sum y_i(f_{ik} + f_{ki}) + \sum x_l f'_{ik} \quad = 0,$$

falls man wieder unter f'_i dieselbe Function wie f_i, aber in den Variabeln y, versteht. Das Bestehen der Gleichungen

$$\sum y_i(f_{ik} + f_{ki}) = 0$$

zieht daher das der folgenden:

$$\sum x_l f'_{ik} = 0$$

nach sich. Daraus geht hervor:

Die Fläche der Doppelpunkte Φ der conischen Polaren ist identisch mit der Wendefläche.

Und ebenso ist auch:

$$\sum y_i f_{ik} = \sum y_i x_i f_{ikl} = -\sum x_l (f'_{ik} + f'_{kl}).$$

Das heisst:

Die Steiner'sche Fläche S ist identisch mit der Brennfläche.

Und endlich ist:

$$\sum y_i f_{kl} = \sum y_i x_i f_{kil} = \sum x_i f'_{kl}.$$

Die Fläche Ψ fällt mit der Wendefläche zusammen.

Insbesondere ist also die Brennfläche eindeutig auf die Wendefläche bezogen, letztere aber eindeutig auf sich selbst abbildbar. Zugleich erkennt man, dass, da die Brennfläche auf sechs verschiedene Arten eindeutig auf sich selbst vermöge der zusammengehörigen Berührpunkte ihrer Doppeltangenten bezogen ist, auch der Wendefläche eine solche sechsfache Abbildbarkeit zukommt.

Die Wendefläche hat fünf Knotenpunkte in den singulären Punkten, sie enthält als Steiner'sche Fläche 10 gerade Linien; die Brennfläche hat ausser den Knoten in den singulären Punkten noch 10 Knotenpunkte zweiter Art.

Die zweite Polare eines beliebigen Punktes z_i

$$\sum z_i f_i = 0$$

ist zufolge der Gleichung:

$$\sum z_i f_i \equiv \sum z_i f_{ikl} x_k x_l = -\sum x_k x_l (f'_{kl} + f'_{ik})$$

*mit der conischen Polarfläche desselben identisch**). Die conische Polare eines Knotenpunktes zweiter Art, dessen Coordinaten mit x_i bezeichnet sein mögen, besteht in Folge der Gleichungen:

$$f_{ik} + f_{kl} \equiv \alpha_i f_k + \alpha_k f_i$$

aus den beiden Ebenen $\alpha_y = 0$ und $\Sigma y_i f_i = 0$. Hieraus folgt, dass die einem Punkte von $\alpha_y = 0$ oder $\Sigma y_i f_i = 0$ zugeordnete Ebene wieder durch jenen Knotenpunkt geht. Mithin hat man:

Jedem der 10 Knotenpunkte A zweiter Art entspricht eine durch ihn gehende Ebene β, die zugehörige Ebene des Systems, und eine andere Ebene α. Den Punkten beider Ebenen sind Ebenen des Systems zugeordnet, welche sämmtlich durch den Knotenpunkt A gehen. Und die Durchschnittslinie der beiden Ebenen α und β liegt auf der Wendefläche.

Die zweite Polare eines der singulären Punkte ist die jenem Punkte zugeordnete Kegelfläche von Haupttangenten oder Strahlen des Systems. —

*) Dies folgt übrigens auch aus der allgemeinen Polarentheorie.

Man sieht ferner leicht, dass die Ebenen, welche zu den Punkten der Verbindungslinie irgend zweier singulärer Punkte gehören, längs der ganzen Erstreckung derselben stationär sind. Analytisch folgt dies daraus, dass für zwei singuläre Punkte ξ und η die Gleichung der dem Punkte $\xi + \lambda\eta$ zugeordneten Ebene sich auf:

$$\sum y_i \sum \eta_k \frac{\partial f_i}{\partial \xi_k} = 0$$

reducirt, also unabhängig von λ wird.

Die 10 Verbindungslinien zweier singulärer Punkte müssen daher auf der Wendefläche liegen. Die ihnen zugehörigen 10 stationären Ebenen sind mithin 10 singuläre Tangentenebenen der Brennfläche, es sind zugleich die 10 Ebenen β, welche zu den Knotenpunkten A gehören, während die Ebenen α die Ebenen des Pentaeders der singulären Punkte bilden. Man hat also:

Die 10 *Ebenen* α, *welche den Knotenpunkten zweiter Art entsprechen, sind die Ebenen des Pentaeders der singulären Punkte, und die* 10 *singulären Ebenen der Brennfläche gehen durch die Kanten desselben.*

Die Wendefläche enthält nun ausserdem noch 10 andere gerade Linien, nämlich in jeder Ebene des Pentaeders eine. *Diese Geraden sind mithin die den Knotenpunkten zweiter Art zugeordneten.*

Die Lage der 10 Knoten A hängt zunächst von einer Gleichung 10. Grades ab, welche in derselben Weise, wie dies von Clebsch in seiner Arbeit über das *Pentaeder der Fläche dritter Ordnung* geschehen ist, gebildet werden kann. Andererseits aber sind die fünf singulären Punkte abhängig von einer Gleichung 5. Grades. Und da den Ebenen des Pentaeders rational die Knotenpunkte zugehören, so muss die Gleichung 10. Grades mit Hülfe jener Gleichung 5. Grades unter Zuhülfenahme rein linearer Operationen lösbar sein.

Damit ist die analytische Untersuchung des Strahlensystems [2, 3] zurückgeführt auf die Lösung der Gleichung fünften Grades seiner singulären Punkte. Herr Kummer hat zuerst in seiner bekannten Arbeit über algebraische Strahlensysteme die Brennfläche dieses Strahlensystems aufs eingehendste untersucht. Aber es lässt sich eine etwas vereinfachte Darstellung geben, bei welcher überhaupt keine Irrationalitäten mehr auftreten, wenn man von vornherein das Pentaeder zu Grunde legt. Hierzu reicht es aus, etwa vier der singulären Punkte mit den Ecken des Coordinatensystems zusammenfallen zu lassen, wie im folgenden geschehen ist.

Ich setze in der Gleichung:

$$F = \sum y_i f_i = 0,$$

$$f_1 = \alpha_1 x_2 x_3 + \beta_1 x_2 x_4 + \gamma_1 x_3 x_4,$$
$$f_2 = \alpha_2 x_1 x_3 + \beta_2 x_1 x_4 + \gamma_2 x_3 x_4,$$
$$f_3 = \alpha_3 x_1 x_2 + \beta_3 x_1 x_4 + \gamma_3 x_2 x_4,$$
$$f_4 = \alpha_4 x_1 x_2 + \beta_4 x_1 x_3 + \gamma_4 x_2 x_3,$$

wobei die Gleichungen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \alpha_4 = 0,$$
$$\gamma_1 + \beta_3 + \beta_4 = 0,$$
$$\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 0$$

zwischen den Constanten bestehen müssen. Die singulären Punkte sind die 4 Ecken des Coordinatentetraeders und der durch die 4 Gleichungen

$$\gamma_1 \xi_2 + \beta_1 \xi_3 + \alpha_1 \xi_4 = 0,$$
$$\gamma_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_3 + \alpha_2 \xi_4 = 0,$$
$$\gamma_3 \xi_1 + \beta_3 \xi_2 + \alpha_3 \xi_4 = 0,$$
$$\gamma_4 \xi_1 + \beta_4 \xi_2 + \alpha_4 \xi_3 = 0,$$

wo $\xi_i x_i = 1$ gesetzt ist, bestimmte Punkt x_i. Man findet:

$$\xi_1 = \beta_3 \alpha_4 \alpha_2 + \beta_4 \alpha_3 \beta_2,$$
$$\xi_2 = \gamma_4 \alpha_3 \beta_1 + \gamma_3 \alpha_4 \alpha_1,$$
$$\xi_3 = \beta_4 \gamma_2 \alpha_1 + \gamma_4 \alpha_2 \gamma_1,$$
$$\xi_4 = \gamma_2 \beta_3 \beta_1 + \beta_2 \gamma_3 \gamma_1.$$

Die vier Ecken seien durch 1, 2, 3, 4, der letzte Punkt durch 5 bezeichnet. Man hat ferner:

$$f_{11} = f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0,$$
$$f_{12} + f_{21} = -(\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4), \qquad f_{23} + f_{32} = -(\alpha_1 x_1 + \gamma_4 x_4),$$
$$f_{13} + f_{31} = -(\alpha_2 x_2 + \beta_4 x_4), \qquad f_{24} + f_{42} = -(\beta_1 x_1 + \gamma_3 x_3),$$
$$f_{14} + f_{41} = -(\beta_2 x_2 + \beta_3 x_3), \qquad f_{34} + f_{43} = -(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2).$$

Setzt man nun:

$$a = \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4,$$
$$b = \alpha_2 x_2 + \beta_4 x_4,$$
$$c = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3,$$
$$d = \alpha_1 x_1 + \gamma_4 x_4,$$
$$e = \beta_1 x_1 + \gamma_3 x_3,$$
$$f = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,$$

so ist die Gleichung der Brennfläche in symmetrischer Form folgende:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & d & 0 & f \\ c & e & f & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und zugleich wird:

$$f_1 = x_2 a + x_4 c + x_3 b,$$
$$f_2 = x_1 a + x_3 d + x_4 e,$$
$$f_3 = x_1 b + x_2 d + x_4 f,$$
$$f_4 = x_1 c + x_2 e + x_3 f.$$

Aus der Identität:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & u_1 \\ a & 0 & d & e & u_2 \\ b & d & 0 & f & u_3 \\ c & e & f & 0 & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(u_1 u_2 f + a u_3 u_4) p + (u_1 u_4 d + u_2 u_3 c) q + (u_1 u_3 e + u_2 u_4 b) r$$
$$- 2(u_1^2 def + u_2^2 bcf + u_3^2 ace + u_4^2 abd),$$

in welcher zur Abkürzung:

$$p = 2(be + cd - af),$$
$$q = 2(af + be - cd),$$
$$r = 2(af + cd - be)$$

gesetzt ist, erhält man nun die sämmtlichen Knotenpunkte zweiter Art, nämlich:

A_1	als	Schnittpunkt	von	$d = e = f = 0,$
A_2	„	„	„	$b = c = f = 0,$
A_3	„	„	„	$a = c = e = 0,$
A_4	„	„	„	$a = b = d = 0,$
A_5, A_6	„	„	„	$d = c = eb - af = 0,$
A_7, A_8	„	„	„	$a = f = be - cd = 0,$
A_9, A_{10}	„	„	„	$b = e = af - cd = 0,$

Mithin liegen in den Ebenen:

$d = 0$	die	Knotenpunkte	$A_1, A_4, A_5, A_6, 2, 3,$
$a = 0$	„	„	$A_4, A_3, A_7, A_8, 1, 2,$
$b = 0$	„	„	$A_2, A_4, A_9, A_{10}, 1, 3,$
$c = 0$	„	„	$A_2, A_3, A_5, A_6, 1, 4,$
$e = 0$	„	„	$A_1, A_3, A_9, A_{10}, 2, 4,$
$f = 0$	„	„	$A_1, A_2, A_7, A_8, 3, 4.$

Weiter findet man:

dem Punkte $d = e = f = 0$ ist zugeordnet die Ebene

$$E_1 = y_2\gamma_2\xi_2 + y_3\gamma_3\xi_3 + y_4\gamma_4\xi_4 = 0$$

und als Ebene α_1 die Pentaederebene (2 3 4). Ebenso gehört zu:

A_2 die Ebene $E_2 = \gamma_1 y_1\xi_1 + \beta_3 y_3\xi_3 + \beta_4 y_4\xi_4 = 0$ und (1 3 4) als Ebene α_2,

A_3 „ „ $E_3 = \beta_1 y_1\xi_1 + \beta_2 y_2\xi_2 + \alpha_4 y_4\xi_4 = 0$ „ (1 2 4) „ „ α_3,

A_4 „ „ $E_4 = \beta_1 y_1\xi_1 + \alpha_2 y_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 y_3 = 0$ „ (1 2 3) „ „ α_4.

Bei der Untersuchung der Gleichungen

$$d = c = af - be = 0$$

findet man zunächst als dem betreffenden Punkte zugehörige Ebene:

$$y_1(ax_2 + bx_3) + y_2(ax_2 + ex_4) + y_3(bx_1 + fx_4) + y_4(ex_2 + fx_3) = 0$$

und für:

$$e = a\mu,$$

$$f = b\mu,$$

$$(ax_2 + bx_3)(y_1 + \mu y_4) + (x_1 + \mu x_4)(ay_2 + by_3) = 0.$$

Setzt man $\mu = \frac{\gamma_4}{\alpha_1}$, so wird $x_1 + \mu x_4 \equiv d = 0$, also die zugehörige Ebene $d=0$, und die entsprechende Ebene α_5 oder $ay_2 + by_3 = 0$ entsteht aus der Factorenzerlegung der conischen Polare

$$ay_1y_2 + by_1y_3 + ey_2y_4 + fy_3y_4 = (y_1 + \mu y_4)(ay_2 + by_3) = 0.$$

Demnach gehört zu

A_5 die zugeordnete Ebene $d = 0$ und (1 4 5) als Ebene α_5,

A_6 „ „ „ $c = 0$ „ (2 3 5) „ „ α_6,

A_7 „ „ „ $a = 0$ „ (3 4 5) „ „ α_7,

A_8 „ „ „ $f = 0$ „ (1 2 5) „ „ α_8,

A_9 „ „ „ $b = 0$ „ (2 4 5) „ „ α_9,

A_{10} „ „ „ $e = 0$ „ (1 3 5) „ „ α_{10}.

Die Coordinaten der 10 Punkte A haben folgende Werthe:

	A_5	A_6	A_7
x_1	$-\gamma_4(\gamma_2\alpha_1 - \alpha_2\gamma_4)$	$-\gamma_4\beta_2\beta_3$	$-\gamma_2\alpha_4\alpha_3$
x_2	$-\alpha_1\beta_3\gamma_4$	$\beta_3(\beta_1\beta_3 - \beta_2\gamma_1)$	$\alpha_4\gamma_1\alpha_3$
x_3	$\gamma_4\alpha_1\beta_2$	$-\beta_2(\beta_1\beta_3 - \beta_2\gamma_1)$	$-\alpha_1(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3\beta_2)$
x_4	$\alpha_1(\gamma_2\alpha_1 - \alpha_2\gamma_4)$	$\alpha_1\beta_2\beta_3$	$\alpha_3(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3\beta_2)$

	A_8	A_9	A_{10}
x_1	$-\gamma_2(\beta_4\gamma_2-\gamma_4\gamma_1)$	$\gamma_3\beta_1\alpha_2$	$-\gamma_3(\gamma_4\beta_1-\gamma_3\alpha_4)$
x_2	$\gamma_1(\beta_4\gamma_2-\gamma_4\gamma_1)$	$-\beta_4(\alpha_1\beta_4-\alpha_2\gamma_1)$	$-\beta_4\beta_1\gamma_3$
x_3	$-\alpha_4\gamma_1\gamma_2$	$-\alpha_2\beta_1\beta_4$	$\beta_1(\gamma_4\beta_1-\gamma_3\alpha_4)$
x_4	$\alpha_3\gamma_2\gamma_1$	$\alpha_2(\alpha_1\beta_4-\alpha_2\gamma_1)$	$\alpha_2\gamma_3\beta_1$

in der einem Knotenpunkte entsprechenden Verticalreihe sind jedesmal die Werthe seiner vier Coordinaten angegeben. Vermöge dieser Werthe bestätigt man nun, dass die Ebenen E ebenfalls durch je sechs Knotenpunkte gehen, und zwar

E_1 durch 1, 5, A_1, A_5, A_{10}, A_8,
E_2 „ 2, 5, A_2, A_6, A_8, A_9,
E_3 „ 3, 5, A_3, A_6, A_7, A_{10},
E_4 „ 4, 5, A_4, A_5, A_7, A_9.

Nunmehr aber wird es möglich, jeden der 10 Knoten in einer übersichtlicheren Weise zu bezeichnen. Bezeichnet man nämlich jeden Knoten durch die drei Eckpunkte derjenigen Pentaederebene, welche ihm selbst als Ebene α zugeordnet ist, so wird:

$A_1 = (2\,3\,4)$, $A_6 = (2\,3\,5)$,
$A_2 = (1\,3\,4)$, $A_7 = (3\,4\,5)$,
$A_3 = (1\,2\,4)$, $A_8 = (1\,2\,5)$,
$A_4 = (1\,2\,3)$, $A_9 = (2\,4\,5)$,
$A_5 = (1\,4\,5)$, $A_{10} = (1\,3\,5)$.

Desgleichen möge auch jede der 10 Ebenen, welche den eben genannten Punkten entsprechen, durch dasselbe Symbol bezeichnet werden. Man hat alsdann:

$\mathsf{E}_1 = [2\,3\,4]$, $a = [3\,4\,5]$,
$\mathsf{E}_2 = [1\,3\,4]$, $c = [2\,3\,5]$,
$\mathsf{E}_3 = [1\,2\,4]$, $f = [3\,2\,5]$,
$\mathsf{E}_4 = [1\,2\,3]$, $b = [2\,4\,5]$,
$d = [1\,4\,5]$, $e = [1\,3\,5]$.

Nunmehr kann man die Beziehungen der Brennfläche zu dem Pentaeder der Wendefläche, sowie die Gruppirung ihrer 10 singulären Tangentenebenen zu den 10 Knotenpunkten zweiter Art durch das folgende Schema darstellen:

(123)	123	[123]	4	5	(123)	(451)	(452)	(453)
(234)	234	[234]	1	5	(234)	(154)	(152)	(153)
(134)	134	[134]	2	5	(134)	(253)	(251)	(254)
(124)	124	[124]	3	5	(124)	(351)	(354)	(352)
(145)	145	[145]	2	3	(145)	(234)	(231)	(234)
(345)	345	[345]	1	2	(345)	(123)	(124)	(125)
(235)	235	[235]	1	4	(235)	(142)	(143)	(145)
(125)	125	[125]	3	4	(125)	(341)	(342)	(345)
(245)	245	[245]	1	3	(245)	(134)	(132)	(135)
(135)	135	[135]	2	4	(135)	(241)	(243)	(245)

In der ersten Colonne steht der betreffende Punkt, in der zweiten die Pentaederebene, welcher demselben entspricht, in der dritten die ihm zugehörige Ebene des Systems; die folgenden sechs Colonnen geben die 6 Knotenpunkte an, durch welche jene letztere Ebene hindurchgeht.

Ich führe endlich noch die Gleichung der Wendefläche an. Sie lässt sich, wie eine einfache Rechnung zeigt, in die Form:

$$\mathsf{E}_4 x_1 x_2 x_3 + \mathsf{E}_3 x_1 x_2 x_4 + \mathsf{E}_1 x_2 x_3 x_4 + \mathsf{E}_2 x_1 x_3 x_4 = 0$$

bringen, welche unmittelbar die 20 auf jener Fläche gelegenen Geraden erkennen lässt. Jede der 10 Geraden, welche nicht zwei singuläre Punkte des Systems verbindet, liegt in einer Ebene des Pentaeders und schneidet die Verbindungslinie der beiden anderen Eckpunkte desselben. Ausserdem folgt aus der Identität:

$$\xi_1 \mathsf{E}_1 + \xi_2 \mathsf{E}_2 + \xi_3 \mathsf{E}_3 + \xi_4 \mathsf{E}_4 = 0,$$

dass alle 4 Ebenen E durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Bezeichnet man diesen durch 6, so lassen sich die Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 durch die Symbole: 615, 625, 635, 645, darstellen.

§ VII.

Die singulären Tangenten des Systems.

Wie schon bemerkt, ist jede Gerade des Raumes in $n-1$ Punkten Tangente des Systems. Es knüpft sich hieran eine Theorie der singulären Tangenten, welche vollständig der von Herrn Schubert zuerst vollendeten Theorie der Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche parallel läuft. Ich werde mich daher im Folgenden der von Herrn Schubert eingeführten Bezeichnungsweise bedienen. Ein beliebiger jener $n-1$ Punkte mag durch p_i bezeichnet werden. Dem Symbole ε_2 entspricht der Umstand, dass zwei dieser Punkte auf ihrem

Träger coincidiren, dieser ist dann eine Haupttangente, welche, sowie auch ihr ausgezeichneter Berührpunkt, durch ε_2 ebenfalls bezeichnet werden soll. Die Geraden ε_2 bilden den oben beschriebenen *Complex C der Haupttangenten*. Dem Symbol ε_3 entspricht die stationäre Haupttangente, dieselben bilden ein *Strahlensystem*, die Punkte ε_3 selbst eine dem System *covariante Fläche* Σ. Und weiter existirt eine auf Σ liegende *Curve* K, gebildet von den Punkten ε_4, derselben ist zugeordnet die *Regelfläche* R der Tangenten ε_4. Endlich hat man eine *bestimmte Zahl* von Tangenten ε_5, es ist die der Rückkehrerzeugenden von R.

Für $n = 3$ wird die Fläche Σ eine Regelfläche, gebildet von den geradlinigen Haupttangentencurven des Systems. Für $n = 4$ muss die Curve K aus einzelnen Geraden bestehen, welche das Analogon der 27 Geraden auf der Fläche dritter Ordnung bilden. Für $n = 5$ existiren im Allgemeinen keine geradlinigen Haupttangentencurven — auch die Fläche vierter Ordnung enthält im Allgemeinen keine Geraden mehr — und erst für $n = 6$ wird eine von Null verschiedene Anzahl von Tangenten ε_5 auftreten, deren Bestimmung dem Problem der fünfpunktigen Tangenten analog ist.

Ich habe im Vorigen nur einen Theil der einschlägigen Fragen berührt, weil es sich hier nicht um eine systematische Uebersicht aller aus singulären Tangenten gebildeten Configurationen handeln kann. Im Folgenden werde ich die wichtigsten der oben aufgeworfenen Fragen beantworten und mich dabei zunächst hauptsächlich algebraischer Methoden bedienen.

1) Die Tangenten ε_3 und ε_{22}.

Die ersteren sind Rückkehrkanten der Complexkegel von C, Wendekanten seiner Complexcurven. Da die Steiner-Cayley'sche Curve in einer Ebene $3(n-3)(2n-1)$ Inflexionen etc. hat, so findet man:

Das Strahlensystem der ε_3 *ist von der Ordnung* $(n-3)(n^2+2)$, *der Classe* $3(n-3)(2n-1)$.

Das Strahlensystem der Tangenten ε_{22} *ist von der Ordnung* $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$, *der Classe* $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+5-2)$.

Die Classenzahl der ε_3 bestimmt man algebraisch wie folgt: Man hat auszudrücken, dass eine in der Ebene $a_x = 0$ liegende ε_2 die zu dieser Ebene gehörige Hesse'sche Curve berührt. Nun ist letztere gegeben durch:

$$V = \begin{vmatrix} a \\ a \end{vmatrix} = 0, \quad a_x = 0$$

und die zu einem Punkte x derselben gehörige ε_2 durch:

$$\sum y_i f_i = 0, \quad a_y = 0.$$

Soll diese die Fläche V berühren, so hat man diesen Gleichungen noch die folgenden

$$b_y = 0, \quad \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} y_i = 0$$

hinzuzufügen und erhält so die Determinantenrelation:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \frac{\partial V}{\partial x_3} & \frac{\partial V}{\partial x_4} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix} = 0,$$

aus welcher der Factor b_x auszuscheiden ist. Mithin hat das System:

$$\Psi = 0, \quad V = 0, \quad a_x = 0$$

$12(n-1)^2$ Lösungen, von denen zunächst die des Systemes

$$a_x = 0, \quad b_x = 0, \quad V = 0$$

auszuscheiden sind. Ausserdem aber haben die Curven $V = 0$, $\Psi = 0$ in der Ebene $a_x = 0$, wie sich zeigen lässt, in den $n^2 - n + 1$ zu dieser gehörigen singulären Punkten Doppelpunkte mit gemeinsamen Tangenten, woraus

$$12(n-1)^2 - 3(n-1) - 6(n^2 - n + 1) = 3(n-3)(2n-1)$$

sich wie oben ergiebt.

2) Die Tangenten ε_3, deren Berührpunkte ε_3 in einer Ebene $a_x = 0$ liegen, bilden eine Regelfläche G, deren Gleichung sich ergeben muss, wenn man aus

$$a_x = 0,$$
$$\sum y_i f_i = 0,$$
$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0,$$
$$\sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0$$

die x eliminirt. Die Resultante muss den Factor a_y^6 enthalten und wird daher vom Grade $2(n-2)(3n+1)$ in den y. Also:

Die Regelfläche der Tangenten ε_3, deren Berührpunkte ε_3 in einer Ebene liegen, ist vom Grade $2(n-2)(3n+1)$.

Diese Fläche schneidet die Ebene selbst in einer Curve $2(n-2)(3n+1)$. Ordnung, welche aus $3(n-3)(2n-1)$ Geraden, den Tangenten ε_3 in dieser Ebene, und der Durchschnittscurve von Σ mit derselben besteht. Also: *Die Ordnung der Fläche Σ ist gleich* $(11n - 13)$*).

*) Für $n = 2$ verliert die Zahl ihre Bedeutung.

3) Man kann die Gleichung von Σ vollständig aufstellen, indem man sich der Methode bedient, welche Clebsch zur Ermittelung der Fläche angewandt hat, welche die Berührungspunkte der vierpunktigen Tangenten aus einer algebraischen Fläche ausschneidet.

Man hat nämlich aus den Gleichungen:

$$\sum y_i f_i = 0,$$
$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0,$$
$$\sum y_i y_k y_i f_{iki} = 0,$$
$$c_y = 0$$

die y zu eliminiren. Nimmt man statt dieser die gleichbedeutenden:

$$\sum y_i f_i = 0,$$
$$\sum y_i y_k (f_{ik} + f_{ki}) = 0,$$
$$(a_y)^3 = (b_y)^3 = \sum y_i y_k y_i (f_{iki} + f_{kii} + f_{iik}) = 0,$$
$$c_y = 0$$

und versteht nun unter $\binom{a}{c}$, wie früher, die mit den a, c geränderte Determinante Δ', so kann man das Eliminationsresultat zunächst in die Form bringen:

$$\left[c\binom{a}{d} - a\binom{c}{d}\right]$$
$$\times \left[4\left(c\binom{a}{d} - a\binom{c}{d}\right)^2 - 3\binom{d}{d}\left(c^2\binom{a}{a} - 2ac\binom{a}{c} + a^2\binom{c}{c}\right)\right] = 0.$$

Auf Grund der weiteren Relationen:

$$a_y^2 a_i = \sum y_k y_i (f_{kii} + f_{iki} + f_{iik}),$$
$$a_y a_i a_i = \sum y_k (f_{kii} + f_{iki} + f_{iik}),$$
$$a_x^2 a_i = (n-1)(n-2) f_i,$$
$$a_x^2 a_i a_k = (n-2)(f_{ik} + f_{ki})$$

und der daraus folgenden:

$$a^2\binom{a}{c} = -(n-2)\Delta' c_x,$$
$$a\binom{a}{a} = -4(n-2)\Delta',$$
$$a\binom{a}{c}\binom{a}{d} = -(n-2)\Delta'\binom{c}{d},$$

welche ganz mit den von Clebsch entwickelten übereinstimmen, erhält man nun auch das Eliminationsresultat in der Form:

$$\binom{b}{a}\binom{a}{a}\binom{b}{b} - 4\Delta'\binom{b}{a}\binom{a\,b}{a\,b} = 0.$$

Bezeichnet man die Coefficienten $f_{ikl} + f_{lik} + f_{kil}$ durch u_{ikl}, die ersten und zweiten Unterdeterminanten von Δ' durch Δ'_{ik}, $\Delta'_{ik,lm}$, so kann man das erste Glied in:

$$\Theta = \sum \Delta'_{mn}\Delta'_{pq}u_{mnr}u_{pqs},$$

das zweite in

$$\Phi = \sum \Delta'_{mn}\Delta'_{pq,rs}u_{mpq}u_{nrs}$$

verwandeln und erhält so die explicite Darstellung:

$$\sum = \Theta - 4\Delta'\Phi = 0.$$

Wie man sieht ist auch hier Θ von der Form:

$$\binom{\alpha}{\alpha},$$

falls man zur Abkürzung $\alpha_i = \Sigma\Delta'_{mn}u_{mni}$ setzt.

Aus der Form von Σ geht nun der weitere Satz hervor:

Die Flächen Δ' und Σ berühren sich in allen gemeinsamen Punkten, also in einer Curve $2(n-1)(11n-13)$. Grades.

Dies letztere Resultat lässt sich auch direct ableiten. Denn die Punkte der Brennfläche sind definirt durch das Bestehen der vier linearen Gleichungen:

$$\sum y_i(f_{ik} + f_{ki}) = 0$$

und die Producte (y_iy_k) sind proportional den Δ'_{ik}. Soll nun eine parabolische Haupttangente zugleich eine ε_3 sein, so muss noch die weitere Bedingung:

$$\sum y_iy_ky_lf_{ikl} \equiv \sum \Delta'_{ik}y_lf_{ikl} = \sum \beta_iy_i = 0$$

erfüllt werden. Man hat also die Curve zu betrachten, welche sämmtlichen Determinanten der Matrix:

$$\left\|\begin{matrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & \beta_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & \beta_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & \beta_3 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & \beta_4 \end{matrix}\right\|$$

gemeinsam ist. Nach bekannten Principien*) ist dieselbe aber von der Ordnung:

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Geometrie d. R. S. 590.

$$6(n-1)^2+4(n-1)(4n-5)=2(n-1)(11n-13)$$

wie oben gefunden wurde.

Und wenn man mit der Gleichung jener Curve noch die weitere Bedingung:

$$\Psi=\sum y_i y_k y_l y_m f_{iklm}\equiv\sum \Delta'_{ik}\Delta'_{lm}f_{iklm}=0$$

verbindet, so gewinnt man den Ausdruck dafür, dass eine von einem Punkte der Brennfläche auslaufende ε_3 zur ε_4 wird.

Nun hat die Fläche Σ in den singulären Punkten *sechsfache Punkte*, weil von jedem derselben sechs stationäre Haupttangenten nach verschiedenen Richtungen auslaufen. Sie hat ferner in den Knoten zweiter Art der Brennfläche aus demselben Grunde *dreifache* Punkte. Mithin muss die Berührungscurve von Δ' und Σ in den n^3-n^2+n-1 singulären Punkten und den $10(n-1)^3$ Knoten zweiter Art selbst sechsfache und dreifache Punkte haben. Die Fläche Ψ von der Ordnung $7n-9$ hat dagegen in den Knoten zweiter Art, wo alle Δ'_{ik} verschwinden, selbst *Doppelpunkte;* in den singulären Punkten, wo die Δ'_{ik} den x proportional werden, aber *vierfache* Punkte. *Somit bleibt als Zahl der Punkte der Brennfläche, von denen Tangenten ε_4 ausgehen:*

$$2(n-1)(11n-13)(7n-9)-60(n-1)^3-24(n^3-n^2+n-1)$$
$$=10(n-3)(n-1)(7n-5).$$

Für den Fall $n=4$ erhält man $30\,.\,23$ Punkte. Aber jede Tangente ε_4 muss dann die Brennfläche in 6 Punkten berühren. Mithin beträgt die Zahl der geradlinigen Haupttangentencurven für $n=4$ 115; *diese* 115 *Geraden liegen gleichzeitig auf der Fläche* 31. *Ordnung Σ und bilden das Analogon der* 27 *Geraden auf der Fläche dritter Ordnung.*

Die Curve K der Berührungspunkte ε_4 der Tangenten ε_4 lässt sich nun ebenfalls bestimmen. Zunächst findet man:

Die Curve K *berührt die Brennfläche in allen mit ihr gemeinsamen Punkten.* Denn K liegt auf Σ und muss deshalb die Brennfläche überall, wo sie dieselbe trifft, berühren. Da nun K durch keinen der singulären Punkte, sowie der Knoten zweiter Art hindurchgehen kann, so muss die soeben bestimmte Zahl gleich der Hälfte der Zahl der Schnittpunkte von K und Δ' sein, d. h.:

Die Ordnung der von den Berührpunkten ε_4 der Tangenten ε_4 gebildeten Curve ist

$$\varepsilon_4 b_4=5(n-3)(7n-5).$$

4) Die Regelfläche R der Tangenten ε_4. Um die Ordnung derselben zu finden, hat man aus den Gleichungen:

$$\alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0, \quad \sum y_i f_i = 0,$$
$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0, \qquad \sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0,$$
$$\sum y_i y_k y_l y_m f_{iklm} = 0,$$

die y zu eliminiren. Setzt man die Werthe derselben aus den drei ersteren linearen Gleichungen in die drei letzten ein, so hat man drei Flächen V, F, G von der Ordnung $3n-1$, $4n-2$, $5n-3$, deren wesentliche Schnittpunkte die gesuchte Zahl $\varepsilon_4 g$ geben. Da nun y ein Punkt einer bestimmten Geraden $(\alpha\beta)$ ist, kann man auch setzen:

$$y_i = z_i + \lambda \zeta_i$$

und erhält

$$\lambda \sum \zeta_i f_i + \sum z_i f_i = 0.$$

Man erkennt so, dass V, F, G die *Polare* von $(\alpha\beta)$ zur 2, 3 und vierfachen Curve haben. Andererseits aber überzeugt man sich leicht, dass:

$$y_i = \varkappa x_i + \mu_i \alpha_x + \nu_i \beta_x$$

gesetzt werden kann. Denn wenn man:

$$y_i = \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_i}$$

setzt, wo:

$$\Omega = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix},$$

so erkennt man durch Multiplication von Ω mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix},$$

dass Ω auch in der Gestalt $\alpha_x A + \beta_x B + \gamma_x C$ geschrieben werden kann, womit die y die oben angegebene Form erhalten. Demgemäss ist weiter zu setzen:

$$\alpha_x \sum \mu_i f_i + \beta_x \sum \nu_i f_i = 0.$$

Trägt man nun die $y_i = \varkappa x_i + \xi_i$ in die Form:

$$H = \sum y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_p} f_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

ein, so erhält man wegen

$$\sum f_i \xi_i = 0:$$

$$H = \alpha_1 \varkappa^{p-2} \sum \xi_i \xi_k f_{ik} + \alpha_2 \varkappa^{p-3} \sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} + \cdots \sum \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_p} f_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

wo die $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ Zahlenfactoren sind. Der Factor $\varkappa$ aber ist, wie aus dem obigen hervorgeht, die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \sum a_i f_i & \sum b_i f_i & \sum c_i f_i \\ \sum a_i \alpha_i & \sum b_i \alpha_i & \sum c_i \alpha_i \\ \sum a_i \beta_i & \sum b_i \beta_i & \sum c_i \gamma_i \end{vmatrix}.$$

Und für diejenigen Werthe von x, für welche:

$$\sum z_i f_i = 0, \quad \sum \xi_i f_i = 0, \quad \sum z_i \alpha_i = 0, \quad \sum z_i \beta_i = 0,$$
$$\sum \xi_i \alpha_i = 0, \quad \sum \zeta_i \beta_i = 0,$$

muss offenbar die Beziehung stattfinden:

$$f_i = \alpha_i + \varrho \beta_i.$$

Daher verschwindet $\varkappa$ überall dann, wenn $\Sigma z_i f_i = 0$, $\Sigma \xi_i f_i = 0$, d. h. auf der Polare von $(\alpha\beta)$. Mithin kann man für die drei Flächen

$$V = \xi_i \xi_k f_{ik} = 0,$$
$$F = \varkappa \alpha_1 \sum \xi_i \xi_k f_{ik} + \sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} = 0,$$
$$G = \varkappa^2 \beta_1 \sum \xi_i \xi_k f_{ik} + \varkappa \beta_2 \sum \xi_i \xi_2 \xi_l f_{ikl} + \sum \xi_i \xi_k \xi_l \xi_m f_{iklm} = 0$$

auch die drei neuen Flächen

$$V' = V = 0,$$
$$F' = F - \varkappa \alpha V = 0,$$
$$G' = G - \varkappa \beta_2 (F - \varkappa \alpha V) - \varkappa^2 \beta_1 V = 0$$

setzen, welche nun sowohl $(\alpha\beta)$ als seine Polare als 2, 3, 4 fache Linien enthalten müssen. Nunmehr hat man die auf diese Curven entfallenden Schnittpunkte der 3 Flächen zu ermitteln.

Dazu benutze man die von Herrn Nöther gegebene Regel:*)

Wenn drei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, welche zwei gemeinsame Curven C und C' von den Ordnungen m und m', dem Range r und r' besitzen, die sich in s Punkten begegnen, so ist die Zahl der den drei Flächen gemeinsamen nicht auf diesen Curven liegenden Punkte gleich:

*) Nöther, Sulle curve multiple di superficie algebriche, Ann. di mat. ser. II, 5. p. 165.

$$n_1 n_2 n_3 - \mathsf{M}_1 - \mathsf{M}_2 + \mu$$

wo:

$$\mathsf{M}_1 = m\,[i_2\, i_3\, n_1 + i_3\, i_1\, n_2 + i_1\, i_2\, n_3] - 2\, i_1\, i_2\, i_3 \left(m + \frac{r}{2}\right),$$

$$\mathsf{M}_2 = m'[i_2' i_3' n_1 + i_3' i_1' n_2 + i_1' i_2' n_3] - 2 i_1' i_2' i_3' \left(m' + \frac{r'}{2}\right),$$

$$\mu = s\ [i_2' i_3' i_1 + i_3' i_1' i_2 + i_1' i_2' i_3 - i_1' i_2' i_3']$$

falls jene Curven auf den genannten Flächen, je i_1, i_2, i_3; i_1', i_2', i_3',-fache Curven sind und zwei der Zahlen i gleich oder grösser sind als die correspondirenden Zahlen i' sind.

Man hat nun im vorliegenden Falle:

$$n_1 = 3n - 1,\quad i_1 = 2 = i_1',\quad m = 1,\quad m' = n^2,$$
$$n_2 = 4n - 2,\quad i_2 = 3 = i_3',\quad r = 0,\quad r' = 2n^2(n-1),$$
$$n_3 = 5n - 3,\quad i_3 = 4 = i_3',\quad s = n - 1$$

also für die Zahl $\varepsilon_4 g$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 g &= (3n-1)(4n-2)(5n-3)\\ &\quad -(n^2+1)[12(3n-1)+8(4n-2)+6(5n-3)-48-48(n-1)]\\ &= 10(n-4)(n^2-1).\end{aligned}$$

In derselben Weise bestimmt man die Ordnung einer Covariante von Σ, *nämlich der Fläche X, welche von den einfachen Berührungspunkten auf allen ε_3 gebildet wird, oder die Zahl $\varepsilon_3 p^2$.* Man hat nämlich die Zahl der gemeinsamen Lösungen x der Gleichungen:

$$\alpha_y = 0,\quad \beta_y = 0,\quad \sum y_i f_i = 0,$$
$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0,\quad \sum y_i y_k y_i f_{ikl} = 0,$$
$$\sum x_i f_i = 0$$

zu ermitteln.

Man erhält:

$$n_1 = 3n - 1,\quad i_1 = 2,\quad i_1' = 2,\quad m = n^2,\qquad m' = 1,$$
$$n_2 = 4n - 2,\quad i_2 = 3,\quad i_2' = 3,\quad r = 2n^2(n-1),\quad r' = 0,$$
$$n_3 = n^2 + 1,\quad i_3 = n,\quad i_3' = 4,\quad s = n - 1,\qquad n \geqq 4,$$

mithin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 p_1^2 &= (3n-1)(4n-2)(n^2+1)\\ &\quad -n^2[(3n-1)3n+(4n-2)2n+(n^2+1)6-12n-12n(n-1)]\\ &\quad -[(3n-1)12+8(4n-2)+6(n^2+1)-48]\\ &\quad +(n-1)(6n+24)\\ &= (n-4)(n^3+n^2+12n-12).\end{aligned}$$

Und setzt man weiter:

$$\alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0, \quad \sum y_i f_i = 0,$$
$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0,$$
$$\sum x_i f_i = 0, \quad \sum x_i x_k f_{ik} = 0,$$

so erhält man die Zahl $\varepsilon_{22} b_2^2$ der Tangenten ε_{22}, bei denen einer der Punkte ε_2 auf einer gegebenen Geraden liegt, oder *die Ordnung der von den Berührungspunkten der ε_{22} gebildeten Fläche Ω (Doppeltangentenfläche).* Hier wird:

$$n_1 = 3n - 1, \quad i_1 = 2, \quad i_1' = 2, \quad m = n^2 \quad m' = 1,$$
$$n_2 = n^2 + 1, \quad i_2 = n, \quad i_2' = 3, \quad r = 2n^2(n-1), \quad r' = 0,$$
$$n_3 = n(n-1)+2, \quad i_3 = n-1, \quad i_3' = 3, \quad s = (n-1), \quad n \geq 4,$$

und man erhält:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} b_2^2 = {} & (3n-1)(n^2+1)(n^2-n+2) \\ & - n^2[(3n-1)n(n-1)+2(n-1)(n^2+1)+2n(n^2-n+2) \\ & \qquad -4n(n-1)-4n(n^2-1)] \\ & -[12(3n-1)+6(n^2+1)+8(n^2-n+2)-48] \\ & +(n-2)[8(n-1)+6n+2.12-24] \\ = {} & (n-1)(n-4)(3n+11).\end{aligned}$$

5) Zieht man von jedem Punkte P einer Geraden $(\alpha\beta)$ eine Tangente ε_2, welche in P einen Berührungspunkt p_1 hat, so hat man die Gleichungen:

$$\alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0, \quad \sum y_i f_i = 0,$$
$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0, \quad \sum x_i f_i = 0,$$

in denen x der Punkt ε_2 ist. Aus diesen ergeben sich zwei Flächen V und F' mit 2- und n-facher Polare von $(\alpha\beta)$, sowie der 2- und 3-fachen Geraden $(\alpha\beta)$. Ihre eigentliche Schnittcurve ist daher von der Ordnung:

$$(3n-1)(n^2+1) - 6 - 2n^3 = n^3 - n^2 + 3n - 7,$$

da dieselbe $11n - 13$ Punkte mit $(\alpha\beta)$ gemein hat, *bleibt die Zahl $\varepsilon_2 g_1 p_1 = n^3 - n^2 - 8n + 6$ übrig, welche die Ordnung der Curve der einfachen Berührpunkte auf den in einer Ebene liegenden ε_2 angiebt.*

6) Eine willkürliche Gerade wird von Tangenten ε_3 getroffen, welche eine Regelfläche H bilden. Dieselbe ist von der Ordnung $(n-3)(6n^2+6n-1)$ und die Punkte ε_3 bilden auf ihr eine Curve von der Ordnung:

$$11n - 13 + 3(n-3)(2n-1) = 2(n-2)(3n+1).$$

Algebraisch ist dieselbe charakterisirt durch die Gleichungen:

$$\sum y_i f_i = 0, \quad \sum y_i y_k f_{ik} = 0, \quad \sum y_i y_k y_i f_{ikl} = 0,$$
$$\alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0$$

aus denen man zwei Flächen $3n - 1$. und $4n - 2$. Ordnung erhält, welche sowohl die Gerade $(\alpha\beta)$ als ihre Polare zur zwei und dreifachen Linie haben und deren weiterer Schnitt von der Ordnung

$$(3n-1)(4n-2) - 6n^2 - 6 = 2(n-2)(3n+1)$$

jene Curve darstellt.

§ VIII.

Anwendung des Correspondenzprincips zur Bestimmung der Tangentensingularitäten.

Weitere Anzahlbestimmungen gewinnt man mit Hülfe des Correspondenzprincipes. Ich benutze dasselbe zunächst in der folgenden Form:

Befinden sich auf einer Regelfläche p. Ordnung zwei Curven M. und N. Ordnung, welche den Erzeugenden in je μ und ν Punkten begegnen, so beträgt die Anzahl der beiden Curven gemeinsamen Punkte:

$$M\nu + N\mu - \nu\mu p.$$

Eine Curve M. Ordnung, welche jeder Erzeugenden einer Regelfläche p. Ordnung in μ Punkten begegnet, berührt dieselben in

$$(\mu-1)[2M - p\mu]$$

Punkten.

1) Von sämmtlichen Punkten einer Geraden g gehen je zwei Tangenten ε_2 aus, bei denen der Punkt ε_2 auf g selbst liegt. Sie bilden eine Regelfläche $3n - 1$. Ordnung, welche eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{3}{2}(n-1)(3n-4) + n - 1$ und eine Doppelgerade besitzt. Aus der hiermit gegebenen Classe $10(n-1)$ ihres ebenen Schnittes findet man die Zahl:

$$2[10(n-2) - 3n + 1]$$

ihrer singulären Erzeugenden. Solche entstehen aber erstens in den Punkten, wo die Leitgerade g von der Brennfläche getroffen wird. Nach Abzug derselben bleiben:

$$10(n-1) - 4$$

übrig, deren Zahl angiebt, *wie oft die in den Ebenen durch g gelegten Hesse'schen Curven des Systems mit g eine Berührung eingehen.* Auf den Erzeugenden der Regelfläche bilden die weiteren Punkte p_1 eine Curve der Ordnung

$$M = 11n - 13 + 3(n-1)(n-3).$$

Setzt man also $p = 3n - 1$, $\mu = n - 3$, so findet man:

$$\varepsilon_{22} b_2^2 = (n-4)[2(11n-13)+6(n-1)(n-3)-(n-3)(3n-1)$$
$$= (n-1)(n-4)(3n+11),$$

2) Bezeichnet man die Anzahl der Tangenten ε_{22} in einer Ebene durch α, durch einen Punkt mit β, so ist die Ordnung der Regelfläche der eine Gerade schneidenden ε_{22} gleich $\alpha + \beta$ Die von den Punkten ε_2 gebildete Curve auf den Erzeugenden ist von der Ordnung

$$2\alpha + \varepsilon_{22} b_2^2.$$

Daraus gewinnt man die Zahl der Tangenten ε_4, welche eine Gerade schneiden:

$$g\varepsilon_4 = 10(n-4)(n^2-1),$$

falls man

$$\mathsf{M} = 2\alpha + \varepsilon_{22} b_2^2, \quad \mu = 2, \quad p = \alpha + \beta = (n-3)(n-4)(n^2+3n)$$

setzt.

3) Auf jeder Erzeugenden der Regelfläche H (§ VII, 6) liegen $n - 4$ weitere Punkte, welche eine Curve von der Ordnung

$$3(n-3)(2n-1)(n-4) + \varepsilon_3 p_1^2$$

bilden.

Setzt man:

$$\mathsf{M} = 2(n-2)(3n+1), \quad \mu = 1,$$
$$\mathsf{N} = 3(n-3)(n-4)(2n-1) + \varepsilon_3 p_1^2, \quad \nu = n - 4,$$
$$p = (n-3)(n^2+6n-1),$$

so hat man aus der Gleichung

$$g\varepsilon_4 = \mathsf{M}\nu + \mathsf{N}\mu - \nu\mu p$$

die Formel

$$\varepsilon_3 p_1^2 = (n-4)(n^3+n^2+12n-12).$$

Und die Anzahl der Berührungen jener Curve mit den Erzeugenden liefert die Zahl $g\varepsilon_{32}$, d. h. *die Zahl der Tangenten* ε_{32}, *welche eine Gerade schneiden*,

$$g\varepsilon_{32} = (n-4)(n-5)(n^3+11n^2+n-9).$$

4) Die Zahl $\varepsilon_3 p_1^2$ erhält man auch auf folgendem Wege. Man betrachte die Regelfläche von Tangenten ε_2, welche einen weiteren Punkt p_1 auf einer Geraden g haben. Die Ordnung derselben ist nach § VII, 5

$$p = n^3 - n^2 - 8n + 6 + (n+1)(n-2) - 4 = (n-3)(n^2+3n);$$

denn durch einen Punkt von g gehen $(n-2)(n+1) - 4$ Erzeugende, in einer Ebene durch g liegen $n^3 - n^2 - 8n + 6$. Auf den Erzeugenden liegt die von weiteren Punkten p_1 gebildete Curve von der Ordnung:

$$\mathsf{M} = (n-4)(n^3-n^2-8n+6) + \varepsilon_{22} b_2^2, \quad \mu = n - 4;$$

die Ordnung der von den Punkten ε_2 gebildeten Curve ist:

$$\mathsf{N} = n^3 - n^2 - 8n + 6 + 11n - 13, \quad \nu = 1.$$

Beide Curven treffen sich daher in

$$\varepsilon_3 p_1^2 = (n-4)(n^3+n^2+12n-12)$$

Punkten. Und die Curve M berührt die Erzeugenden in

$$\tfrac{1}{2}(n-4)(n-5)(n^3+4n^2+9n-10) = \varepsilon_{22} p_1^2$$

Punkten.

5) Die Regelfläche der Tangenten ε_{22}, welche eine Gerade schneiden, ist nach 2) von der Ordnung

$$p = (n-3)(n-4)(n^2+3n).$$

Und die Ordnung der Curve der Berührpunkte ε_2 auf ihren Erzeugenden

$$\mathsf{M} = (n-3)(n-4)(n^2+5n-2) + \varepsilon_{22} b_2^2, \ \mu = 2;$$

ferner die Curve der weiteren Punkte p_1 auf denselben von der Ordnung:

$$\mathsf{N} = \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+5n-2) + \varepsilon_{22} p_1^2, \quad \nu = n-5.$$

Hieraus findet man

$$g\varepsilon_{32} = (n-4)(n-5)(n^3+11n^2+n-9)$$

wie in Nr. 3) und

$$g\varepsilon_{222} = \tfrac{1}{3}(n-4)(n-5)(n-6)[(n-3)(n^2+5n-2)+n^2+4n^2 + 9n-10-(n-3)(n^3+3n)]$$
$$= \tfrac{1}{3}(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+6n^2+n-4).$$

Dies ist die Ordnung der Regelfläche der dreifachen Haupttangenten des Systems.

6) In einer Ebene giebt es $n^2 - 1$ Tangenten, welche zwei ihrer Punkte p_1, p_2 auf zwei in dieser gegebenen Geraden haben. Dagegen ist die Zahl der Tangenten mit einfachen Berührpunkten auf 2 windschiefen Geraden gleich $n^2 + 1$. Von den Punkten einer Geraden g ziehe man nun Tangenten, welche auf dieser einen Punkt p_1 und in einer festen Ebene einen Punkt p_2 haben. Dieselben bilden eine Regelfläche mit n-facher Leitlinie g von der Ordnung $n^2 + n - 1 = p$. Die von den weiteren Punkten auf ihren Erzeugenden gebildeten Curve ist von der Ordnung:

$$(n^2-1)(n-3) + 11n - 13 + 3(n-1)(n-3) = \mathsf{M}.$$

Daraus folgt: Es giebt

$$p_1^2 p_2 p_3 = (n-3)(n^2+3n-4) + (11n-13)$$

Tangenten, welche zwei Berührpunkte auf gegebenen Ebenen, einen dritten auf gegebener Geraden haben, und es giebt

$$\varepsilon_2 p_1^2 p_2 = (n-4)(n^3+2n^2-5)$$

Haupttangenten, welche zwei einfache Berührpunkte auf einer gegebenen Ebene und einer gegebenen Geraden haben.

In derselben Art erhält man noch:

$$gp_1p_2p_3 = (n^2-1)(n-3) + (n^2+3n-4) + 11n - 13,$$
$$g\varepsilon_2p_1p_2 = (n-4)[2(n^2-1)(n-3) + 2p_1^3p_2p_3 - (n-3)(2n^2-n-1)],$$
$$g\varepsilon_2b_2p_1 = (n-3)(n^2+5n-5) + 11n - 13,$$
$$g\varepsilon_{22}b_2 = (n-4)(n^3+5n^2-9n+5).$$

In systematischer Weise wird die Ermittelung aller dieser und ähnlicher Zahlen bewerkstelligt durch den Calcul der abzählenden Geometrie. Ich werde denselben auf die auch bei Herrn Schubert angeführte Tabelle der Symbole:*)

1) ε_2g_s, 2) $\varepsilon_2b_2g_e$;
3) ε_3g_e, 4) ε_3g_p, 5) $\varepsilon_3b_3^2$;
6) $\varepsilon_{22}g_e$, 7) $e_{22}g_p$, 8) $\varepsilon_{22}b_2$, 9) $\varepsilon_{22}b_2c_2$;
10) ε_4g, 11) ε_4b_4;
12) $\varepsilon_{32}g$, 13) $\varepsilon_{32}b_3$, 14) $\varepsilon_{32}b_2$;
15) $\varepsilon_{222}g$, 16) $\varepsilon_{222}b_2$;
17) ε_5, 18), ε_{42}, 19) ε_{33}, 20) ε_{322}, 21) ε_{2222}

anwenden.

Man hat zunächst die Formeln:

1) $\varepsilon_2g_s = G + 2p_1^2g_e,$
2) $\varepsilon_2b_2g_e = p_1p_2g_e - G,$
3) $\varepsilon_3g_e = -3p_1^2g_e - 3G + 3p_1p_2g_e,$
4) $\varepsilon_3g_p = G + 3p_1^3p_2,$
5) $\varepsilon_3b_3^2 = 2p_1^3p_2 + p_1^2p_2p_3 - 2p_1^2p_2^2 - 2p^2g_e + G,$
6) $2\varepsilon_{22}g_e = 4p_1p_2g_e - 3G - 4g_ep^2,$
7) $2\varepsilon_{22}g_p = 4p_2p_1^3 + G,$
8) $\varepsilon_{22}b_2^2 = 2p_1^3p_2 + 2p_1^2p_2p_3 - p_1^3g - 3p_1^2gp_2 + p_1^2g^2,$
9) $\varepsilon_{22}b_2c_2 = p_1^2p_2^2 + 2p_1^2p_2p_3 + p_1p_2p_3p_4 - 2g[p_3p_1^2 + p_1p_2p_3] + g^2p_1p_2,$
10) $\varepsilon_4g = gp_1^3 + 3p_1^2p_2g + 4p_1p_2p_3g - g^2(3p_1^2 + 9p_1p_2) + 6p_1g^3 - g^4,$
11) $\varepsilon_4b_4 = 3p_1^3p_2 + 3p_1^2p_2p_3 + p_1p_2p_3p_4 + 3p_1p_2g^2 - g^3p_1 + 3p_1^2g^2 - g[3p_1^3 + 6p_1^2p_2 + 3p_1p_2p_3],$
12) $\varepsilon_{32}g = 2p_1^2p_2g + 6gp_1p_2p_3 - 11p_1p_2g^2 + 6p_1g^3 - g^2p_1^2 - g^4,$

*) Schubert, Calcul der abzählenden Geometrie. Leipzig 1889, S. 232 u. ff.

13) $\varepsilon_{32} b_3 = 2p_1^3p_2 + 4p_1^2p_2p_3 - 6gp_2p_1^2 - gp_1^3 - p_1g^3 + 2p_1p_2p_3p_4 - 5gp_1p_2p_3 + 4g^2p_1p_2 + 2g^2p_1^2,$

14) $\varepsilon_{32} b_2 = p_1^2p_2^2 + 4p_1p_2p_3^2 + 3p_1p_2p_3p_4 - 5gp_1^2p_2 - 7gp_1p_2p_3 + g^2p_1^2 + 5g^2p_1p_2 - g^3p_1,$

15) $3!g\varepsilon_{222} = 8gp_1p_2p_3 - 12p_1p_2g^2 + 6p_1g^3 - g^4,$

16) $2\varepsilon_{222} b_2 = 4p_1^2p_2p_3 + 4p_1p_2p_3p_4 - 8gp_1p_2p_3 - 4gp_1^2p_2 + 5gp_1p_2 + g^2p_1^2 - g^3p_1,$

17) $\varepsilon_5 = 4p_1^3p_2 + 6p_1^2p_2p_3 + 5p_1p_2p_3p_4 - 12gp_1^2p_2 + 6p_1^2g^2 - 16gp_1p_2p_3 + 18g^2p_1p_2 - 8g^3p_1 + g^4 - 4gp_1^3,$

18) $\varepsilon_{42} = 2p_1^3p_2 + 6p_1^2p_2p_3 - p_1^3g + 8p_1p_2p_3p_4 - 9gp_1^2p_2 - 22gp_1p_2p_3 + 21p_1p_2g^2 + 3p_1^2g^2 - 8p_1g^3 + g^4,$

19) $\varepsilon_{33} = p_1^2p_2^2 + 6p_1p_2p_3^2 + 9p_1p_2p_3p_4 - 8gp_1^2p_2 + 22g^2p_1p_2 + 2p_1^2g^2 + g^4 - 8p_1g^3 - 24gp_1p_2p_3,$

20) $2\varepsilon_{322} = 4p_1^2p_2p_3 + 12p_1p_2p_3p_4 - 4gp_1^2p_2 - 28gp_1p_2p_3 + 23g^2p_1p_2 - 8g^3p_1 + g^2p_1^2 + g^4,$

21) $4!\varepsilon_{2222} = 16p_1p_2p_3p_4 - 32gp_1p_2p_3 + 24g^2p_1p_2 - 8g^3p_1 + g^4.$

Diese Formeln gehen in die von Herrn Schubert gegebenen über, wenn die Symbole $p_1^3p_2$, $p_1^2g_e$ gleich Null gesetzt werden. In denselben kommen die Symbole:

$$p_1p_2p_3p_4,\ p_1^2p_2^2,\ p_1^3p_2,\ p_1p_2p_3^2,$$
$$gp_1p_2p_3,\ gp_1^2p_2,\ gp_1^3,$$
$$g_ep_1p_2,\ g^3p_1,\ p^2g_e,\ p^2g^2,$$
$$g^2p_1p_2,\ g^4,\ G$$

vor, welche mit Hülfe der Formeln:

$$g^4 = 2G,\ gp^3 = p^2g_e,\ pg^3 = 2G + 2p^2g_e,$$
$$p^2g^2 = G + 2p^2g_e,\ p_1^2p_2g = p_1^2p_2^2 + p_1^2g_e = p_1^3p_2 + p_1p_2g_e,$$
$$g^2p_1p_2 = p_2p_1^3 + p_1p_2g_e + G + p^2g_e,$$
$$gp_1^2p_2 = p_2p_1^3 + p_1p_2g_e,$$
$$gp_1p_2p_3 = p_2p_3p_1^2 + p_1p_2g_e$$

auf die *sechs Stammzahlen:*

$$G,\ p_1p_2p_3p_4,\ p_1^3p_2,\ p_1^2p_2p_3,\ p_1^2g_e,\ p_1p_2g_e$$

zurückgeführt werden. Die Werthe dieser letzteren sind aber mit Ausnahme der Zahl $p_1p_2p_3p_4$ in den früheren Untersuchungen (§ VII) direct gegeben, oder unmittelbar aus ihnen zu entnehmen. Man erhält:

$$G = (n-1)(n-2)\cdots(n-i),$$
$$p^2g_e = (n-2)(n-3)\cdots(n-i),$$
$$p_1p_2g_e = (n^2-1)(n-3)\cdots(n-i),$$

$$p_1^3 p_2 = n(n-3)(n-4)\cdots(n-i),$$
$$p_1^2 p_2 p_3 = \{(n-3)(n^2+3n-4) + 11n - 13\}(n-4)\cdots(n-i),$$

Die Zahl $p_1 p_2 p_3 p_4$ berechnet man aus der algebraisch bestimmten Zahl $\varepsilon_4 b_4$ (S. 394), mit Hülfe der Gleichung Nr. 11:

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \varepsilon_4 b_4 - 4p^2 g_e - 4G + 6 p_1 p_2 g_e$$
$$= (n+1)(n-3)(2n^2-2n-1).$$

*Es ist die Zahl der Tangenten, welche auf 4 gegebenen Ebenen je einen Berührungspunkt haben.**) Allgemein ist daher zu setzen:

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = (n+1)(n-3)(2n^2-2n-1)(n-5)\cdots(n-i).$$

Hiernach sind die obigen 21 Anzahlen, soweit sie noch nicht direct bestimmt waren, vollständig bestimmt. So erhält man z. B. *für die Anzahl der Tangenten* ε_5, d. h. der Rückkehrerzeugenden der Fläche R,

$$\varepsilon_5 = 5(n-5)(17n^2-44n+19).$$

Auf demselben Wege gewinnt man aber alle anderen Zahlen, z. B.:

$$\varepsilon_2 p_1^2 p_2 = 2p_1^2 p_2 p_3 - g p_1 p_2^2 = (n-4)(n^3+2n^2-5),$$
$$g\varepsilon_2 p_1 p_2 = 2g p_1 p_2 p_3 - g^2 p_1 p_2,$$
$$g\varepsilon_2 b_2 p_1 = 2g p_1^2 p_2 - g^2 p_1 p_2,$$
$$g\varepsilon_{22} b_2 = 2p_1^2 p_3 g + 2p_1 p_2 p_3 g - 3p_1 p_3 g^2 - p_1^2 g^2 + p_1 g^3$$
$$= (n-4)(n^3+5n^2-9n+5),$$
$$\varepsilon_3 p_1^2 = p_1^2 p_2^2 + 3p_1 p_2 p_3^2 - 4p_1^3 p_2 - 4p_1 p_2 g_e + G + 2p^2 g_e$$
$$= (n-4)(n^3+n^2+12n-12).$$

Man kann die ermittelten Werthe durch andere Formeln des anzahlgeometrischen Calculs bestätigen. Man findet a. a. O. S. 252 die Formeln

1)	$\varepsilon = 5p_{1234} - 10p_{123}^2 + 10p_{12}^3$	für $n=5$,
2)	$\varepsilon g = 4p_{123}^2 - 6p_{12}^2 + 6g_e p_{12} - 8g_e p_1^2$	„ $n=4$,
3)	$\varepsilon g_p = 3p_{12}^3 + 3g_e p_1^2 + G$	„ $n=3$,
4)	$\varepsilon g_e = 3g_e p_{12} - 3g_e p_1^2$	„ $n=3$,
5)	$\varepsilon g_s = 2g_e p_1^2 + G$	„ $n=2$,
6)	$p_1 p_2 p_3 p_4 = s_4 + g_e s_2 - g_e s_1^2 + 2G$	„ $n=4$,
7)	$g p_1 p_2 p_3 = s_3^2 + g_e s_2 + 2G$	„ $n=3$,
8)	$g_p p_1 p_2 = s_2^2 + g_e s_1^2 + G$	„ $n=2$,
9)	$g_e p_1 p_2 = g_e s_2 + G$	„ $n=2$,
10)	$g_s p_1 = g_e s_1^2 + G$	„ $n=1$.

*) Für $n=4$ hat man wieder die 115 ausgezeichneten Geraden des Systems.

Nun ist in 1)

$$p_{1231} = 5(n-3)(n-5)(7n-5),$$
$$p_{123}^2 = (n-4)(n-5)(11n-13),$$
$$p_{12}^3 = 2(n-3)(n-4)(n-5),$$

also

$$\varepsilon = 5(n-5)(17n^2-44n+19),$$

in 2)

$$p_{123}^2 = (11n-13)(n-4),\ p_{12}^3 = 2(n-3)(n-4),$$
$$g_e p_{12} = 3(n-1)(n-3)(n-4);\ g_e p_1^2 = (n-2)(n-3)(n-4),$$

also

$$\varepsilon g = 10(n^2-1)(n-4),$$

in 3)

$$G = (n-1)(n-2)(n-3),\ g_e p_1^2 (n-2)(n-3),$$
$$p_{12}^3 = 2(n-3)$$

also

$$\varepsilon g_p = (n-3)(n^2+2),\ \text{u. s. w.}$$

Ferner bei 6)

$$s_4 = p_{1231},\ s_2 = 6p_{12},\ g_e p_{12} = 3(n-1)(n-3(n-4),$$
$$s_1 = 4p_1^2,\ g_e p_1^2 = (n-2)(n-3)(n-4),$$

also

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = (n+1)(n-3)(2n^2-2n-1),$$

bei 7)

$$s_3 = p_{123}^2 = 11n-13,\ s_2 = 3p_{12},\ g_e p_{12} = 3(n-1)(n-3),$$
$$G = (n-1)(n-2)(n-3),$$

also

$$g p_1 p_2 p_3 = (n-3)(2n^2+3n-5) + 11n - 13 \text{ u. s. w.}$$

§ IX.

Die Doppelcurve der Fläche Σ.

Die beiden einem Punkte x zugehörigen Haupttangenten sind zugleich die Haupttangenten der Fläche

$$F = \sum z_i f_i = 0.$$

Daher drückt das Verschwinden der Hesse'schen Determinante D von F aus, dass x ein parabolischer Punkt ist. Setzt man in dieser Determinante D an Stelle von x wieder z, so muss die Bedingung für zusammenfallende Haupttangenten, d. h. die Gleichung der Brennfläche entstehen. Ganz ebenso kann man die Bedingung dafür auf-

stellen, dass x ein Punkt der Curve vierpunktiger Berührung von F ist; man erhält dann die Gleichung der Fläche Σ.

In derselben Weise kann man einen anderen wichtigen Satz der allgemeinen Flächentheorie übertragen. Die cubische Polarfläche

$$\sum y_m y_k y_i z_i f_{iklm} = 0$$

wird nämlich von der Tangentialebene von F im Punkte x in einer Curve dritter Ordnung C mit Doppelpunkt geschnitten. Dabei gilt der bekannte Satz:

Die Polare $\sum y_k \frac{\partial D}{\partial x_i} = 0$ schneidet die Tangentialebene des Punktes x in einer Geraden, welche die drei Inflexionspunkte von C enthält. Setzt man auch hier $z = x$, und bezeichnet man die Ebene $\sum y_i \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i} = 0$ als *Polare der Brennfläche in Bezug auf den Punkt x*, falls man jeden in der Entwicklung auftretenden Differentialquotienten $f_{ikl} + f_{kil}$ durch den symmetrischen Werth $f_{ikl} + f_{kil} + f_{lik}$ ersetzt, so hat man:

Die 3 Inflexionspunkte der Curve 3. Ordnung C, in welcher die dem Punkte x zugehörige cubische Polarfläche $\Sigma y_i y_k y_l f_{ikl} = 0$ von der zugehörigen Ebene des Systems geschnitten wird, liegen in der Geraden, in welcher seine Ebene die Polare des Punktes in Bezug auf die Brennfläche trifft. Und ebenso findet man: *Für jeden Punkt x der Brennfläche Δ' schneidet die Tangentenebene dieses Punktes sich mit der Polare der Brennfläche in derjenigen Geraden, welche den Wendepunkt in der Curve 3. Ordnung $\Sigma y_i f_i = 0$, $\Sigma y_i y_k y_l f_{ikl} = 0$ mit ihrem in x liegenden Rückkehrpunkte verbindet, der Wendepunktslinie.*

Ein directer Beweis jener beiden Sätze, welche als speciellen Fall wieder das bekannte Theorem der Flächentheorie enthalten, scheint nicht überflüssig zu sein. Ich führe denselben durch Verlegung des fraglichen Punktes x in den Coordinatenanfang $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Die Ebene $x_1 = 0$ sei die zugehörige Tangentenebene, die in ihr liegenden Kanten des Coordinatentetraeders die Tangenten des Doppelpunktes der Curve C. Setzt man nun, wie in § I

$$\begin{aligned} f_1 &= \quad x_2 A + x_3 B + x_4 C, \\ f_2 &= -x_1 A + x_3 D + x_4 E, \\ f_3 &= -x_1 B - x_2 D + x_4 F, \\ f_4 &= -x_1 C - x_2 E - x_3 F \end{aligned}$$

und bezeichnet die Differentialquotienten der $A, B, \ldots$ durch Indices, so muss zunächst sein:

$$E_2 = 0, \quad E_4 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = 0,$$
$$f_{24} + f_{42} = 0, \quad f_{34} + f_{43} = 0, \quad f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0.$$

Nimmt man die Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zur Wendepunktsgeraden der Curve C, so müssen die weiteren Bedingungen:

$$f_{444} = 0,$$
$$2f_{223} + f_{322} = 2f_{322} + f_{233} = 2f_{224} + f_{422} = 2f_{442} + f_{244} = 2f_{334} + f_{433} = 2f_{443} + f_{344} = 0$$

bestehen. Damit aber ergiebt sich als Gleichung der Polare der Brennfläche im Schnitte mit der Ebene $y_1 = 0$:

$$y_2[(f_{32}+f_{24})(f_{142}+f_{241}+f_{421}) - (f_{12}+f_{21})(f_{234}+f_{324}+f_{423})],$$
$$y_3[(f_{23}+f_{32})(f_{143}+f_{413}+f_{314}) - (f_{13}+f_{31})(f_{234}+f_{432}+f_{423})]$$
$$+ y_4 P = 0,$$

wo P einen nicht verschwindenden Ausdruck bedeutet. Man zeigt nun leicht, dass die Coefficienten von y_2 und y_3 verschwinden. Denn für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ hat man:

$$f_{234} + f_{432} + f_{342} = x_4(E_{34}+F_{24}),$$
$$f_{142} + f_{412} + f_{214} = x_4(C_{42}+E_{14}),$$
$$f_{341} + f_{134} + f_{413} = x_4(C_{43}+F_{41}),$$
$$f_{12} + f_{21} = x_4(E_1+C_2) \equiv x_4^2(E_{14}+C_{24}),$$
$$f_{23} + f_{32} = x_4(E_3+F_2) \equiv x_4^2(E_{34}+F_{24}),$$
$$f_{13} + f_{31} = x_4(F_1+C_3) \equiv x_4^2(F_{14}+C_{34}).$$

Und ebenso möge, um den Beweis des zweiten Satzes zu führen, ein beliebiger Punkt der Brennfläche zum Coordinatenanfang $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gewählt werden, und die Wendepunktslinie die Gleichung $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ haben, die Rückkehrtangente der Curve C $y_2 = 0$, $y_1 = 0$ sein. Ist endlich $y_4 = 0$, $y_1 = 0$ die Wendetangente von C, so hat man zu setzen:

$$f_{33} = 0,\ f_{44} = 0,\ f_{23} + f_{32} = 0,\ f_{24} + f_{42} = 0,\ f_{34} + f_{43} = 0,$$
$$f_{222} = 0,\ f_{444} = 0,$$
$$2f_{223} + f_{322} = 2f_{332} + f_{233} = 2f_{334} + f_{433} = 2f_{443} + f_{344} = 2f_{442} + f_{244} = 2f_{224} + f_{422} = 0,$$
$$f_{234} + f_{324} + f_{432} = 0.$$

Dann aber ergiebt sich für $\sum y_i \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i}$, falls man $y_1 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ setzt:

$$(f_{14}+f_{41})^2 f_{22} f_{333} y_3 = 0,$$

wie zu zeigen war.

Die Fläche Σ hat nun zur Doppelcurve die Curve T *derjenigen Punkte, von denen zwei Tangenten ε_3 auslaufen.* Besonders deutlich

sieht man das in dem Falle $n = 3$, wo Σ eine Regelfläche 20. Ordnung wird; die Curve T ist die Doppelcurve derselben. Für jene Curve T zerfällt nun die Curve dritter Ordnung C in die beiden Haupttangenten ε_3 und eine Gerade. Zieht man nun zunächst von einem willkürlichen Punkte des Raumes x eine Gerade, welche die willkürliche Gerade mit den Coordinaten $\lambda a_i + \mu b_i$ und die dem Punkte x zugehörige Curve dritter Ordnung in einem Punkte A trifft, so hat letzterer die Coordinaten:

$$\xi_i = \lambda a_i + \mu b_i + \varrho x_i = h_i + \varrho x_i$$

und es ist:

$$(1) \qquad \sum \xi_i f_i = 0,$$

$$(2) \qquad \sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} = 0.$$

Soll nun A ein Inflexionspunkt der Curve dritter Ordnung sein, so muss die Gleichung:

$$(3) \qquad \sum y_i \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i} = \sum y_i \Delta'_{ik} (f_{kil} + f_{ikl} + f_{lik}) = 0$$

für $y_i = \xi_i$ bestehen. Setzt man die Werthe der ξ in die Gleichungen (1), (2), (3) ein, so ergiebt sich:

$$(4) \qquad \sum h_i f_i = 0,$$

$$(5) \qquad \sum h_i h_k h_l f_{ikl} + \varrho(n-2) \sum h_l h_k (f_{kl} + f_{lk}) = 0,$$

$$(6) \qquad \sum \Delta'_{ik} h_l (f_{ikl} + f_{lik} + f_{kil}) + 4\varrho (n-2)\Delta' = 0.$$

Durch Elimination von ϱ erhält man die Gleichung

$$(7) \qquad \alpha \Delta_3 \Delta' = \Delta_2 \sum h_i \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i}$$

wo α ein numerischer Factor,

$$\Delta_2 = \sum h_i h_k f_{ik}, \qquad \Delta_3 = \sum h_i h_k h_l f_{ikl}$$

zu setzen ist. Trägt man endlich aus (1) das Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ ein, so stellt (7) ein Flächensystem von der Ordnung $8n - 6$ vor, welches aus Σ diejenigen Punkte ausschneidet, deren Verbindungslinie mit einem Wendepunkt der diesem Punkte zugehörigen Curve 3. Ordnung eine willkürliche Gerade schneidet.

Nun erkennt man aber in derselben Weise, wie dies von Clebsch gezeigt ist:

Es giebt ein Flächensystem $8n - 6$. *Ordnung, welches durch die Doppelcurve von* Σ *hindurchgeht.*

Und der Schnitt dieses Systems mit der Fläche Σ besteht aus der Doppelcurve T und den Punkten, deren Tangenten ε_3 jene Gerade (ab) treffen. Nimmt man an, dass jene Punkte dreifach zu zählen sind, so erhält man, da die Curve der Punkte, auf der die Berührpunkte jener ε_3 liegen, von der Ordnung

$$11n - 13 + 3(n-3)(2n-1)$$

ist, *als Ordnung x der genannten Doppelcurve*

$$2x = (11n-13)(8n-6) - 6(n-2)(3n+1),$$
$$x = 5(7n^2-14n+9).$$

Diese Curve hat in den singulären Punkten des Systems $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$ fache, in den Knoten zweiter Art dreifache Punkte. Daher ist die Zahl ihrer in nicht singuläre Punkte entfallenden Schnittpunkte mit der Brennfläche:

$$20n[7n^2-14n+9](n-1) - 30(n^3-n^2+n-1) - 60(n-1)^3$$
$$= 10(n-1)[5n^2-16n+9].$$

Dies ist die Zahl der Punkte auf der Brennfläche, von denen zusammenfallende Haupttangenten auslaufen, welche beide als ε_3 zu betrachten sind. Diese Punkte haben eine besondere Bedeutung, sie sind offenbar solche Punkte der Doppelcurve T, welche Theile derselben mit reellen Mänteln der Fläche Σ von solchen mit imaginären scheiden; d. h. *sie sind Pinch-Punkte der Fläche Σ.*

Für $n = 3$ muss also die Regelfläche $N = 20$. Ordnung 120 singuläre Erzeugende σ haben. Da ihre Doppelcurve 150. Ordnung ist, hat man als Classe R ihres ebenen Schnittes 80. Und hieraus ergiebt sich mit Hülfe der Formel

$$\sigma = 2(R - N)$$

ebenfalls $\sigma = 120$ als Zahl der singulären Erzeugenden. Endlich bemerke man noch:

Die Curve K *der Berührpunkte ε_4 begegnet der Doppelcurve* T *in* $5(n-3)(7n-5)(8n-6) - 10(n-4)(n^2-1)$ *Punkten.*

Ich will schliesslich noch zeigen, wie man durch eine geometrische Betrachtung die Ordnung von T bestimmen kann. Zur Abkürzung sollen die Bezeichnungen:

$$p = 3(n-1)(n-3),$$
$$q = 11n - 13,$$
$$r = n^3 - n^2 - 8n + 6,$$
$$s = 3(n-3)(2n-1),$$
$$t = 5(n-3)(7n-5),$$

eingeführt werden. Nach § VIII, 4 giebt es auf einer Geraden $(p+r)$

Punkte, deren Haupttangenten in Punkten einer willkürlichen Ebene einen Punkt p_1 haben. Daraus folgt: Die Regelfläche der Tangenten $\varepsilon_2 p_1 b_2$, welche ihren Punkt ε_2 in einer willkürlichen Ebene E_1, den Punkt p_1 in einer zweiten Ebene E_2 haben, ist von der Ordnung $p+q+r$; sie durchschneidet die Ebene E_1 in einer eigentlichen Curve C_1 der Ordnung $p+r$, die Ebene E_2 in einer Curve C_2 von der Ordnung $q+r$. Beide Curven schneiden sich auf der Schnittlinie von E_1, E_2 in q der Fläche Σ angehörigen Punkten. Mithin schneidet die Curve C_1 die Fläche Σ in:

$$(q-1+p)q$$

weiteren Punkten, welche in 2 Gruppen P und Q zerfallen. In den Punkten P stützt sich die Gerade, welche in E_2 einen Punkt p_1 hat, mit einem Punkte ε_3 auf E_1; in den Punkten Q ist der letztere Stützpunkt nur vom Charakter ε_2, während die andere von demselben ausgehende Haupttangente stationär ist.

Nun lässt sich aber die Anzahl der Punkte P leicht bestimmen. Denn die Curve der einfachen Berührpunkte, welche auf allen stationären Haupttangenten liegen, die von einem beliebigen ebenen Schnitt S von Σ auslaufen, ist von der Ordnung

$$t+(n-4)s;$$

mithin ist die Anzahl der Punkte Q

$$Q=(q-1+p)q-[t+(n-4)s].$$

Nunmehr denke man sich die Regelfläche der Tangenten ε_2, welche von den Punkten der Curve S auslaufen, construirt und betrachte die auf den Erzeugenden derselben liegende Curve von weiteren Punkten p_1. Die Ordnung derselben ist Q. Diese Curve begegnet nun der Ebene von S:

erstens in den Punkten, von denen zwei stationäre Tangenten auslaufen, d. h. den Punkten der Doppelcurve von Σ;

zweitens in den Punkten, welche sich auf den *in* der Ebene von S liegenden Haupttangenten befinden, ihre Anzahl ist

$$[3(n-1)q-s](n-3);$$

endlich in den Punkten von S, welche zugleich auf der Brennfläche liegen. Ihre Anzahl ist $2q(n-1)$, weil die Curve S in allen Punkten die Fläche Δ' berührt, wo sie dieselbe trifft. Man hat also für die Anzahl der ersten Kategorie von Punkten:

$$\begin{aligned} &Q-[3(n-1)q-s](n-3)-2(n-1)q \\ &\quad=10(7n^2-14n+9). \end{aligned}$$

Wie es sein muss, ist dies in der That die doppelte Ordnungszahl der Doppelcurve T.

Mit der Fläche Σ stehen die beiden anderen Covarianten X und Ω in mehrfachem Zusammenhange. Offenbar berühren sich Σ und X nach der Curve der Punkte ε_4; die Tangenten ε_4 sind zugleich Tangenten von Σ.*) Durch dieselbe Curve muss auch die Fläche Ω hindurchgehen. Die Doppelcurve von Ω ist der Ort der Punkte, von denen zwei Haupttangenten ausgehen, welche anderswo wieder Haupttangenten sind; ebenso hat auch X eine Doppelcurve, sie ist der Ort der Punkte, von denen zwei einfache Tangenten ausgehen, die anderwärts einen Punkt ε_3 haben. Die Ordnungen beider Curven lassen sich in ähnlicher Weise wie die von T bestimmen.

Dresden im September 1883.

*) Auch die Tangenten ε_3, welche zu Punkten der Berührungscurven von Δ' und Σ gehören, sind Tangenten von Σ.

Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen.

Von

J. Rosanes in Breslau.

Sind $f(x, x)$, $\varphi(x, x)$ zwei quadratische ternäre Formen in den ebenen trimetrischen Coordinaten x_1, x_2, x_3, so dass die Gleichungen $f(x, x) = 0$, $\varphi(x, x) = 0$ zwei Curven 2^{ter} Ordnung darstellen, dann lassen sich, so lange die Coefficienten jener Formen völlig unbeschränkt sind, auf der ersten der beiden Curven drei *verschiedene* Punkte nicht auffinden, welche zu je zweien ein conjugirtes Paar der zweiten bilden. Vielmehr ist hierzu, wie Hesse gezeigt hat, das Verschwinden einer Invariante nothwendig und auch hinreichend, welche in den Coefficienten der Form $f(x, x)$ vom ersten, in denen der Form $\varphi(x, x)$ vom zweiten Grade ist.

Bezeichnet man mit $\varphi(x, y)$ die mit Hilfe der Grössen $y_1\, y_2\, y_3$ polarisirte Form $\varphi(x, x)$, so lässt sich jene Behauptung in die Form kleiden:

Damit die drei Zahlensysteme $(x_1\, x_2\, x_3)$, $(y_1\, y_2\, y_3)$, $(z_1\, z_2\, z_3)$ sich so bestimmen lassen, dass die sechs Gleichungen erfüllt werden:

$$f(x, x) = 0, \quad f(y, y) = 0, \quad f(z, z) = 0,$$
$$\varphi(y, z) = 0, \quad \varphi(z, x) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

ist das Verschwinden einer Invariante nothwendig und hinreichend, welche durch $J(f, \varphi)$ bezeichnet werden möge, derart dass, wenn bei symbolischer Darstellung für die Form $f(x, x)$ die Symbole a, für $\varphi(x, x)$ die gleichwerthigen Symbole b, b' eingeführt werden,

$$J(f, \varphi) = (abb')^2$$

ist

$$(\text{wo} \quad (abb') = \Sigma \pm a_1 b_2 b_3').$$

Der analoge Satz gilt bekanntlich auch für die Flächen der zweiten Ordnung; es soll im folgenden der Nachweis geführt werden, dass er für beliebig viele Variable seine Geltung behält.

Es mögen jetzt $f(x, x)$, $\varphi(x, x)$ zwei quadratische Formen der $n+1$ Variablen $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ bedeuten, und zur Vereinfachung des Ausdrucks (in Anlehnung an die Sprache der Geometrie) y „ein Punkt" der Form $f(x, x)$ heissen, sobald die Gleichung $f(y, y) = 0$ erfüllt ist, ebenso (y, z) „ein Paar conjugirter Punkte" der Form $\varphi(x, x)$, sobald die Polarform $\varphi(y, z)$ verschwindet. Es seien

$$a \text{ und } b', b'', b''', \ldots, b^{(n+1)}$$

Symbole der Formen $f(x, x)$, resp. $\varphi(x, x)$, so dass man die symbolischen Gleichungen setzen darf:

$$f(x, x) = a^2(x),$$
$$\varphi(x, x) = b'^2(x) = b''^2(x) = \cdots = b^{(n+1)2}(x)$$

unter Benutzung der Abkürzung

$$u(x) \quad \text{für} \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_{n+1} x_{n+1},$$

und es werde die Invariante

$$J(f, \varphi) = \{\Sigma \pm a_1 b_2' b_3'' \ldots b_{n+1}^{(n)}\}^2 = (a b' b'' \ldots b^{(n)})^2$$

als *„Harmonische Invariante"* der Formen f, φ bezeichnet, dann gilt der Satz:

„Das Verschwinden der harmonischen Invariante zweier quadratischer Formen $f(x, x)$, $\varphi(x, x)$ der Variablen $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich ein System (und zugleich eine $\frac{n(n-1)}{2}$-fache Mannichfaltigkeit von solchen) von $n+1$ Punkten auf der ersten Form angeben lässt, welche zu je zweien ein conjugirtes Paar der zweiten bilden."

Nennt man auf Grund der letztgenannten Eigenschaft die Form $f(x, x)$ der Form $\varphi(x, x)$ „harmonisch umschrieben", so kann der zu erweisende Satz, wenn der in früheren Arbeiten angewandte Ausdruck „conjugirte Formen" benutzt und Φ die Adjuncte der Form φ genannt wird, kürzer so gefasst werden:

„Ist die Form f der Form Φ conjugirt, so ist sie der Form φ harmonisch umschrieben, und umgekehrt."

Der Beweis des ersten Theiles soll hier in der Weise geführt werden, dass der Satz, für n als richtig vorausgesetzt, auch für $n+1$ als bestehend bewiesen wird.

Unterwirft man die $n+1$ Variablen $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ der Beschränkung der linearen Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_{n+1} x_{n+1} = 0$$

zu genügen, so gehen dadurch die Formen $f(x, x)$, $\varphi(x, x)$ in solche von n Variablen über, welche durch

$$\underset{u(x)=0}{f(x, x)}, \qquad \underset{u(x)=0}{\varphi(x, x)}$$

bezeichnet werden und die „reducirten Formen" heissen mögen. Damit die erstere der zweiten harmonisch umschrieben sei, ist, da der Satz für n Variablen als bestehend angenommen wird, hinreichend, dass deren harmonische Invariante verschwindet, d. h. zufolge eines Satzes von Clebsch, dass

$$\Theta = (u a b' b'' \dots b^{(n-1)})^2 = 0$$

sei. Werden daher die Grössen u_i so gewählt, dass diese Gleichung erfüllt ist, dann giebt es n Punkte $x' x'' \dots x^{(n)}$ auf der Form f, welche paarweise zu φ conjugirt sind und zugleich sämmtlich der Gleichung $u(x) = 0$ genügen. Nun besteht allgemein die Identität:

$$\begin{aligned} &a(x) \cdot (b' b'' b''' \dots b^{(n+1)}) \\ &\quad = b'(x)\,(a b'' b''' \dots b^{(n+1)}) - b''(x)(a b' b''' \dots b^{(n+1)}) \\ &\quad + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot; \end{aligned}$$

durch deren Quadrirung und Zusammenfassung sich ergiebt:

$$\begin{aligned} &a^2(x)\,(b' b'' b''' \dots b^{(n+1)})^2 \\ &\quad = n b'^2(x)\,(a b'' b''' \dots b^{(n+1)})^2 \\ &\quad - n(n-1)\, b'(x)\, b''(x)\,(a b'' \dots b^{(n+1)})\,(a b' b''' \dots b^{(n+1)}) \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} &n(n-1)\, b'(x) b''(x)\,(a b'' b''' \dots b^{(n+1)})\,(a b' b''' \dots b^{(n+1)}) \\ &= n \cdot \varphi(x,x)\,(a b'' b''' \dots b^{(n+1)})^2 - f(x,x)\,(b' b'' \dots b^{(n+1)})^2. \end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass auf der linken Seite die Ausdrücke $b'(x) \cdot b_i'$, $b''(x) \cdot b_i''$ gleich der halben partiellen Ableitung von $\varphi(x, x)$ in Bezug auf x_i sind, und bezeichnet diese durch $\varphi_i(x)$, so kann man die obige Identität schreiben:

$$(1)\quad n(n-1)\,(u a b''' \dots b^{(n+1)})^2 = n \cdot \varphi(x,x)\, J(f,\varphi) - f(x,x) \cdot \Delta(f)^*),$$

worin u_i durch $\varphi_i(x)$ zu ersetzen ist, und $\Delta(f)$ die Discriminante der Form mit $1 \cdot 2 \dots n$ multiplicirt bedeutet.

Es werde nun angenommen, dass die harmonische Invariante $J(f, \varphi)$ der Formen $f(x, x)$, $\varphi(x, x)$ gleich Null ist. Vermöge der Identität (1) folgt alsdann, dass für jeden Punkt x der Form $f(x, x)$ auch die Gleichung

$$(u a b''' \dots b^{(n+1)})^2 \underset{u_i = \varphi_i(x)}{=} 0$$

*) Diese Identität findet sich für 3 Variable in einer ältern Arbeit „Ueber Systeme von Kegelschnitten" (Math. Ann. Bd. VI, pag. 270) und ist daselbst auch zu meinem Beweise desselben Satzes für 3 Variable benutzt worden (vgl. Clebsch's Vorles., herausgeg. v. Lindemann, pag. 295). In Rücksicht auf die nachfolgende Arbeit meines Freundes Pasch bemerke ich bei dieser Gelegenheit, dass jene Identität, sowie deren Verwendung zu dem gleichen Zweck (auf etwas anderem Wege) bereits vor der Abfassung meiner damaligen Arbeit von Pasch hergestellt worden war.

statt hat. Wir können daher den Inhalt der Gleichung (1) dahin deuten: Ist die harmonische Invariante $J(f, \varphi) = 0$, so ist für jeden Punkt x der Form $f(x, x)$ die harmonische Invariante der beiden reducirten Formen

$$(2) \qquad \underset{\varphi(x,y)=0}{f(y, y)} = 0, \qquad \underset{\varphi(x,y)=0}{\varphi(y, y)} = 0$$

ebenfalls gleich Null. Nun kann man aber alsdann gemäss unserer Voraussetzung auf der ersten der beiden Formen (2) n *verschiedene* Punkte $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ auffinden, welche paarweise der zweiten conjugirt sind; da vermöge der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ jeder dieser n Punkte zu x in Bezug auf die Form $\varphi(y, y)$ conjugirt ist, so bilden die $n + 1$ Punkte

$$x, x', x'', \ldots, x^{(n)} \quad .$$

ein System von $n+1$ Punkten der Form $f(x, x)$, welche zu je zweien der Form $\varphi(x, x)$ conjugirt sind.

Da für $n = 2$ die Richtigkeit des Satzes aus der Theorie der binären Formen bekannt ist, so ist allgemein der Satz bewiesen:

„*Verschwindet die harmonische Invariante zweier quadratischer Formen* $f(x, x)$, $\varphi(x, x)$ *von* $n + 1$ *Variablen, so kann man auf der ersteren* $n + 1$ *verschiedene Punkte auffinden, welche zu je zweien der zweiten Form conjugirt sind.*“

Der Gang des Beweises lässt erkennen, dass der erste Punkt x auf $f(x, x)$ beliebig gewählt werden kann; ist dies geschehen, so ist der zweite Punkt x' durch die zwei Gleichungen $f(x', x') = 0$, $\varphi(x, x') = 0$ beschränkt; ist x' dementsprechend gewählt, so ist x'' durch drei lineare Gleichungen beschränkt u. s. f.

Es giebt somit eine $\frac{n(n-1)}{2}$*-fache Mannigfaltigkeit der gesuchten Systeme von* $n + 1$ *Punkten.*

Dass das Verschwinden der harmonischen Invariante für die Herstellung solcher Systeme auch nothwendig ist, ist leicht einzusehen.

Durch einfache der geometrischen Auffassungsweise nachgebildete Betrachtungen ergiebt sich auch der Satz:

„Verschwindet die Invariante $J(f, \varphi)$ der quadratischen Formen f, φ der $n+1$ Variablen $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ und weiss man, dass $n+1$ Punkte $x, x', x'', \ldots, x^n$ der Form $f(x, x)$ die Eigenschaft haben, dass ihre sämmtlichen Combinationen zu je zweien mit Ausnahme der einen Combination $(x^{(0)}, x^{(k)})$ conjugirte Paare der Form $\varphi(x, x)$ ergeben, so bilden auch die Punkte $(x^{(i)}, x^{(k)})$ ein conjugirtes Paar von $\varphi(x, x)$.“

Breslau, im Juli 1883.

Bemerkung zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung.

Von

J. Rosanes in Breslau.

Die in der vorstehenden Note enthaltene Erweiterung eines geometrischen Satzes auf Formen von beliebig vielen Variablen findet für gewisse specielle Formen von sechs Veränderlichen eine einfache geometrische Interpretation.

Es sei

$$H(x,x) = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda \qquad (\varkappa,\lambda = 1,2,3,4)$$

eine quadratische quaternäre Form der allgemeinen Tetraedercoordinaten $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, so dass $H(x,x) = 0$ die Gleichung einer allgemeinen Fläche 2^{ter} Ordnung darstellt.

Zwei Geraden heissen einer Fläche 2^{ter} Ordnung conjugirt, sobald jede von ihnen die reciproke Polare der andern trifft, und man kann Systeme von Geraden in Betrachtung ziehen, welche zu je zweien einer und derselben Fläche conjugirt sind.*) Wir wollen ein solches System ein „conjugirtes" nennen. Die höchste Zahl der Geraden, aus denen ein conjugirtes System bestehen kann, ist offenbar gleich sechs. Bezeichnet man allgemein durch $g_1\, g_2 \ldots g_6$ die Plücker'schen Coordinaten einer Geraden g, so dass dieselben der Gleichung genügen

$$f(g,g) = g_1\, g_4 + g_2\, g_5 + g_3\, g_6 = 0,$$

dann stellt sich die Beziehung des Conjugirtseins zweier Geraden g, g' in Bezug auf die Fläche H algebraisch durch die symmetrische bilineare Gleichung dar

$$\sum_{r,s} c_{r,s}\, g_r\, g_s' = 0, \qquad (r,s = 1,2,3,4,5,6).$$

Hierin bedeuten $c_{r,s}$ die aus der Determinante der Form $H(x,x)$ gebildeten Minoren zweiten Grades. Die Indices r, s geben die Combination der Horizontal- resp. Verticalreihen an, mit deren Hilfe $c_{r,s}$ herzu-

*) Vgl. Schur, Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven u. s. f. (Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 1 ff.)

stellen ist, in derselben Weise, wie sie das Gesetz der Bildung von g_r, g_s' aus den Coordinaten der Punkte dieser Geraden bestimmen.

Versteht man unter $G_1\, G_2 \ldots G_6$ willkürliche Veränderliche und nennt, wie in vorstehender Note, jedes Werthsystem derselben „*Punkt*" (des fünf-dimensionalen Raumes) und spricht auch von der „*Fläche*" $f(G, G)$, als der Gesammtheit der Punkte G, welche $f(G, G)$ annulliren, so können wir, ein conjugirtes Geradenpaar der Fläche H als ein Paar von „Punkten" der „Fläche" $f(G, G)$ ansehen, welche der „Fläche"

$$\varphi(G, G) = \sum c_{r,s}\, G_r\, G_s = 0$$

conjugirt sind.

Ein conjugirtes System von sechs Geraden der Fläche H kann somit nur existiren, sobald $f(G, G)$ der Form $\varphi(G, G)$ harmonisch umschrieben ist (vgl. vorst. Note), d. h. wenn die harmonische Invariante $J(f, \varphi)$ verschwindet. Nun hat bekanntlich die Form $\varphi(G, G)$ die Eigenschaft, bis auf einen constanten Factor mit ihrer Adjuncten übereinzustimmen, folglich ist $J(f, \varphi)$ bis auf jenen Factor identisch mit dem Ausdruck

$$c_{14} + c_{25} + c_{36}.$$

Da dieser jeder Zeit verschwindet, so ist die Form $f(G, G)$ stets der Form $\varphi(G, G)$ harmonisch umschrieben, d. h.

„es existiren Systeme von sechs conjugirten Geraden der allgemeinen Fläche H, und zwar in zehnfacher Mannigfaltigkeit."

Die am Schlusse der vorstehenden Note ausgesprochene Bemerkung bedeutet in dem vorliegenden Beispiele:

„Weiss man, dass sechs Geraden, auf vierzehn verschiedene Arten zu zweien combinirt, immer ein conjugirtes Paar einer Fläche zweiter Ordnung ergeben, so stellt die 15te Combination ebenfalls ein conjugirtes Geradenpaar dar."

Werden die Variablen $G_1\, G_2 \ldots G_6$ nicht blos der quadratischen Gleichung $f(G, G) = 0$, sondern auch noch einer, zwei, drei linearen Gleichungen unterworfen, so stellen dieselben „*Punkte*" einer „Fläche" zweiter Ordnung in einem Raume von resp. vier, drei, zwei Dimensionen dar.

Die auf diese Weise aus $f(G, G)$, $\varphi(G, G)$ hervorgehenden „reducirten" Formen oder „Flächen" haben aber im Allgemeinen nicht mehr eine verschwindende harmonische Invariante, es bleibt somit noch eine Bedingung zu erfüllen, damit die erste „Fläche" der zweiten harmonisch umschrieben wird.

Unter Berücksichtigung der geometrischen Interpretation der Veränderlichen G_i lässt sich das Gesagte *für den Fall einer hinzugefügten linearen Gleichung* so aussprechen:

„Unter den Geraden eines linearen Complexes kann man im Bezug

auf eine Fläche zweiter Ordnung im Allgemeinen ein conjugirtes System von fünf Geraden nicht angeben. Es ist hierzu das Verschwinden einer Invariante nothwendig und hinreichend. Tritt dies ein, so giebt es eine sechsfache Mannigfaltigkeit von Systemen."

Für den Fall zweier linearer Gleichungen ergiebt sich,

„dass unter sämmtlichen Geraden, welche zwei feste Geraden φ, φ' treffen, sich im Allgemeinen nicht vier angeben lassen, welche in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung ein conjugirtes System bilden."

Die Bedingung, welche in diesem Falle zu erfüllen ist, nimmt aber eine geometrisch und analytisch gleich einfache Gestalt an. Denn gesetzt, es seien g'', g''', g^{IV}, g^{V} ein conjugirtes System von vier Graden, welches φ, φ' zu gemeinsamen Secanten hat. Construirt man die reciproken Polaren g, g' von φ, φ', so ist jede von ihnen mit sämmtlichen vier Graden $g'' \ldots g^{V}$ conjugirt. Es bilden somit die sechs Geraden $g\, g'\, g'' \ldots g^{V}$ ein System, dessen sämmtliche Combinationen zu je zwei ein conjugirtes Paar bilden, mit Ausnahme der Combination (g, g'). In Folge des oben angegebenen Satzes müssen auch g, g' einander conjugirt sein. Da aus diesem Grunde auch φ, φ' ein conjugirtes Paar bilden, so kann man den Satz aussprechen:

„Sind φ, φ' ein conjugirtes Gradenpaar einer Fläche 2^{ter} Ordnung, so giebt es unter ihren gemeinschaftlichen Secanten conjugirte Systeme von vier Graden (derselben Fläche 2^{ter} Ordnung), und zwar in dreifacher Mannigfaltigkeit, und umgekehrt."

In anderer Form heisst dies:

„Bilden die vier Geraden g'', g''', g^{IV}, g^{V} ein conjugirtes System einer Fläche zweiter Ordnung, so sind auch ihre zwei gemeinschaftlichen Secanten einander conjugirt."

Liegen drei lineare Gleichungen zwischen den Variablen $G_1 \ldots G_6$ vor, so sind die entsprechenden Geraden als Generatrices einer Fläche 2^{ter} Ordnung charakterisirt und die Aufgabe*), auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung drei Generatrices zu finden, welche ein conjugirtes System einer andern gegebenen Fläche bilden, ist analytisch mit der identisch, auf einem Kegelschnitt drei Punkte zu finden, welche ein Tripel conjugirter Punkte eines andern Kegelschnittes bilden.

Breslau, im Juli 1883.

*) Vgl. Schur, Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 9ff.

Zur Theorie der Collineation und der Reciprocität.

Von

M. Pasch in Giessen.

Zweck der nachfolgenden Blätter ist die Erörterung einiger Erscheinungen, welche sich auf Collineation und Reciprocität in der Ebene beziehen. Sofern es sich dabei um Verallgemeinerung von Dingen handelt, welche in dem Gebiete von einer Dimension auftreten, schien es zweckmässig, die analogen Betrachtungen über projective Punktreihen vorauszuschicken.

I. Projective Punktreihen.

1. Wenn der Punkt x einer Geraden, auf welcher homogene Doppelverhältnisscoordinaten (lineare Coordinaten) eingeführt sind, die Coordinaten $x_1 | x_2$ besitzt, so wird derselbe durch eine lineare Gleichung bestimmt, deren Coefficienten sich wie $x_2 : -x_1$ verhalten und die Coefficienten des Punktes x genannt werden können. Sind $x_1 | x_2$ und $y_1 | y_2$ die Coordinaten, $\xi_1 \| \xi_2$ und $\eta_1 \| \eta_2$ die Coefficienten zweier Punkte x und y der Geraden, so kann man annehmen:

$$\xi_1 = x_2, \quad \xi_2 = -x_1; \quad \eta_1 = y_2, \quad \eta_2 = -y_1 \tag{1}$$

und erhält dann:

$$(xy) = (\xi\eta) = \eta_x = -\xi_y,$$

wo, wie üblich, $(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$, $\eta_x = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$ u. s. w.

Wir betrachten nun die bilineare Form

$$f(xy) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 = \Sigma a_{ik} x_i y_k$$

und führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 = f_i(y), \quad a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 = f(x)_k,$$

$$\alpha_{11} = a_{22}, \quad \alpha_{12} = -a_{21}, \quad \alpha_{21} = -a_{12}, \quad \alpha_{22} = a_{11},$$

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21},$$

$$\varphi(\xi\eta) = \Sigma \alpha_{ik} \xi_i \eta_k = a_{11} \xi_2 \eta_2 - a_{12} \xi_2 \eta_1 - a_{21} \xi_1 \eta_2 + a_{22} \xi_1 \eta_1$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ \xi_1 & a_{11} & a_{12} \\ \xi_2 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

welche die Identitäten

$$(2) \qquad \Sigma\alpha_{ik}f_i(y)\xi_k = \Delta\xi_y, \qquad \Sigma\alpha_{ik}\eta_i f(x)_k = \Delta\eta_x,$$

$$(3) \qquad \Sigma\alpha_{ik}f_i(x)f_k(y) = \Delta f(xy), \quad \Sigma\alpha_{ik}f_i(y)f(x)_k = \Delta f(xy)$$

und unter der Annahme (1) noch die Identität

$$f(xy) = \varphi(\xi\eta)$$

nach sich ziehen. Ausser Δ ist noch die Grösse

$$i = a_{12} - a_{21} = \alpha_{12} - \alpha_{21}$$

eine Invariante der Form $f(xy)$; sie liefert die Formeln

$$(4) \qquad f(xy) - f(yx) = i(xy), \quad \varphi(\xi\eta) - \varphi(\eta\xi) = i(\xi\eta).$$

Die Invariante

$$i_1 = \Sigma a_{ik}\alpha_{ki} = 2a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{21}^2$$

lässt sich auf i und Δ zurückführen, indem

$$i^2 + i_1 = 2\Delta.$$

2. Durch die Gleichung

$$0 = f(xy) = x_1 f_1(y) + x_2 f_2(y) = y_1 f(x)_1 + y_2 f(x)_2$$

wird auf der Geraden eine projective Beziehung hergestellt, vermöge deren dem Punkte der Coordinaten $x_1 | x_2$ der Punkt der Coefficienten $f(x)_1 \| f(x)_2$, dem Punkte der Coefficienten $f_1(y) \| f_2(y)$ der Punkt der Coordinaten $y_1 | y_2$ entspricht. Sind $\xi_1 \| \xi_2$ und $\eta_1 \| \eta_2$ die Coefficienten der Punkte x und y, so ist die obige Gleichung mit der Gleichung $0 = \varphi(\xi\eta)$ identisch.

Der Uebergang vom Punkte x zu dem entsprechenden kann auch als lineare Transformation mittels der Formeln

$$x_1' = -f(x)_2 = -a_{12}x_1 - a_{22}x_2, \quad x_2' = f(x)_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2$$

aufgefasst werden. Wenn nun die zweimalige Anwendung dieser Transformation den Punkt $x_1 | x_2$ in den Punkt $y_1 | y_2 = \eta_1 \| \eta_2$ überführt, so wird der letztere durch eine Gleichung $f_1(xy) = 0$ definirt, wo

$$\begin{aligned} f_1(xy) &= \Sigma\alpha_{ik}f(x)_i\eta_k = \Sigma\alpha_{ik}\eta_i f(x)_k + i(f(x)_1\eta_2 - f(x)_2\eta_1) \\ &= \Delta\eta_x - i\Sigma y_i f(x)_i = \Delta(xy) - if(xy). \end{aligned}$$

Ist hingegen dreimalige Anwendung jener Transformation erforderlich, um von x zu y zu gelangen, so sind x und y durch eine Gleichung $f_2(xy) = 0$ verbunden, wo

$$\begin{aligned} f_2(xy) &= \Delta(-f(x)_2 y_2 - f(x)_1 y_1) - i\Sigma\alpha_{ik}f(x)_i\eta_k \\ &= -\Delta f(xy) - if_1(xy) = -i\Delta(xy) + (i^2 - \Delta)f(xy). \end{aligned}$$

Die viermalige Wiederholung liefert die Form

$$\begin{aligned} f_3(xy) &= -\Delta f_1(xy) - if_2(xy) = i\Delta f(xy) + (i^2 - \Delta)f_1(xy) \\ &= \Delta(i^2 - \Delta)(xy) + i(2\Delta - i^2)f(xy) \qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

3. Ich nehme an, dass die Determinante Δ nicht verschwindet. Unter der Bedingung $i = 0$ fällt $f(xy)$ mit $f(yx)$ zusammen, die projective Beziehung $f(xy) = 0$ wird dann involutorisch, $f_1(xy)$ proportional (xy). Unter der Bedingung $i^2 - \Delta = 0$ wird $f_2(xy)$ proportional (xy), die dreimalige Anwendung der Projectivität $f(xy) = 0$ führt dann zu dem Ausgangspunkte zurück. Soll dies erst bei viermaliger Anwendung eintreten, so ist die Bedingung $i_1 = 0$ zu erfüllen, welche man auch erhält, indem man involutorische Beschaffenheit der Projectivität $f_1(xy) = 0$ fordert, da

$$i_{f_1} = 2\Delta - i^2 = i_1.$$

Der auf der Geraden beliebig angenommene Punkt a und die Punkte b, c, d, welche ihm bei ein-, zwei-, dreimaliger Anwendung der Projectivität $f(xy) = 0$ entsprechen, haben in den Variablen $y_1 | y_2$ die Gleichungen:

$$(ay) = 0, \quad f(ay) = 0, \quad \Delta(ay) - if(ay) = 0,$$
$$-i\Delta(ay) + (i^2 - \Delta) f(ay) = 0.$$

Daraus berechnet man für das Doppelverhältniss der vier Punkte a, b, c, d den Werth

$$v = \frac{i^2}{i^2 - \Delta},$$

welcher die absolute Invariante der Form $f(xy)$ darstellt.

4. Man kann nach der Gesammtheit derjenigen Projectivitäten fragen, welche in sich selbst übergehen, wenn man auf sie die gegebene Projectivität anwendet, d. h. wenn man x, y in neue Punkte x', y' überführt mittels der Formeln

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = -f_2(x') = -a_{21}x_1' - a_{22}x_2', & x_2 = f_1(x') = a_{11}x_1' + a_{12}x_2', \\ y_1 = -f_2(y') = -a_{21}y_1' - a_{22}y_2', & y_2 = f_1(y') = a_{11}y_1' + a_{12}y_2'. \end{cases}$$

Jede Form $F(x, y)$, welche eine solche Projectivität darstellt, wird eine Covariante von $f(xy)$ sein. Aber auch umgekehrt wird jede bilineare Covariante $F(xy)$ der Form $f(xy)$ durch die Substitution (5) bis auf einen constanten Factor in sich selbst transformirt werden; denn nach (3) wird $f(xy)$ durch jene Substitution in

$$\Sigma a_{ik} f_i(x') f_k(y') = \Delta f(x'y')$$

transformirt, und wenn also $F(xy)$ gleichzeitig in $F'(x'y')$ übergeht, so entsteht $F'(x'y')$ bis auf einen constanten Factor aus $f(x'y')$ in gleicher Weise, wie $F(xy)$ aus $f(xy)$, d. h. es ist

$$F'(x'y') = \Delta F(x'y').$$

Unter der Voraussetzung, dass die gegebene Projectivität nicht involutorisch ist, wird die covariante Projectivität $F(xy) = 0$ durch irgend eines ihrer Paare aa' bestimmt, wobei jedoch weder a noch a'

Doppelpunkt der $f(xy) = 0$ sein darf; denn wenn vermöge der gegebenen Projectivität aa' in bb', bb' in cc' übergehen, so müssen durch die Beziehung $F(xy) = 0$ den Punkten abc die Punkte $a'b'c'$ zugeordnet werden. Andererseits kann ich durch geeignete Wahl des Quotienten $\varkappa : \lambda$ in der Covariante

$$\varkappa\Delta(xy) - \lambda i f(xy) \tag{6}$$

stets eine mit $f(x)$ covariante Projectivität herstellen, bei welcher aa' einander entsprechen. Folglich werden alle mit $f(xy)$ covarianten Projectivitäten durch die Formel (6) umfasst. Diese Formel lässt eine einfache geometrische Deutung zu; es besitzt nämlich das Doppelverhältniss der Punkte $abca'$, welche durch die Gleichungen

$$(ay) = 0,\ f(ay) = 0,\ \Delta(ay) - if(ay) = 0,\ \varkappa\Delta(ay) - \lambda i f(ay) = 0$$

dargestellt werden, den mit a nicht variirenden Werth $\varkappa : \lambda$, und es gilt daher der Satz:*)

Wird auf einer Geraden durch die — nicht involutorische — Projectivität $f(xy) = 0$ dem Punkte a (der kein Doppelpunkt sein darf) der Punkt b, diesem der Punkt c zugeordnet, und sucht man zu a, b, c denjenigen Punkt a', welcher ein gegebenes Doppelverhältniss $(abca')$ hervorbringt, so erzeugt das Paar aa' bei variirendem a eine Projectivität, welche durch die gegebene in sich selbst übergeführt wird. — Soll die neue Projectivität involutorisch werden, so hat man für dieses Doppelverhältniss den mit v durch die Gleichung $\frac{1}{v} + \frac{1}{2w} = 1$ verbundenen Werth $w = \frac{i^2}{2\Delta}$ zu wählen, welcher in der That die symmetrische Form

$$f(xy) - \tfrac{i}{2}(xy) = f(yx) + \tfrac{i}{2}(xy)$$

liefert.

5. Auch hieraus kann man die oben angegebene Bedingung entnehmen, unter welcher die Projectivität $f_1(xy) = 0$ involutorisch wird. Es geht nämlich die mit $f(xy)$ covariante Projectivität der Paare aa' durch die Annahme $(abca') = 1$ in die der Paare ac über, und die letztere wird daher involutorisch unter der Bedingung $w = 1$, d. i. $2\Delta = i^2$. Sucht man also zu dem die Gerade durchlaufenden Punkte b den entsprechenden Punkt c in der Beziehung $f(xy) = 0$ und den entsprechenden a in der inversen Beziehung, so drückt $i_1 = 0$ aus, dass die Paare ac in Involution liegen. In dieser Form erscheint der Satz als besonderer Fall eines von Herrn Rosanes**) bereits gelegentlich angegebenen Satzes, der sich auf zwei bilineare Formen

*) Vergl. den synthetischen Beweis in Crelle's Journal Bd. 91, S. 349, auch in des Verf. „Vorlesungen über neuere Geometrie" § 16 (wo auf S. 134 Z. 3 zu lesen ist $l\mu$ statt $\lambda\mu$).

**) Crelle's Journal Bd. 90, S. 313.

$$f(xy) = \Sigma a_{ik} x_i y_k, \quad f'(xy) = \Sigma a'_{ik} x_i y_k \ (i, k = 1, 2)$$

bezieht und die Deutung der simultanen Invariante*)

$$\Theta = \Sigma \alpha_{ik} a'_{ik} = \Sigma a_{ik} \alpha'_{ik} = a_{11} a'_{22} - a_{12} a'_{21} - a_{21} a'_{12} + a_{22} a'_{11}$$

enthält: *Sucht man zu dem die Gerade X durchlaufenden Punkte x die ihm vermöge der Projectivitäten $f(xy) = 0$, $f'(x\eta) = 0$ entsprechenden Punkte y und η derselben Geraden oder einer anderen Geraden Y, so liegen die Paare $y\eta$ dann und nur dann in Involution, wenn die Formen $f(xy)$ und $f'(xy)$ einander „conjugirt" sind, d. h. wenn Θ verschwindet.*

Um diesen Satz auf eine Identität zurückzuführen, definire ich eine Operation δ durch die Formel:

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial a_{ik}} a'_{ik}.$$

Es wird

$$\delta a_{ik} = a'_{ik}, \quad \delta \alpha_{ik} = \alpha'_{ik}, \quad \delta f(xy) = f'(xy),$$
$$\delta f_i(y) = f'_i(y), \quad \delta f(x)_k = f'(x)_k, \quad \delta \Delta = \Theta.$$

Wendet man daher die Operation δ auf beide Seiten der unter (3) aufgestellten Formel $\Sigma \alpha_{ik} f_i(y) f(x)_k = \Delta f(xy)$ an, so kommt nach (2):

$$\Theta f(xy) + \Delta f'(xy) = \Sigma \alpha'_{ik} f_i(y) f(x)_k + \Sigma \alpha_{ik} f'_i(y) f(x)_k + \Sigma \alpha_{ik} f_i(y) f'(x)_k$$
$$= \Sigma \alpha'_{ik} f_i(y) f(x)_k + \Delta f'(xy) + \Delta f'(xy),$$

also schliesslich:

$$\Sigma \alpha'_{ik} f_i(y) f(x)_k = \Theta f(xy) - \Delta f'(xy). \tag{7}$$

Durch die beiden gegebenen Projectivitäten werden unter der Bedingung $f'(xy) = 0$ dem Punkte $x_1 | x_2$ der Geraden X die Punkte $f(x)_1 \| f(x)_2$, resp. $y_1 | y_2$ der Geraden Y, unter der Bedingung $\Sigma \alpha'_{ik} f_i(y) f(x)_k = 0$ dem Punkte $f_1(y) \| f_2(y)$ der Geraden X die Punkte $y_1 | y_2$, resp. $f(x)_1 \| f(x)_2$ der Geraden Y zugeordnet; für $\Theta = 0$ ist die zweite Bedingung stets mit der ersten zugleich erfüllt.

II. Projective ebene Systeme.

6. Wir wenden uns jetzt zu der in zwei Reihen von contragredienten Variablen $x_1 x_2 x_3$, $u_1 u_2 u_3$ linearen Form

$$f(xu) = \Sigma a_{ik} x_i u_k \ (i, \varkappa = 1, 2, 3).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + a_{i3} u_3 = f_i(u), \quad a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + a_{3k} x_3 = f(x)_k,$$
$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} = \Delta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik},$$

*) Ich setze

$$\alpha'_{11} y_1 + \alpha'_{12} y_2 = f'_1(y) \text{ etc.}, \quad a_{22} = \alpha'_{11} \text{ etc.}$$

$$\Sigma\alpha_{ik}u_ix_k = -\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varphi(xu),$$

$$\alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \alpha_{3k}u_3 = \varphi_k(u), \quad \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 = \varphi(x)_i$$

und schreibt, wie üblich, u_x für $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$, so bestehen folgende Identitäten:

$$(8) \qquad \begin{cases} \Sigma\alpha_{ik}u_i f(x)_k = \Sigma\alpha_{ik}x_k f_i(u) = \Delta u_x, \\ \Sigma a_{ik}x_i\varphi_k(u) = \Sigma a_{ik}u_k\varphi(x)_i = \Delta u_x, \end{cases}$$

$$(9) \qquad \Sigma\alpha_{ik}f_i(u)f(x)_k = \Delta f(xu), \quad \Sigma a_{ik}\varphi(x)_i\varphi_k(u) = \Delta\varphi(xu),$$

und unter der Voraussetzung

$$(10) \qquad x_1 = (vw)_1 = v_2w_3 - v_3w_2, \quad x_2 = (vw)_2 = v_3w_1 - v_1w_3,$$
$$x_3 = (vw)_3 = v_1w_2 - v_2w_1$$

hat man noch:

$$(11) \qquad \varphi_2(v)\varphi_3(w) - \varphi_3(v)\varphi_2(w)$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \Delta f(x)_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Grössen $x_1|x_2|x_3$ sollen als Coordinaten eines Punktes x, die Grössen $u_1|u_2|u_3$ als Coordinaten einer Geraden u in einer Ebene, auf welcher lineare Coordinaten eingeführt sind, aufgefasst werden. Alsdann wird in dieser Ebene durch die Gleichung

$$0 = f(xu) = x_1f_1(u) + x_2f_2(u) + x_3f_3(u) = u_1f(x)_1 + u_2f(x)_2 + u_3f(x)_3$$

unter der Voraussetzung $\Delta \neq 0$ eine projective Beziehung hergestellt, vermöge deren

dem Punkte $x_1|x_2|x_3$ der Punkt $f(x)_1|f(x)_2|f(x)_3$,
der Geraden $f_1(u)|f_2(u)|f_3(u)$ die Gerade $u_1|u_2|u_3$

entspricht. Kehrt man die Beziehung um, so wird

dem Punkte $x_1|x_2|x_3$ der Punkt $\varphi(x)_1|\varphi(x)_2|\varphi(x)_3$,
der Geraden $\varphi_1(u)|\varphi_2(u)|\varphi_3(u)$ die Gerade $u_1|u_2|u_3$

zugeordnet. Demnach liefert die Gleichung $\varphi(xu) = 0$ die Umkehrung der durch die Gleichung $f(xu) = 0$ definirten Collineation.

7. Es ist bekannt*), dass die bilineare Form $f(xy)$ ausser der Determinante Δ noch die Invarianten

*) Clebsch und Gordan, Mathem. Ann. Bd. I, S. 371 ff.; Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I, S. 988; siehe auch unten: Art. 8 und 9.

$$i = \Sigma a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad i_1 = \Sigma a_{ik} a_{ki}, \quad i_2 = \Sigma a_{ik} a_{kl} a_{li}$$

besitzt, und dass diese vier Invarianten durch die Relation

$$6\Delta = i^3 + 2i_2 - 3ii_1 \tag{12}$$

zusammenhängen. Die Deutung von i_1 und i_2 lässt sich aus der von i entnehmen (Art. 8); für i selbst ergiebt sich ausser der bekannten Deutung noch eine andere auf folgendem Wege.

Bei beliebiger Lage des Punktes x und der Geraden u kann man jedem Punkte ξ der u einen Strahl durch x zuordnen, indem man den dem Punkte ξ in der Collineation $f = 0$ entsprechenden Punkt ξ' mit x verbindet. Nehmen wir an, dass u die Punkte y, z verbindet, dass also $u_1 = (yz)_1$, $u_2 = (yz)_2$, $u_3 = (yz)_3$, so kann ξ durch die Coordinaten $y_1 + \lambda z_1 \mid y_2 + \lambda z_2 \mid y_3 + \lambda z_3$, der Punkt $(u, x\xi')$ durch die Coordinaten $y_1 + \mu z_1 \mid y_2 + \mu z_2 \mid y_3 + \mu z_3$ und mithin der Strahl $x\xi'$ durch die Coordinaten $(xy)_1 + \mu(xz)_1 \mid (xy)_2 + \mu(xz)_2 \mid (xy)_3 + \mu(xz)_3$ dargestellt werden. Zwischen λ und μ besteht die Beziehung

$$0 = \Sigma a_{ik}(y_i + \lambda z_i)\,((xy)_k + \mu(xz)_k)$$
$$= \Sigma a_{ik} y_i (xy)_k + \lambda \Sigma a_{ik} z_i (xy)_k + \mu \Sigma a_{ik} y_i (xz)_k + \lambda\mu \Sigma a_{ik} z_i (xz)_k.$$

Diese wird symmetrisch unter der Bedingung $\psi(xu) = 0$, wo

$$\psi(xu) = \Sigma a_{ik} z_i (xy)_k - \Sigma a_{ik} y_i (xz)_k = \Sigma (xy)_k f(z)_k - \Sigma (xz)_k f(y)_k,$$

d. h. die Beziehung zwischen dem Punkte ξ und dem Strahle $x\xi'$ wird involutorisch, wenn u durch den Punkt $\psi(x)_1 \mid \psi(x)_2 \mid \psi(x)_3$ hindurchgeht.

Durch die Collineation $f = 0$ wird, wenn man einen Punkt a festlegt, auf jeder Geraden u eine projective Beziehung erzeugt, indem aus a zu jedem Punkte b ein andrer c durch die Gerade herausgeschnitten wird, welche a mit dem Punkte b', der durch $f = 0$ dem b zugeordnet ist, verbindet. Die Geraden u, auf welchen diese Beziehung involutorisch ausfällt, laufen durch einen gewissen Punkt A, und die Paare aA erzeugen in der Ebene eine neue Collineation mit der Gleichung $\psi(xu) = 0$. Geht also die Gerade u durch A, so geht die Gerade ab auch durch den vermöge $f = 0$ dem c zugeordneten Punkt c'.

Um $\psi(xu)$ auszuwerthen, bildet man

$$z_1(xy)_1 - y_1(xz)_1 = x_2 u_2 + x_3 u_3, \quad z_2(xy)_3 - y_2(xz)_3 = -x_2 u_3$$

u. s. w. und erhält:

$$\psi(xu) = -\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ u_2 & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x_3 & x_1 \\ u_3 & a_{33} & a_{31} \\ u_1 & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = iu_x - f(xu).$$

Die hiermit erlangte Formel

$$f(xu) + \psi(xu) = iu_x \tag{13}$$

kann man jetzt als eine Verallgemeinerung der in Art. 1 unter (4) aufgestellten betrachten; wenn man in der That in (13) alle mit dem Index 3 versehenen Grössen gleich Null setzt und dann $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, u_1, u_2$ in resp. $a_{12}, -a_{11}, a_{22}, -a_{21}, y_2, -y_1$ abändert, so ergiebt sich die erste Gleichung (4). — Die Gleichung (13) lehrt, dass *die Punkte a und A stets auf einer Geraden liegen mit dem Punkte a', welcher durch* $f = 0$ *dem Punkte a zugeordnet ist.*

Unter der Bedingung $i = 0$ fällt $\psi(xu)$ mit $-f(xu)$, d. h. A mit a' zusammen, das Dreieck $a'b'c'$ ist dann dem Dreieck abc eingeschrieben. Da man a und b beliebig annehmen kann, während sich für c eine bestimmte Lage $c = (ba', ab')$ ergiebt, so bilden im Falle $i = 0$ jene Dreiecke abc eine Quadrupelserie. Zu dieser gehört insbesondere, wenn man mittels $f = 0$ zu a' den zugeordneten Punkt a'', zu diesem a''' aufsucht, die Doppelserie aller Dreiecke $aa'a''$, deren Seite aa' durch a''' gehen muss. So gelangt man von der neuen Deutung der Invariante i zu der bekannten (Clebsch und Gordan a. a. O. S. 392, Clebsch-Lindemann a. a. O. S. 994; siehe auch den folg. Art.), wonach unter der Bedingung $i = 0$ die Punkte $aa'a'''$ allemal in gerader Linie liegen*).

Von der durch die Gleichung $i = 0$ charakterisirten Collineation will ich sagen, sie befinde sich in eingeschriebener Dreieckslage; die dadurch bedingte Beschaffenheit der inversen Collineation werde ich als umschriebene Dreieckslage bezeichnen. Wenn bei einer Collineation ein (eigentliches) Dreieck existirt, welches dem zugeordneten umschrieben ist, so giebt es eine Quadrupelserie solcher Dreiecke, die Collineation befindet sich dann in eingeschriebener Dreieckslage. Eine involutorische Collineation kann sich niemals in umschriebener oder eingeschriebener Dreieckslage befinden.

8. Unter der Voraussetzung (10) kann man schreiben:

$$\Sigma(xy)_k f(z)_k = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ f(z)_1 & f(z)_2 & f(z)_3 \end{vmatrix} = v_y f(zw) - w_y f(zv),$$

$$\Sigma(xz)_k f(y)_k = v_z f(yw) - w_z f(yv),$$

$$\psi(xu) = v_y f(zw) - w_y f(zv) - v_z f(yw) + w_z f(yv).$$

Wenn man hier $v_1|v_2|v_3$ durch $\varphi_1(v)|\varphi_2(v)|\varphi_3(v)$, $w_1|w_2|w_3$ durch $\varphi_1(w)|\varphi_2(w)|\varphi_3(w)$ ersetzt und nach Anwendung der Identitäten (8) und (11) den Factor Δ weghebt, so erhält man:

$$\psi(x'u) = w_z\varphi(yv) - v_z\varphi(yw) - w_y\varphi(zv) + v_y\varphi(zw),$$

wo $x_1'|x_2'|x_3'$ für $f(x)_1|f(x)_2|f(x)_3$ geschrieben ist. Dieses Resultat lehrt aber die Uebereinstimmung der Form $\psi(x'u)$ mit der Form

*) Im Falle der Involution zerfällt $\psi(xu)$ in ein Product $\pi_x u_p$, wo p das Centrum, π die Axe der Collineation; i ist dann $\neq 0$.

$\psi_\varphi(xu)$, welche aus $\varphi(xu)$ in derselben Weise hergestellt wird, wie $\psi(xu)$ aus $f(xu)$, und führt daher weiter zu der Formel

$$iu_{x'} - f(x'u) = i_\varphi u_x - \varphi(xu)\text{*)}.$$

Hier ist $u_{x'} = f(xu)$; für $f(x'u)$ d. i. $\Sigma a_{ik} f(x)_i u_k$ wollen wir die Bezeichnung $f_1(xu)$, dann weiter für $f_1(x'u)$ die Bezeichnung $f_2(xu)$ einführen u. s. f., so dass

$$f_1(xu) = \Sigma a_{i\lambda} a_{\lambda k} x_i u_k, \quad f_2(xu) = \Sigma a_{i\lambda} a_{\lambda\mu} a_{\mu k} x_i u_k \text{ u. s. f.},$$

woraus sich jetzt

$$i_1 = i_{f_1}, \quad i_2 = i_{f_2}$$

ergiebt. Die nunmehr gewonnene Relation

$$f_1(xu) - if(xu) = \varphi(xu) - i_\varphi u_x \tag{14}$$

lässt sich auch, da

$$2i_\varphi = 2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = i^2 - i_1$$

ist**), auf die Form

$$2\varphi(xu) = (i^2 - i_1)\, u_x - 2if(xu) + 2f_1(xu) \tag{15}$$

bringen, in welcher sie auf directem Wege von Clebsch und Gordan (a. a. O. S. 376; Clebsch-Lindemann a. a. O. S. 991) abgeleitet ist.

Die Collineationen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\cdots$, welche durch Wiederholung der $f = 0$ entstehen, können wir das Quadrat, den Cubus, $\cdots$ der $f = 0$ nennen. Die Gleichungen $i_1 = 0$, $i_2 = 0$ drücken also die eingeschriebene Dreieckslage des Quadrats, resp. des Cubus der Collineation $f = 0$ aus. Ebenso bedeutet $i_\varphi = 0$, d. i. $i^2 = i_1$, die umschriebene Dreieckslage der $f = 0$, bei welcher $aa''a'''$ in gerader Linie liegen. Die Bedingungen $i = 0$ und $i_\varphi = 0$ (oder $i = 0$ und $i_1 = 0$) können gleichzeitig erfüllt sein; dann ist $f_1(xu)$ mit $\varphi(xu)$, d. h. durchweg a''' mit a identisch, die Collineation $f = 0$ befindet sich in der sog. trilinearen Lage***) oder Dreieckslage. Bei dieser existirt eine Quadrupelserie von Dreiecken, welche ihren homologen eingeschrieben, und eine Quadrupelserie von Dreiecken, welche ihren homologen umschrieben sind; beiden Serien gemeinschaftlich ist die

---

*) Hiernach liegen im Falle $i = 0$ die drei Punkte

$$\varphi(x)_1 \varphi(x)_2 | \varphi(x)_3, \quad x_1 | x_2 | x_3, \quad f(x')_1 | f(x')_2 | f(x')_3$$

oder nach der Bezeichnungsweise des vorigen Artikels $aa'a'''$ durchweg in gerader Linie. Umgekehrt: Wenn einmal drei Punkte $aa'a'''$ auf eine Gerade fallen, welche jedoch a'' nicht enthält (d. h. a muss ausserhalb der Doppellinien der Collineation liegen), so ist dies immer der Fall, und man hat dann $i = 0$.

**) Bildet man in (1) von beiden Seiten die Invariante i, so kommt:

$$i_1 - ii = i_\varphi - 3i_\varphi, \text{ d. i. } 2i_\varphi = i^2 - i_1.$$

***) Nach Schroeter, Oberflächen zweiter Ordnung, § 47.

Doppelserie der Dreiecke $aa'a''$, welche sich mit den homologen $a'a''a$ cyklisch decken und diesen mithin zugleich umschrieben und eingeschrieben sind. Aus dem Zusammenfallen der Punkte a und a''' folgt jedoch nur dann nothwendig $i = i_\varphi = 0$, wenn a ausserhalb der Doppellinien der Collineation liegt.

9. Aus (15) folgt, indem man x durch x' ersetzt und (8) berücksichtigt:

$$2\Delta u_x = (i^2 - i_1)f - 2if_1 + 2f_2 \tag{16}$$

und hieraus, indem man von beiden Seiten die Invariante i bildet:

$$6\Delta = (i^2 - i_1)i - 2ii_1 + 2i_2 = i^3 - 3ii_1 + 2i_2,$$

in Uebereinstimmung mit der unter (12) angeführten Relation. Ersetzt man wiederholt x durch x', so kommt die unbegrenzte Reihe der bekannten Relationen:

$$\begin{aligned} 2\Delta f &= (i^2 - i_1) f_1 - 2if_2 + 2f_3, \\ 2\Delta f_1 &= (i^2 - i_1) f_2 - 2if_3 + 2f_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

welche im Verein mit (16) lehren, dass die Formen $f_2, f_3, \ldots$ sich aus u_x, f, f_1 linear zusammensetzen. Lineare Abhängigkeit zwischen u_x, f und f_1 würde perspective Lage der beiden projectiven Systeme bedeuten.

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} f_2 &= \Delta u_x - i_\varphi f + if_1, \\ f_3 &= i\Delta u_x - (ii_\varphi - \Delta) f + (i^2 - i_\varphi) f_1. \end{aligned}$$

Wenn daher dem (ausserhalb der Doppellinien) beliebigen Punkte a bei wiederholter Anwendung der Collineation $f = 0$ der Reihe nach die Punkte b, c, d, e entsprechen, so besitzt e in dem (falls weder die Beziehung perspectiv noch i oder i_φ gleich Null) durch a, b, c als Fundamentalpunkte und d als Einheitspunkt festgelegten Coordinatensysteme die homogenen Coordinaten

$$i \left| \frac{ii_\varphi - \Delta}{i_\varphi} \right| \frac{i^2 - i_\varphi^2}{i}.$$

Hiermit ist die geometrische Deutung der absoluten Invarianten der Form $f(xu)$ gegeben. Es sind nämlich die Doppelverhältnisse

$$b(acde) = \frac{i^2}{i^2 - i_\varphi}, \qquad c(abde) = \frac{ii_\varphi}{ii_\varphi - \Delta}.$$

10. Wir fragen wieder nach der Gesammtheit derjenigen Collineationen, welche in sich selbst übergehen, wenn man auf sie die gegebene Collineation anwendet, d. h. wenn man x, u in neue Elemente x', u' überführt mittelst der Formeln

$$(17) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi(x')_1, & x_2 = \varphi(x')_2, & x_3 = \varphi(x')_3, \\ u_1 = f_1(u'), & u_2 = f_2(u'), & u_3 = f_3(u'), \end{cases}$$

welche $u_x = \Delta u'_{x'}$ ergeben nach (8). Jede Form $F(xu)$, welche eine solche Collineation darstellt, wird eine Zwischenform von $f(xu)$ sein. Aber auch umgekehrt wird jene bilineare Zwischenform $F(xu)$ der Form $f(xu)$ durch die Substitution (17) bis auf einen constanten Factor in sich selbst transformirt werden; denn nach (8) wird $f(xu)$ durch jene Substitution in

$$\Sigma a_{ik} \varphi(x')_i f_x(u') = \Delta f(x'u')$$

transformirt, und wenn also $F(xu)$ gleichzeitig in $F'(x'u')$ übergeht, so entsteht $F'(x'u')$ bis auf einen constanten Factor aus $f(x'u')$ in gleicher Weise, wie $F(xu)$ aus $f(xu)$, d. h. es ist

$$F'(x'u') = \Delta F(x'u').$$

Unter der Voraussetzung, dass die gegebene Collineation weder perspectiv ist noch sich in umschriebener oder eingeschriebener Dreiecks-lage befindet, wird die covariante Collineation $F(xu) = 0$ durch irgend eines ihrer Paare aa' bestimmt, wobei jedoch weder a noch a' auf einer Doppellinie der $f(xu) = 0$ liegen darf; denn wenn vermöge der gegebenen Collineation aa' in bb', bb' in cc', cc' in dd' übergehen, so müssen durch die Beziehung $F(xu) = 0$ den Punkten $a\,b\,c\,d$ die Punkte $a'\,b'\,c'\,d'$ zugeordnet werden. Andrerseits kann ich durch geeignete Wahl der homogenen Unbestimmten $\varkappa|\lambda|\mu$ in der Zwischenform

$$(18) \qquad \varkappa \Delta u_x - \lambda i_\varphi f + \mu i f_1$$

stets eine mit $f(xu)$ covariante Collineation herstellen, bei welcher $a\,a'$ einander entsprechen. Folglich werden alle mit $f(xu)$ covarianten Collineationen durch die Formel (18) umfasst. Da hier $\varkappa|\lambda|\mu$ die homogenen Coordinaten des Punktes a' in dem durch a, b, c als Fundamentalpunkte und d als Einheitspunkt definirten Coordinatensysteme bedeuten, mithin alle Doppelverhältnisse innerhalb des Fünfecks $a\,b\,c\,d\,a'$, so lange eine und dieselbe Zwischenform festgehalten wird, bei variirendem a erhalten bleiben, so ergiebt sich der Satz:

Wird auf einer Ebene durch die — weder perspective noch in umschriebener oder eingeschriebener Dreieckslage befindliche — Collineation $f(xu) = 0$ dem Punkte a (der auf keiner Doppellinie liegen darf) der Punkt b, diesem der Punkt c, diesem der Punkt d zugeordnet, und sucht man zu a, b, c, d denjenigen Punkt a', welcher das Fünfeck $a\,b\,c\,d\,a'$ zu einem gegebenen Fünfeck projectiv macht, so erzeugt das Paar $a\,a'$ bei variirendem a eine Collineation, welche durch die gegebene in sich selbst übergeführt wird.

Wenn durch die gegebene Collineation noch d in c, e in f, ...

und a' in b', b' in c', c' in d', ... übergehen, so verwandelt die neue Collineation a in a', b in b', c in c', ..., d. h. die Figuren $abcde\ldots$ und $a'b'c'd'e'\ldots$ sind collinear.*)

11. Schon oben (Art. 8) ist die Gleichung $i_1 = 0$ als die Bedingung für eingeschriebene Dreieckslage des Quadrats der Collineation $f = 0$ bezeichnet worden.**) Um das Quadrat zu einem beliebigen Product zu verallgemeinern, werde noch eine bilineare Form

$$f'(xu) = \Sigma a'_{ik} x_i u_k \,(i,k = 1, 2, 3)$$

eingeführt. Indem man zu jedem Punkte x den durch die Gleichung $f(xu) = 0$ definirten Punkt x' und zu diesem den durch die Gleichung $f'(x'u) = 0$ definirten Punkt bestimmt, entsteht eine dritte Collineation, das Product der durch die Formen f und f' dargestellten, welche der Form

$$f'(x'u) = \sum_{i,\varkappa,\lambda} a_{i\lambda}\, a'_{\lambda\varkappa}\, x_i\, u_\varkappa$$

entspricht. Obgleich nun die beiden Factoren eines derartigen Productes im Allgemeinen nicht mit einander vertauscht werden dürfen, so fällt doch der Ausdruck, dessen Verschwinden die eingeschriebene Dreieckslage des Productes bedingt, nämlich

$$\sum_{i,\lambda} a_{i\lambda}\, a'_{\lambda i} = \sum_{i,\lambda} a'_{i\lambda}\, a_{\lambda i}, \tag{19}$$

in Bezug auf die beiden Factoren symmetrisch aus. *Wenn also das Product der Collineationen $f = 0$, $f' = 0$ sich in eingeschriebener Dreieckslage befindet, so bleibt diese Eigenschaft bei Vertauschung der beiden Collineationen erhalten.* Dasselbe gilt natürlich auch für die umschriebene Dreieckslage.

Man gelangt zu einer etwas anderen Auffassung dieses Gegen-

---

*) Lässt man also einen weiteren Punkt α durch wiederholte Anwendung der gegebenen Collineation in $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$, dagegen durch die neue Collineation in α' übergehen, so erzeugen die Figuren $abcde\ldots$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ eine dritte, wieder zur Gruppe (18) gehörige Collineation, in welcher auch die Punkte a' und α' wegen der Projectivität der Fünfecke $abcda'$ und $\alpha\beta\gamma\delta\alpha'$ sich entsprechen, d. h.: *Lässt man den Punkt a' bei festen a und α irgend eine Figur beschreiben und bestimmt allemal in der durch das Paar $a\alpha'$ definirten Collineation der Gruppe* (18) *den dem Punkte α zugeordneten Punkt α', so beschreibt α' eine Figur, welche mit der von a' beschriebenen in einer ebenfalls zur Gruppe* (18) *gehörigen projectiven Beziehung steht.* Diese Folgerung stimmt mit dem von Herrn Burmester, Zeitschr. f. Math. u. Phys., XX. Jahrg., S. 384 unter Nr. 1 gegebenen Satze überein, da alle Collineationen jener Gruppe die drei Doppelpunkte gemein haben.

**) Eine synthetische Behandlung dieses Falles enthält die Inauguraldissertation von S. Goldschmidt: „Ueber eine besondere Art von Collineation in der Ebene", Giessen 1883.

wenn man die eine Collineation, etwa $f = 0$, durch ihre Um- $v = 0$ ersetzt, wodurch die Invariante (19) in

$$\Theta = \sum a_{ik} a'_{ik} = \sum \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} a'_{ik}$$

.e Gleichung $\Theta = 0$ stellt nämlich eine gewisse Beziehung den Collineationen $f = 0$ und $f' = 0$ dar, welche ich die ariebene Dreieckslage der $f = 0$ gegen die $f' = 0$ nennen .l, und welche darin besteht, dass für ein (eigentliches) Dreieck und mithin für eine Quadrupelserie von Dreiecken das homologe Dreieck in Bezug auf $f = 0$ umschrieben ist dem homologen in Bezug auf $f = 0$.*) Die analog zu definirende eingeschriebene Dreiecks- lage der $f = 0$ gegen die $f' = 0$ wird durch das Verschwinden der Invariante

$$\Theta' = \sum a_{ik} a'_{ik} = \sum \frac{\partial \Delta'}{\partial a'_{ik}} a_{ik}$$

ausgedrückt, wo

$$\Delta' = \Sigma \pm a'_{11} a'_{22} a'_{33}.$$

Dabei ist

$$2\Theta' = \sum a'_{i\varkappa} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{i\varkappa} \partial a_{\lambda\mu}} = \sum \frac{\partial \Theta}{\partial a_{i\varkappa}} a'_{i\varkappa}.$$

Die Interpretation der Ausdrücke ist bei der so veränderten Auffassung nicht mehr auf eine einzige Ebene beschränkt, vielmehr kann man, während dem Punkte x eine Ebene angewiesen bleibt, die mittels $f = 0$, $f' = 0$ zugeordneten Punkte auf einer anderen Ebene variiren lassen.

12. Statt von i zu Θ und Θ' überzugehen, kann man umgekehrt die Deutung von Θ oder Θ' zum Ausgangspunkt nehmen, welche im Folgenden direct durch eine Identität dargestellt werden soll.

Es sei wieder

$$(20) \qquad \begin{aligned} x_1 &= (vw)_1, \; x_2 = (vw)_2, \; x_3 = (vw)_3, \\ u_1 &= (yz)_1, \; u_2 = (yz)_2, \; u_3 = (yz)_3. \end{aligned}$$

Dem Punkte $y + \nu z$ der Geraden u entspricht ein Punkt ξ in der einen, ein Punkt ξ' in der anderen Collineation; werden diese Punkte mit x durch zwei Geraden $v + \lambda w$, $v + \mu w$ verbunden, so hat man:

$$\begin{aligned} f(yv) + \lambda f(yw) + \nu f(zv) + \lambda\nu f(zw) &= 0, \\ f'(yv) + \mu f'(yw) + \nu f'(zv) + \mu\nu f'(zw) &= 0. \end{aligned}$$

Mithin kommen (Art. 5) bei variirendem v die Büschel der Strahlen $x\xi$ und $x\xi'$ in involutorische Lage unter der Bedingung $\psi(xu) = 0$, wo

*) Befindet sich also eine Collineation in eingeschriebener Dreieckslage, so liegt sie in eingeschriebener Dreieckslage gegen die identische Collineation

$$u_x = 0.$$

$$\psi(xu) = f(yv)\,f'(zw) - f(yw)\,f'(zv) - f(zv)\,f'(yw) + f(zw)\,f'(yv).$$

Für $f'(xu) = u_x$ reducirt sich $\psi(xu)$ auf diejenige Zwischenform von f allein, für welche in Art. 7 und 8 dasselbe Zeichen eingeführt war.

In dem beliebig angenommenen Strahlenbüschel α wird durch jede Gerade u eine projective Beziehung erzeugt, indem man zu dem die u durchlaufenden Punkte b die in den Collineationen $f = 0$, $f' = 0$ entsprechenden Punkte β, β' aufsucht und die Strahlen $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$ einander zuordnet; die Geraden u, für welche diese Beziehung involutorisch ausfällt, laufen durch einen gewissen Punkt A, und die Paare αA erzeugen in der Ebene eine neue Collineation mit der Gleichung $\psi(xu) = 0$. Geht also die Gerade u durch A, so gehört auf ihr zu jeder Stelle b eine andre c, zu welcher mittels der Collineationen $f = 0$, $f' = 0$ homologe Punkte γ, γ' sich derart ergeben, dass die Gerade $\alpha\gamma'$ durch β, die Gerade $\alpha\beta'$ durch γ hindurchgeht.

Die Form $\psi(xu)$ lässt sich auf $\varphi(xu)$ zurückführen. Definirt man nämlich wieder eine Operation δ durch die Formel

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial a_{ix}} a'_{ix},$$

so wird

$$\delta a_{ix} = a'_{ix}, \quad \delta f(xu) = f'(xu), \quad \delta f_i(u) = f_i'(u), \quad \delta f(x)_x = f'(x)_x,$$

zugleich (Art. 11)

$$\delta\Delta = \Theta, \quad \delta\Theta = 2\Theta', \quad \delta\Theta' = 3\Delta'.$$

Nun hat man unter der Annahme (20):

$$\varphi(x)_1 = \sum_x \alpha_{1x} x_x = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2(v) & f_3(v) \\ f_2(w) & f_3(w) \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich

$$\varphi(xu) = \sum u_i\,\varphi(x)_i = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1(v) & f_2(v) & f_3(v) \\ f_1(w) & f_2(w) & f_3(w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(yv) & f(yw) \\ f(zv) & f(zw) \end{vmatrix},$$

d. i.

$$\varphi(xu) = f(yv)\,f(zw) = f(zv)\,f(yw).$$

Demnach ist einfach

$$\psi(xu) = \delta\varphi(xu) = \Sigma A_{ix} u_i x_x,$$

wenn man $\delta\alpha_{ix}$ mit A_{ix} bezeichnet.

Die Anwendung des δ-Processes auf die erste der identischen Gleichungen (9) giebt jetzt:

$$\Theta f(xu) + \Delta f'(xu) = \Sigma A_{ix} f_i(u) f(x)_x + \Sigma\alpha_{ix} f_i'(u) f(x)_x + \Sigma\alpha_{ix} f_i(u) f'(x)_x$$
$$= \Sigma A_{ix} f_i(u) f(x)_x + 2\Delta f'(xu),$$

und mithin ist

$$(21)\qquad \begin{cases} \Sigma A_{ix} f_i(u) f(x)_x = \Theta f(xu) - \Delta f'(xu), \\ \Sigma A_{ix} f_i'(u) f'(x)_x = \Theta' f'(xu) - \Delta' f(xu). \end{cases}$$

Wenn ich nun die obige Figur um den mittels $\varphi = 0$ dem α zugeordneten Punkt a, dann um den mittels $f' = 0$ dem a zugeordneten Punkt α' erweitere, während nach wie vor bcA in gerader Linie bleiben, so genügt die vermöge $f = 0$ der bc entsprechende Gerade $\beta\gamma$, an Stelle von u eingesetzt, der Gleichung:

$$\Sigma A_{ix} \alpha_x f_i(u) = 0, \quad \text{d. i.} \quad \Sigma A_{ix} f_i(u) f(a)_x = 0.$$

Unter der Bedingung $\Theta = 0$ fällt aber wegen (21) diese Gleichung mit $f'(au) = 0$ zusammen, d. h. die $\beta\gamma$ geht alsdann durch α', das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist dem Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ umschrieben.

III. Reciproke ebene Systeme.

13. Die vorstehende Betrachtung der Collineation lässt sich auf die Reciprocität nur theilweise übertragen; es wird daher hier nur eine kurze Betrachtung der letzteren Platz finden.

Unter Zugrundelegung der in zwei Reihen von congredienten Variablen $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$ linearen Form

$$f(xy) = \Sigma a_{ix} x_i y_x \quad (i, x = 1, 2, 3)$$

setzen wir zur Abkürzung

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3 = f_i(y), \quad a_{1x} x_1 + a_{2x} x_2 + a_{3x} x_3 = f(x)_x$$

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} = \Delta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ix}} = \alpha_{ix}, \quad \Sigma \alpha_{ix} u_i v_k = \varphi(uv),$$

$$\alpha_{i1} v_1 + \alpha_{i2} v_2 + \alpha_{i3} v_3 = \varphi_i(v), \quad \alpha_{1x} u_1 + \alpha_{2x} u_2 + \alpha_{3x} u_3 = \varphi(u)_x$$

und notiren die Identitäten

$$\Sigma \alpha_{ix} u_i f(x)_x = \Sigma \alpha_{ix} u_x f_i(x) = \Delta u_x,$$

$$\Sigma \alpha_{ix} f_i(y) f(x)_x = \Delta f(xy),$$

$$\varphi(uv) = f(x\xi) f(y\eta) - f(y\xi) f(x\eta),$$

bei deren letzter zu nehmen ist

$$(22)\qquad \begin{aligned} u_1 &= (xy)_1, \quad u_2 = (xy)_2, \quad u_3 = (xy)_3, \\ v_1 &= (\xi\eta)_1, \quad v_2 = (\xi\eta)_2, \quad v_3 = (\xi\eta)_3. \end{aligned}$$

Durch die Gleichung $f(xy) = 0$ wird (bei $\Delta \neq 0$) eine Reciprocität vermittelt, welche

den Punkt $x_1 | x_2 | x_3$ in die Gerade $f(x)_1 | f(x)_2 | f(x)_3$,
die Gerade $u_1 | u_2 | u_3$ in den Punkt $\varphi(u)_1 | \varphi(u)_2 | \varphi(u)_3$

überführt, so dass dieselbe Reciprocität auch durch die Gleichung

$\varphi(uv) = 0$ dargestellt wird, während für die inverse Beziehung die Gleichungen $f(yx) = 0$, $\varphi(vu) = 0$ gelten.

14. Mit der Form $f(xy)$ werde jetzt eine zweite derselben Art in Verbindung gebracht:

$$f'(xy) = \Sigma a'_{ix}\, x_i\, y_x$$

und die Operation δ wie in Art. 12 definirt. Setzt man wieder

$$\delta\Delta = \Theta,\ \delta\Theta = 2\Theta',\ \delta a_{ix} = A_{ix},\ \Sigma A_{ix}\, u_i v_x = \psi(uv),$$

so ergiebt sich unter der Annahme (22):

$$\Theta = \Sigma a_{ix} a'_{ix},\quad \Theta' = \Sigma a_{ix} a'_{ix},$$

$$\psi(uv) = \delta\varphi(uv) = f(x\xi)f'(y\eta) - f(y\xi)f'(x\eta) - f(x\eta)f'(y\xi) + f(y\eta)f'(x\xi)$$

und in Analogie zu den Gleichungen (21):

$$\Sigma A_{ix} f_i(y) f'(x)_x = \Theta\, f(xy) - \Delta\, f'(xy),$$
$$\Sigma A_{ix} f'_i(y) f'(x)_x = \Theta' f'(xy) - \Delta' f(xy).$$

Auf der beliebig angenommenen Geraden α wird durch jede Gerade u eine projective Beziehung erzeugt, indem man zu dem die u durchlaufenden Punkte b die in den Correlationen $f = 0$, $f' = 0$ entsprechenden Strahlen β, β' aufsucht und die Punkte $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$ einander zuordnet; die Geraden u, durch welche diese Beziehung zu einer involutorischen gemacht wird, laufen durch einen gewissen Punkt A, und die Paare $A\alpha$ erzeugen auf der Ebene eine neue Correlation mit der Gleichung

$$\psi(uv) = 0.$$

Legt man also die Gerade u durch A, so liefert jeder ihrer Punkte b einen anderen c derart, dass die ihm mittels $f = 0$, $f' = 0$ zugeordneten Strahlen γ, γ' durch $\alpha\beta'$ resp. $\alpha\beta$ hindurchgehen. Man bestimme nun den mittels $f(yx) = 0$ der Geraden α zugeordneten Punkt a, und die mittels $f'(xy) = 0$ dem Punkte a zugeordnete Gerade α'; dann erfüllt der Punkt $\beta\gamma$, an Stelle von y eingesetzt, die Gleichung:

$$\Sigma A_{ix} f_i(y) f(a)_x = 0,$$

welche im Falle $\Theta = 0$ sich mit $f'(ay) = 0$ deckt. Unter der Bedingung $\Theta = 0$ liegt also der Punkt $\beta\gamma$ auf der Geraden α', das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist dem Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ eingeschrieben; es ist dann für eine Quadrupelserie von Dreiecken das homologe Dreieck in Bezug auf $f = 0$ eingeschrieben dem homologen in Bezug auf $f' = 0$, und wir können sagen, dass die Reciprocität $f = 0$ sich gegen die Reciprocität $f' = 0$ in eingeschriebener Dreieckslage befindet. Analog wird das Bestehen der Gleichung $\Theta' = 0$ die umschriebene Dreieckslage der $f = 0$ gegen die $f' = 0$ nach sich ziehen.

15. Man erkennt leicht die Uebereinstimmung dieser geometrischen Interpretation der Gleichung $\Theta = 0$ mit der von Herrn Rosanes in

§ 3 der Abhandlung „Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft“ (Crelle's Journal Bd. 90, S. 303) auf ganz anderem Wege hergeleiteten; bei verschwindendem Θ nennt Herr Rosanes die Formen $f'(xy)$ und $\varphi(uv)$ einander „conjugirt“. Die obige Betrachtung enthält die Verallgemeinerung des Verfahrens, mittels dessen ich früher (vergl. Rosanes, im vorstehenden Aufsatz) zur Darstellung der bekannten Eigenschaft „conjugirter“ Kegelschnitte die Identität

$$\Sigma A_{ix} f_i(x) f_x(x) = \Theta f(xx) - \Delta f'(xx)$$

gebildet hatte, in welcher

$$f(xx) = \Sigma a_{ix} x_i x_x \text{ mit } a_{ix} = a_{xi},$$
$$f'(xx) = \Sigma a'_{ix} x_i x_x \text{ mit } a'_{ix} = a'_{xi},$$
$$f_i(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ u. s. w.}$$

Die Geraden, welche die Form $\psi(uu) = \Sigma A_{ix} u_i u_x$ $(A_{ix} = A_{xi})$ annulliren, sind diejenigen, welche aus den Linien $f(xx) = 0, f'(xx) = 0$ harmonische Punktepaare herausschneiden. Aus dem vorigen Artikel ergiebt sich daher der unmittelbare Zusammenhang der beiden gegebenen Kegelschnitte mit dem durch den „Kegelschnitt der acht Tangenten“ erzeugten Polarsysteme.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass die simultane Invariante Θ der beiden (allgemeinen) Formen $f(xy)$ und $f'(xy)$ mit der Grösse zusammenfällt, welche gemäss der in Art. 7 gegebenen Definition von i für die Form

$$g(xu) = \sum_{i,x} a_{ix} f_i'(x) u_x = \sum_{i,x,\lambda} a_{ix} a'_{i\lambda} x_\lambda u_x$$

gebildet wird. Die Form $g(xu)$ repräsentirt diejenige Collineation, welche entsteht, wenn man auf den Punkt x zuerst die Reciprocität $f'(yx) = 0$, auf die so erhaltene Gerade v die Reciprocität $\varphi(vu) = 0$ anwendet. Die Bedeutung von Θ lässt sich daher aus der von i ohne Weiteres entnehmen.

Nimmt man insbesondere $f(yx)$ für $f'(xy)$, so wird

$$g(xu) = \sum_{i,x,\lambda} a_{ix} a_{\lambda i} x_\lambda u_x .$$

Die Collineation $g(xu) = 0$, welche in diesem Falle durch zweimalige Anwendung einer und derselben Reciprocität $f(xy) = 0$ entsteht, kann durch die Gleichungen

$$a_{1x} x_1 + a_{2x} x_2 + a_{3x} x_3 = a_{x1} x_1' + a_{x2} x_2' + a_{x3} x_3' \quad (x = 1,2,3)$$

dargestellt werden und transformirt daher die Kegelschnitte eines

gewissen Büschels in sich selbst.*) Da nun für $f'(xy) = f(yx)$ die Werthe von Θ und Θ' einander gleich werden:

$$\Theta = \Theta' = \Sigma a_{ix} a_{xi},$$

so folgt: *Wenn eine Reciprocität sich gegen ihre inverse in eingeschriebener Dreieckslage befindet, so befindet sie sich gegen dieselbe zugleich in umschriebener Dreieckslage, und umgekehrt;* es giebt dann eine Doppelserie von Dreiecken, für welche die in beiderlei Sinn homologen Dreiecke cyklisch aufeinanderfallen. Oder: *Liegt eine durch zweimalige Anwendung einer und derselben Reciprocität entstandene Collineation in eingeschriebener oder in umschriebener Dreieckslage, so befindet sie sich überhaupt in Dreieckslage.*

Giessen, 1882.

*) Rosanes, Crelle's Journal Bd. 80, S. 61 ff.; auch in Baltzer's Determinanten (V. Auflage) § 14, 14.

Ueber die Construction der Flächen $n$ter Ordnung.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

Obwohl die Aufgabe, eine Fläche $n$ter Ordnung durch die dafür hinreichende und nothwendige Anzahl von Punkten zu legen, durch ihre Zurückführung auf ein System von linearen Gleichungen als gelöst zu betrachten ist, so scheint mir doch die geometrische Lösung dieser Aufgabe auf Grund einer der geometrischen Erzeugungen der Flächen $n$ter Ordnung nicht ohne Interesse. Die Erzeugung der Fläche durch ein Strahlenbündel und ein ihm reciprokes Flächenbündel scheint zu diesem Zwecke am geeignetsten. Diese selbe Erzeugung nahmen Herr Schroeter*) bei Construction der Flächen 2. Ordnung und Herr v. Escherich**) bei der der Flächen dritter und höherer Ordnung zum Ausgangspunkte. Aber einerseits löst Herr v. Escherich die Aufgabe nicht in dem Sinne, dass er direct ein Strahlenbündel und ein ihm reciprokes Flächenbündel construirt, welche die Fläche durch die gegebenen Punkte erzeugen, sondern es werden durch die, um einen verminderten, gegebenen Punkte zwei wie oben erzeugte Flächen gelegt und aus dem durch sie bestimmten Büschel wird die auch durch den letzten Punkt gehende Fläche ausgesucht, deren erzeugende Bündel aber erst auf anderm Wege gesucht werden müssten; wie, giebt Herr v. Escherich nicht an. Lässt man aber solche Lösungsmethoden zu, so kann man sich, da eine practische Ausführung solcher Lösungsmethoden doch nicht in Betracht kommt, einfacher sogleich das aus allen Flächen $n$ter Ordnung bestehende lineare System construiren und aus ihm die durch die gegebenen Punkte gehende Fläche successive aussuchen***). In dem Folgenden nun soll die Aufgabe in dem obigen Sinne vollständig gelöst werden.

*) S. Schroeter, problematis geometrici etc. Journal f. Math. Bd. 62, p. 215.

**) S. v. Escherich, die reciproken linearen Flächensysteme, Ber. der Wiener Academie, Bd. LXXV, p. 523; die Construction der algebraischen Flächen etc. ib. Bd. LXXXV, p. 526 und p. 893.

***) Derselbe Vorwurf kann gegen die Construction einer Fläche 3. O. durch 19 Punkte erhoben werden, welche Herr Le Paige in den Comptes rendus t. XCVII p. 34 u. p. 158 gegeben hat; s. auch Acta mathematica, t. III.

Andrerseits ferner sagt zwar Herr v. Escherich l. c, dass die Lösung eines von Herrn Schroeter schon bei der Construction der Flächen 2. Ordnung aufgewiesenen und auch bei der Construction von Flächen gewisser höherer Ordnungen auftretenden Paradoxons*), wonach nämlich die Fläche scheinbar durch die aus der analytischen Geometrie bekannte Anzahl von Punkten noch nicht bestimmt ist, „sich ohne Schwierigkeit durch Betrachtung des Gleichungssystems ergebe," giebt aber diese Lösung nicht an. Nun habe ich eine Lösung dieses Paradoxons gefunden, die sich nicht so ohne Weiteres ergiebt, und ich muss diese daher, so lange Herr v. Escherich nichts Näheres über die seinige mittheilt, als die alleinige ansehen.

Zuletzt möchte ich mir die Frage erlauben, warum sich Herr v. Escherich auf die punktweise vorzunehmende Construction der Flächen *mit blosser Hilfe von Cirkel und Lineal***) capricirt, und ob er im Ernste glaubt, dass dieselbe bei allgemeinen Flächen von höherer als der vierten Ordnung bei irgend einer Erzeugung möglich sei? Schliesslich sind doch alle solche Erzeugungen, wenn sie nicht durch singuläre Elemente bedingt sind, die wiederum von Gleichungen höheren Grades abhängen oder nicht in Betracht kommen, auf einander zurückführbar, sodass durch alle Erzeugungen dasselbe erreicht werden kann.

Ich werde zum Schlusse noch zeigen, wie die Anwendung meiner Construction auf Flächen 3. Ordnung auf die Erzeugung jeder derselben durch ein Strahlenbündel und ein ihm reciprokes Flächenbündel 2. Grades führt, wobei keine andern Schnittpunktsätze als die für die ebenen Curven 3. Ordnung geometrisch bewiesenen vorausgesetzt werden

§ 1.

Sind in einem Raume von 3 Dimensionen R_3 irgend vier collineare Punktfelder $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ gegeben, so bestimmen dieselben bekanntlich***) ein Gebüsch collinearer Punktfelder derart, dass die Punkte, welche irgend zwei Punkten P und Q von α successive entsprechen, zwei collineare Räume bilden; diese collinearen Räume bilden umgekehrt ein Netz derart, dass die Punkte, welche irgend zwei Punkten S und T eines Raumes successive entsprechen, zwei collineare Punktfelder beschreiben.

Die vier collinearen Punktfelder α, α', α'', α''' mögen jetzt nicht mehr in demselben R_3 von drei Dimensionen, sondern in irgend einem

*) V. meine Note in d. Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1883, p. 59.

**) Die Fläche 3. Ordnung lässt sich übrigens mit blosser Hülfe des Lineals aus 19 Punkten punktweise construiren, d. h. es lassen sich aus diesen Punkten linear immer neue Punkte finden, der Cirkel dabei ist überflüssig.

***) S. meine Abh. „Ueber die durch collineare Grundgeb." etc. Math. Ann. XVIII, p. 16.

linearen Raume R_n von n Dimensionen liegen. Nehmen wir aber in diesem irgend einen R_3 an und ausserhalb desselben $n-3$ Punkte, so bestimmt jeder Punkt der vier Punktfelder mit diesen $n-3$ Punkten einen R_{n-3}, welcher den R_3 in einem Punkte, dem Projectionspunkte jenes schneidet. In dieser Weise werden also die vier collinearen Punktfelder α, α', α'', α''' in vier collineare Punktfelder β, β', β'', β''' projicirt, welche in demselben R_3 liegen, also ein Gebüsch collinearer Punktfelder und ein Netz collinearer Räume in R_3 bestimmen. Alle diese Räume sind offenbar je perspectiv bezogen auf die Räume von 3 Dimensionen, welche je vier entsprechende Punkte der vier Punktfelder α, α', α'', α''' bestimmen, sodass diese auch unter einander collinear bezogen sind. Alles kommt nun darauf an zu beweisen, dass die Punkte, welche hierbei successive einem Punkte eines ersten Raumes entsprechen, je ein ebenes Punktfeld erfüllen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir irgend zwei entsprechende Geraden g und g' von resp. α und α'. Diese projiciren sich in die beiden entsprechenden Geraden h und h' von β und β' resp. Die durch g und g' erzeugte Regelschaar projicirt sich hierbei in die durch h und h' erzeugte, und es gehört jede Gerade dieser Schaar je einem der collinearen Räume des Netzes an, und die collineare Beziehung derselben geschieht durch die Geraden der andern Schaar. Aber auch die Geraden der durch g und g' erzeugten Regelschaar gehören je einem der durch je 4 entsprechende Punkte von α, α', α'', α''' bestimmten Räume an und auch für sie geschieht die collineare Beziehung durch die Geraden der andern Schaar, weil ja die durch g und g' erzeugte Regelschaar mit dem durch g und g' bestimmten Raume von 3 Dimensionen die vollständige Projection der von h und h' erzeugten ist. Hiermit ist also gezeigt, dass die Punkte, welche einem auf der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte von α und α' liegenden Punkte eines ersten jener Räume in allen denjenigen Räumen, deren bestimmende Punkte in α, α', α'', α''' gerade Linien beschreiben, successive entsprechen, wieder gerade Linien beschreiben, woraus folgt, dass die welche einem solchen Punkte in allen diesen Räumen entsprechen, ein ebenes Punktfeld beschreiben. Da man nun die Punktfelder α, α' durch jedes dieser ersetzen kann — denn dass sie zu diesen collinear sind, folgt aus der perspectiven Beziehung zu R_3 — und für α'' und α''' dasselbe Raisonnement gilt, so beweist man leicht die Gültigkeit unserer Behauptung für alle Punkte jenes ersten Raumes.

Da diese ∞^3 ebenen Punktfelder als Verbindungsebenen entsprechender Punkte von irgend drei je collinearen Räume R_3', R_3'', R_3''' entstehen, so liegt in jedem R_{n-1} von R_n gerade eins und i. A. nur eins derselben. Denn der R_{n-1} schneidet R_3', R_3'', R_3''' in drei Ebenen γ', δ'', ε''' resp. Die der Ebene γ' in R_3'' entsprechende Ebene γ''

schneidet δ'' in einer Geraden g'' und die dieser in R_3''' entsprechende Gerade g''' wieder ε''' in einem Punkte; die Ebene, welche diesen Punkt mit den ihm in R_3' und R_3'' entsprechenden Punkten verbindet, ist die gesuchte.

So erhalten wir das Resultat:

Sind in einem Raume von n Dimensionen R_n vier collineare ebene Punktfelder gegeben, so bestimmen dieselben ein Gebüsch collinearer Punktfelder derart, dass in jedem in R_n enthaltenen R_{n-1} eines dieser Punktfelder und i. A. nur eins enthalten ist; die Punkte, welche hierbei successive irgend zwei Punkten eines ersten Punktfeldes entsprechen, beschreiben zwei collineare Räume von 3 Dimensionen.

§ 2.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich folgender Satz:

In jedem linearen Flächensystem nter Stufe lässt sich ein und i. A. nur ein Bündel bestimmen, welches so reciprok auf ein Strahlenbündel bezogen ist, dass $3n + 2$ gegebenen Strahlen desselben Flächen durch diesen zugeordnete $3n + 2$ gegebene Punkte entsprechen.

Dieser Satz ist für den niedrigsten in Betracht kommenden Fall für $n = 2$ von Herrn Schroeter a. a. O. bewiesen; nehmen wir daher an, er sei für $n - 1$ richtig, so folgt er auch für n selbst. Denn danach giebt es in jedem in dem gegebenen linearen Flächensystem $n$ter Stufe enthaltenen linearen Flächensystem $(n - 1)$ter Stufe ein Bündel, welches so reciprok auf das gegebene Strahlenbündel bezogen ist, dass $3(n - 1) + 2$ von den gegebenen Strahlen desselben Flächen durch die zugeordneten $3(n - 1) + 2$ gegebenen Punkte entsprechen. Bestimmen wir diese Bündel für irgend vier lineare Systeme $(n - 1)$ter Stufe, so bestimmen diese vier collinearen Bündel nach § 1 ein Gebüsch collinearer Bündel derart, dass in jedem linearen Systeme $(n - 1)$ter Stufe ein und i. A. nur eins dieser Bündel liegt. Demnach bilden alle jene Bündel unseres Systems $n$ter Stufe, welche $3(n - 1) + 2$ von den $3n + 2$ Bedingungen erfüllen, ein Gebüsch collinearer Bündel, sodass also die Flächen welche successive einer Fläche eines ersten Bündels entsprechen, ein Gebüsch bilden. Die Flächen also, welche den noch übrig bleibenden drei gegebenen Strahlen s_1, s_2, s_3 in allen diesen Bündeln entsprechen, bilden je ein Gebüsch. Unter den dem Strahle s_1 entsprechenden Flächen bilden nun die durch den s_1 zugeordneten Punkt gehenden wieder ein Bündel; und die diesen in dem s_2 zugehörigen Gebüsch entsprechenden Flächen bilden ebenfalls ein Bündel. Unter diesen bilden wieder die durch den s_2 zugeordneten Punkt gehenden ein Büschel, welchem in dem s_3 zugehörigen Gebüsch ein Büschel entspricht. Dieses endlich sendet eine Fläche durch den s_3

zugeordneten Punkt, welche mit den ihr in den zu s_1 und s_2 zugehörigen Gebüschen entsprechenden Flächen das gesuchte Bündel bestimmt.

Man sieht deutlich, dass im Allgemeinen, d. h. wenn die gegebenen Strahlen und Punkte von einander und von den Daten des linearen Flächensystems ganz unabhängig sind, gerade nur diese eine Lösung existiren kann. Denn existirte noch ein zweites die Aufgabe lösendes Bündel, so würde dieses mit dem ersten ein Büschel von Bündeln bestimmen, welche die Aufgabe lösen; es gäbe also dann unendlich viel Lösungen. Da man aber auf dem von uns eingeschlagenen Wege sicher alle Lösungen erhalten muss, so können unendlich viele Lösungen nur dann resultiren, wenn etwa für das Büschel von Bündeln, welche den zwei aus s_1 und s_2 sich ergebenden Bedingungen genügen, die dem Strahle s_3 entsprechenden Flächen von selbst durch den s_3 zugeordneten Punkt gehen, wenn also die vorausgesetzte Unabhängigkeit der gegebenen Strahlen, Punkte und des gegebenen Flächensystems nicht stattfindet.

§ 3.

Auf Grund des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes können wir nun ganz allgemein die Aufgabe lösen, *durch* $\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6} - 1$ *gegebene Punkte eine Fläche* $(n+1)$*ter Ordnung zu legen, welche durch ein Strahlenbündel und ein ihm reciprokes Flächenbündel* n*ter Ordnung erzeugt wird.* Hierbei haben wir aber zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich n von einer der beiden Formen $4h$ und $4h+3$ oder von einer der beiden Formen $4h+1$ und $4h+2$. Behandeln wir zunächst den ersten Fall.

Alsdann nehmen wir natürlich einen Punkt a zum Centrum des Strahlenbündels und von den übrigen Punkten machen wir

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 - \frac{1}{4}n(n+5),$$

welches in diesem Falle eine ganze Zahl ist, zu Basispunkten des Flächenbündels. Alle Flächen $n$ter Ordnung durch diese Punkte, welche wir mit (b) bezeichnen wollen, bilden dann ein lineares Flächensystem von der Stufe $\frac{1}{4}n(n+5)$. Jetzt bleiben noch übrig die Punkte (c), deren Anzahl ist:

$$\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6} - 1 - 1 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + 1 + \frac{1}{4}n(n+5)$$
$$= \frac{3}{4}n(n+5) + 2.$$

Darnach kann in dem linearen Systeme von der Stufe $\frac{1}{4}n(n+5)$ durch die Punkte (b) ein Flächenbündel $n$ter Ordnung gefunden werden,

welches so reciprok auf das Strahlenbündel durch $\mathfrak{a}$ bezogen ist, dass den $\frac{3}{4}n(n+5)+2$ Strahlen durch die Punkte (c) Flächen durch eben diese Punkte entsprechen, womit unsere Aufgabe für diesen Fall gelöst ist.

Ist aber n von einer der Formen $4h+1$ und $4h+2$, so machen wir nur $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 - \frac{n(n+5)+2}{4}$ Punkte zu Basispunkten (b) des Flächenbündels. Alle Flächen $n$ter Ordnung durch diese Punkte bilden also ein lineares System von der Stufe $\frac{n(n+5)+2}{4}$. Jetzt bleiben noch übrig die Punkte (c), deren Anzahl ist:

$$\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6} - 2 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + 1 + \frac{n(n+5)+2}{4}$$
$$= \frac{3}{4}(n(n+5)+2)+1.$$

Demnach giebt es ein Büschel von Bündeln in dem linearen System durch die Punkte (b) von der Stufe $\frac{n(n+5)+2}{4}$, welche alle so reciprok auf das Strahlenbündel durch $\mathfrak{a}$ bezogen sind, dass den $\frac{3}{4}(n(n+5)+2)+1$ Strahlen durch die Punkte (c) Flächen durch ebendiese Punkte entsprechen; irgend eins dieser ∞^1 Bündel löst unsre Aufgabe.

Aber es entsteht hier das Paradoxon, dass die Fläche $(n+1)$ter Ordnung scheinbar durch $\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$ Punkte gelegt werden kann, weil man ja aus diesem Büschel collinearer Bündel noch eins so herausgreifen kann, dass auch dem Strahle von $\mathfrak{a}$ durch einen neuen beliebigen Punkt $\mathfrak{b}$ eine Fläche durch diesen Punkt entspricht, sodass die von diesen Bündeln erzeugte Fläche auch noch durch $\mathfrak{b}$ geht. Dem ist in der That so, aber diese Fläche ist keine eigentliche Fläche, sondern besteht aus allen Punkten des Raumes, oder es entspricht jedem Strahle von $\mathfrak{a}$ eine ihn enthaltende Fläche.

Um ein solches Bündel durch die Punkte (b) zu construiren, denken wir uns irgend eine Ebene α durch $\mathfrak{a}$ und in dieser einen Strahl g. Alle Flächen $n$ter Ordnung durch die Punkte (b) und den Strahl g bilden offenbar ein lineares System von der Stufe

$$\frac{n(n+1)-2}{4} = \frac{(n-1)(n+2)}{4},$$

schneiden also auf der Ebene α ein lineares Curvensystem $(n-1)$ter Ordnung von derselben Stufe aus. Ebenso bilden alle Flächen $n$ter Ordnung durch die Punkte (b) und eine zweite Gerade h in α durch $\mathfrak{a}$ ein lineares System von der Stufe $\frac{(n-1)(n+2)}{4}$, schneiden also auf

der Ebene α ein lineares Curvensystem von derselben Stufe aus. Da nun alle Curven $(n-1)$ter Ordnung in α ein lineares System von der Stufe $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ bilden, so haben diese beiden linearen Systeme von der Stufe $\frac{(n-1)(n+2)}{4}$ gerade eine Curve $c^{(n-1)}$ gemeinsam, durch welche je eine Fläche $n$ter Ordnung geht, welche die Punkte (b) und g resp. h enthält; diese beiden Flächen mögen $G^{(n)}$ und $H^{(n)}$ heissen. Sie bestimmen ein Büschel von Flächen $n$ter Ordnung, dessen Individuen durch $c^{(n-1)}$ und $\mathfrak{a}$ gehen, also α in noch je einer Geraden durch $\mathfrak{a}$ schneiden. Diese Geraden bilden offenbar ein Strahlenbüschel, welches auf das Flächenbüschel so projectiv bezogen ist, dass jedem Strahle eine ihn enthaltende Fläche entspricht. Ausserdem haben also diese Flächen eine Curve $c^{(n^2-n+1)}$ von der Ordnung n^2-n+1 gemein. Man bemerke, dass zu jeder Ebene α nur ein solch Flächenbüschel gehört. Ist nun k ein nicht in α liegender Strahl von $\mathfrak{a}$, so beziehe man das Ebenenbüschel durch k so projectiv auf jenes Flächenbüschel $n$ter Ordnung, dass jeder Ebene die Fläche durch die Gerade entspricht, in welcher sie die Ebene α schneidet. Jetzt erzeugen die beiden Büschel eine Fläche $(n+1)$ter Ordnung, welche aus α und einer $c^{(n^2-n+1)}$ und k enthaltenden Fläche $n$ter Ordnung $K^{(n)}$ besteht. So gehört zu jedem Strahle k von $\mathfrak{a}$ eine Fläche $K^{(n)}$ durch $c^{(n^2-n+1)}$. Beschreibt k eine Ebene β, so beschreibt $K^{(n)}$ offenbar ein dazu projectives Büschel durch $c^{(n^2-n+1)}$ und die Curve $(n-1)$ter Ordnung, in welcher β von der durch (α, β) gehenden Fläche des Bündels $(G^{(n)}, H^{(n)})$ geschnitten wird. Hieraus folgt, dass alle Flächen $K^{(n)}$ ein Bündel bilden, welches reciprok auf das Bündel der Strahlen k bezogen ist. Da hierbei jeder Ebene β ein Büschel so zugeordnet ist, wie der Ebene α das Büschel $(G^{(n)}, H^{(n)})$, und zu jeder Ebene durch $\mathfrak{a}$, wie wir sahen, nur ein solch Büschel gehört, so folgt, dass die Construction dieses Bündels von der Annahme der Ebene α unabhängig ist, dass also nur ein solch Bündel existirt.

Es ist nun klar, dass dies Bündel stets in unserm Büschel von Bündeln enthalten sein muss, weil es ja sicher unsere Aufgabe löst. Soll aber aus diesem Büschel von Bündeln ein solches herausgesucht werden, dass dem Strahl $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$, wo $\mathfrak{b}$ ganz willkürlich, eine Fläche durch $\mathfrak{b}$ entspricht, so giebt es nach § 2 nur ein dieser Forderung genügendes Bündel, und da das Bündel $(G^{(n)}, H^{(n)}, K^{(n)})$ dieser Forderung genügt, ist es das gesuchte, sodass aus unserer Construction keineswegs folgt, man könne durch $\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$ Punkte eine Fläche $(n+1)$ter Ordnung legen, da man doch den ganzen Raum nicht als Fläche betrachten kann. Hierin liegt nun auch die wahre Aufklärung dieses schon von Herrn Schroeter bei Construction der Flächen 2. Grades aus 9 ge-

gebenen Punkten bemerkten Paradoxons. In diesem Falle würde das Bündel durch $\mathfrak{b}$, das mit dem durch $\mathfrak{a}$ eine Fläche 2. Grades durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, die 7 Punkte (c) und einen zehnten Punkt $\mathfrak{d}$ erzeugt, in das Büschel durch $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ degeneriren, und jedem Strahle durch $\mathfrak{a}$ entspricht die durch ihn gehende Ebene von $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$. Bei den Flächen 3. Ordnung besteht das analoge Bündel aus den Flächen durch die Raumcurve 3. Ordnung, welche durch $\mathfrak{a}$ und die 5 Punkte (b) geht, und jedem Strahle durch $\mathfrak{a}$ entspricht die durch ihn gehende Fläche 2. Grades.

§ 4.

Es folgt aus der von uns gegebenen Construction auch leicht, dass sich jede Fläche 3. Ordnung, welche von allen durch einen ihrer Punkte, $\mathfrak{a}$, gehenden Ebenen in Curven 3. Ordnung geschnitten wird, die durch ein Strahlenbüschel und ein ihm projectives Kegelschnittbüschel erzeugt werden können, dass jede solche Fläche 3. Ordnung durch ein Strahlenbündel in $\mathfrak{a}$ und ein ihm reciprokes Flächenbündel 2. Grades erzeugt werden kann, von dessen Basispunkten noch 5 beliebig auf F^3 angenommen werden können. Die erwähnte Erzeugung der ebenen Schnittcurven ist desshalb von Wichtigkeit, weil ich nur für so erzeugte Curven 3. Ordnung als durch die synthetische Geometrie bewiesen annehmen will, dass sie durch neun ihrer Punkte i. A. eindeutig bestimmt seien.

Seien nämlich $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_5$ die 5 beliebigen Basispunkte des zu suchenden Bündels und $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{13}$ die 13 übrigen der 19 zur Bestimmung der F^3 nöthigen Punkte, so nehmen wir dieselben folgendermassen an. Der Punkt $\mathfrak{c}_1$ sei der dritte Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1}$ mit F^3, die Punkte $\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_4, \mathfrak{c}_5, \mathfrak{c}_6$ seien irgend fünf mit $\mathfrak{b}_2$ nicht in demselben Kegelschnitt gelegene Punkte von F^3 in der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, und die Punkte $\mathfrak{c}_7, \mathfrak{c}_8, \mathfrak{c}_9, \mathfrak{c}_{10}, \mathfrak{c}_{11}$ ebenso fünf mit $\mathfrak{b}_3$ nicht in einem Kegelschnitte gelegene Punkte von F^3 in der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3$; endlich seien $\mathfrak{c}_{12}$ und $\mathfrak{c}_{13}$ irgend zwei Punkte von F^3, welche mit $\mathfrak{b}_4$ und $\mathfrak{b}_5$ nicht in derselben Ebene liegen, jedoch so, dass etwa $\mathfrak{c}_{12}$ in der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_5$ liegt. Denken wir uns nun aus diesen Daten eins der zu dem Strahlenbündel durch $\mathfrak{a}$ reciproken Flächenbündel 2. Grades construirt, so hat die dadurch erzeugte Fläche 3. Ordnung G^3 mit F^3 erstens die beiden Curven 3. Ordnung e^3 und g^3 in den Ebenen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3$ gemein, weil die bezüglichen Curven je 9 unabhängige Punkte gemein haben. Nehmen wir weiter die Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_5$, in welcher auch der Punkt $\mathfrak{c}_{12}$ liegt; die bezüglichen Schnittcurven haben jetzt die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{b}_5$, $\mathfrak{c}_{12}$, die vier weiteren Schnittpunkte der Schnittgeraden von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_5$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ resp. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3$ mit den Flächen 3. Ordnung und die Tangente in $\mathfrak{a}$ gemeinsam, sind also auch identisch. Legen

wir jetzt irgend eine Ebene durch $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{c}_{13}}$, so haben die bezüglichen Schnittcurven die 6 Schnittpunkte dieser Ebene mit resp. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_5$ und den beiden Flächen 3. Ordnung gemeinsam, ferner die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}_{13}$ und die Tangente in $\mathfrak{a}$, sind also wiederum identisch. Dreht man also diese letzte Ebene um $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_{13}$, so folgt, dass F^3 und G^3 Punkt für Punkt identisch sind, also F^3 durch jene beiden reciproken Bündel erzeugt wird.

Nun wird jede Fläche 3. Ordnung, welche durch ein Strahlenbündel in $\mathfrak{a}$ und irgend ein ihm reciprokes Flächenbündel 2. Grades erzeugt ist, von Ebenen durch $\mathfrak{a}$ in wie oben erzeugten Curven 3. Ordnung geschnitten. Man kann daher dieselbe Fläche durch dasselbe Strahlenbündel und ein Büschel von ihm reciproken Flächenbündeln erzeugen, von deren Basispunkten noch fünf beliebig auf der Fläche angenommen werden können.

Ein Flächenbündel 2. Grades, von dessen Basispunkten zwei, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, reell sind, kann man aber immer erzeugen durch ein Strahlenbündel in $\mathfrak{b}_1$ und ein Netz ihm reciproker Ebenenbündel in $\mathfrak{b}_2$; den einfachen Beweis hierfür übergehe ich. Durchwandert nun ein Strahl das Bündel in $\mathfrak{a}$, so durchläuft ja die ihm entsprechende Fläche 2. Grades ein ihm reciprokes Bündel, also die einem festen Strahle von $\mathfrak{b}_1$ in allen jenen Ebenenbündeln durch $\mathfrak{b}_2$ entsprechende Ebene ebenfalls ein dazu reciprokes Ebenenbündel, welches also mit dem Strahlenbündel durch $\mathfrak{a}$ eine Fläche 2. Grades erzeugt. Variirt jetzt der feste Strahl durch $\mathfrak{b}_1$, so beschreibt diese Fläche 2. Grades ein ihm reciprokes Bündel und erzeugt mit ihm die ursprüngliche Fläche 3. Ordnung. Denn irgend ein Punkt dieser neuen Fläche ist ein solcher, in dem sich ein Strahl von $\mathfrak{a}$ mit einem Strahle von $\mathfrak{b}_1$ und einer diesem in $\mathfrak{b}_2$ entsprechenden Ebene schneidet, also auch ein Punkt, in welchem der Strahl von $\mathfrak{a}$ von der ihm entsprechenden Fläche des ursprünglichen Bündels geschnitten wird. Hiermit ist also gezeigt, dass auch das Centrum des Strahlenbündels ein beliebiger Punkt der Fläche sein kann.

Beiläufig aber folgt hieraus eine eigenthümliche Erzeugung der Fläche 3. Ordnung durch drei, wie man wohl sagen kann, in trilinearer Beziehung stehende Ebenen- und Strahlenbündel; greift man aus jedem von zwei dieser Bündel einen Strahl heraus, so entspricht diesen beiden Strahlen zusammen eindeutig eine Ebene im dritten Bündel; hält man den einen dieser Strahlen fest, bewegt den andern, so beschreibt die Ebene ein ihm reciprokes Bündel. Diese Erzeugung ist der Grassmann'schen für ebene Curven durchaus analog und lässt sich auf Flächen beliebiger Ordnung ausdehnen.

Wir können also folgenden Satz als synthetisch bewiesen aussprechen:

Die durch ein Strahlenbündel und ein ihm reciprokes Flächenbündel

2. Grades erzeugte Fläche 3. Ordnung lässt sich in derselben Weise noch unendlich oft erzeugen und zwar so, dass das Centrum des Strahlenbündels und fünf von den Basispunkten des Flächenbündels beliebig auf der Fläche angenommen werden können. Sind diese fixirt, so genügen noch einfach unendlich viel Flächenbündel der Forderung mit dem Strahlenbündel die Fläche zu erzeugen, und zwar bilden die Flächen, die hierbei einem festen Strahle successive entsprechen, ein Büschel. Diese Fläche 3. Ordnung ist durch 19 ihrer Punkte i. A. eindeutig bestimmt, d. h. zu einem Strahlenbündel durch irgend einen dieser Punkte lassen sich linear die Daten von zu diesem reciproken Flächenbündeln 2. Grades construiren, welche mit ihm die Fläche erzeugen.

Nur schwer widerstehe ich der Versuchung diese letzte Behauptung, die zwar in § 3 allgemein bewiesen ist, in diesem besonderen Falle ausführlich zu begründen. Indessen würde dem mit solchen Untersuchungen vertrauten Leser eine solche Ausführung nichts Neues bieten, und Anderen würde es schwer sein mir in das Labyrinth dieser sich häufenden linearen Constructionen zu folgen.

Wollte man sechs von den gegebenen Punkten als Basispunkte des Flächenbündels 2. Grades bestimmen, um dann das Centrum des Strahlenbündels zu finden, so lässt sich diese Aufgabe nicht linear lösen, weil damit auch die Curve, auf welcher die Centren aller der Aufgabe genügenden Strahlenbündel liegen, linear construirbar wäre. Das Fehlen der alle der Aufgabe genügenden Bündel verbindenden collinearen Beziehung bewirkt, dass unsere Methoden hier versagen.

Leipzig, im October 1883.

Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen.

Von

Julius König in Budapest.

1. Sei $F(x)$ eine Function, die in der Umgebung des Punktes 0 analytisch ist und diese Eigenschaft auf dem Kreise mit dem Radius $[\alpha_1]$ in dem Punkte α_1 verliert, so dass für jeden andern kritischen Punkt x einen absoluten Betrag hat, der nicht kleiner als $[\alpha_1]$. Sei ferner:

$$[\alpha] < [\alpha_1],$$

und $F(\alpha)$ von 0 verschieden, so stellt

$$f(x) = \frac{F(x)}{\alpha - x} \tag{1}$$

den *einfachsten Typus von Functionen* dar, die in eine Potenzreihe entwickelbar sind, für welche der Radius des Convergenzkreises gleich $[\alpha]$ ist.

Nach den $F(x)$ betreffenden Festsetzungen wird diese Function durch eine Potenzreihe

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots$$

dargestellt, wenn $[x] < [\alpha_1]$, und ebenso $f(x)$ durch die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

wenn $[x] < [\alpha]$. Nach der Definition von $f(x)$ hat man:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\alpha^3} + \cdots\right)$$

und daher

$$a_n = \frac{1}{\alpha^{n+1}}(k_0 + k_1 \alpha + \cdots + k_n \alpha^n), \tag{2}$$

wo der in Parenthese stehende Ausdruck die Summe der ersten $n + 1$ Glieder in der Reihenentwicklung von $F(x)$ für $x = \alpha$ ist. Bezeichnet man dem entsprechend den Rest der Reihe mit $R_n(\alpha)$, so wird

$$a_n = \frac{F(\alpha) - R_n(\alpha)}{\alpha^{n+1}}.$$

und da $F(\alpha)$ nicht 0, der Grenzwerth von $R_n(\alpha)$ hingegen verschwindet:

$$\text{Lim}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n=\infty} = \alpha, \tag{3}$$

d. h. *bei der Functionsclasse $f(x)$ giebt der Grenzwerth des Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder unmittelbar den kritischen Punkt α.*

2. Ist $F(\alpha) = 0$, so hört die Gültigkeit dieser Schlüsse auf. — Jedenfalls kann aber $F(x)$ nach den gemachten Voraussetzungen nur von ganzer Ordnung null werden. Gehört ferner $F(x)$ bezüglich α_1 in die soeben charakterisirte Functionsclasse $f(x)$, so gehört jetzt auch $\frac{F(x)}{\alpha - x}$ dahin, und man hat demnach

$$\text{Lim}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n=\infty} = \alpha_1;$$

doch ist in diesem Falle:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{R_n(\alpha)}{R_{n+1}(\alpha)}\,\alpha,$$

also auch:

$$\text{Lim}\left(\frac{R_n(\alpha)}{R_{n+1}(\alpha)}\right)_{n=\infty} = \frac{\alpha_1}{\alpha}. \tag{4}$$

Gehört $F(x)$ der Functionsclasse $f(x)$ an, ohne dass $F(\alpha)$ verschwindet, so kann man durch blosse Aenderung des Coefficienten k_0 bewirken, dass dies der Fall sei. Durch diese Aenderung von k_0 bleiben die kritischen Punkte und der Rest der Reihe unberührt, so dass der Satz auch dann gültig bleibt, wenn $F(\alpha)$ nicht 0 ist. Demnach gilt die Relation (4) unter der Voraussetzung $[\alpha] < [\alpha_1]$ für jede Function $F(x)$, die den Charakter einer analytischen Function zum ersten Male für $x = \alpha_1$ und für keinen andern Punkt, dessen absoluter Betrag kleiner oder gleich $[\alpha_1]$ ist, verliert.

3. Setzen wir voraus, dass $\varphi(x) = 0$ eine algebraische Gleichung ist*), unter deren Wurzeln es keine solchen giebt, deren absoluter Betrag gleich ist; ist ferner $F(x)$ eine ganze Function, die mit $\varphi(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzt, also am einfachsten 1 oder $\varphi'(x)$, so gehört $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ in die unter 1. behandelte Functionsclasse und aus der recurrirenden Reihe

*) Vergl. meine Abhandlung im IX. Bande der Mathem. Annalen, pag. 530: „Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades."

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

erhält man den Werth der dem absoluten Betrage nach kleinsten Wurzel α von $\varphi(x) = 0$,

$$\operatorname{Lim}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n=\infty} = \alpha.$$

Die Bedingung, dass $\varphi(x) = 0$ keine Wurzeln von gleichem absoluten Betrag besitze, ist keine Beschränkung der Allgemeinheit; denn, wenn $\varphi(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln besitzt, so führt die Substitution $y = x + \delta$ (wo δ eine passend gewählte, genügend kleine Zahl bedeutet) zu einer Gleichung, welche die geforderte Eigenschaft besitzt. Hat die Gleichung conjugirte complexe Wurzeln, so kann δ nicht reell sein; man kann aber für δ beliebig viele rationale complexe Zahlen setzen.

Budapest.

Ueber die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe.

Von

Julius König in Budapest.

Anlässlich der einleitenden Bemerkungen des Herrn P. du Bois-Reymond zu seinem Aufsatze*) „Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung" glaube ich, dass die Mittheilung des folgenden Satzes, der die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Entwicklung einer Function in eine Taylor'sche Reihe angiebt, nicht ohne Interesse sein wird. Es soll noch besonders bemerkt werden, dass der Satz sich gleichmässig auf Functionen reeller und complexer Variabeln bezieht, natürlicherweise aber nur für den ersten Fall wesentlich Neues giebt. Derselbe lautet:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Reihe

$$\sum f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}$$

für ein bestimmtes x und für jedes h, dessen absoluter Betrag kleiner als eine bestimmte (von dem gewählten x abhängige) Grösse ϱ_x ist, die eindeutige Function $f(x+h)$ zur Summe habe, sind:

1) *Es muss für jedes endliche n die Function $f^{(n)}(\xi)$ endlich, stetig und differentiirbar sein in der Umgebung jedes Werthes ξ, für welchen $[\xi - x] < \varrho_x$.*

2) *Die Reihe*

$$\sum f^{(n)}(\xi)\frac{h^n}{n!}$$

muss convergiren, wenn die absoluten Beträge von h und ξ der Bedingung

$$[\xi - x] + [h] < \varrho_x$$

genügen.

3) *Die unter 2) stehende Reihe, als Function von ξ betrachtet, muss gliedweise differentiirbar sein in der Umgebung jedes ξ, das der Bedingung $[\xi - x] + [h] < \varrho_x$ genügt.*

*) Math. Annalen, Bd. XXI, pag. 109.

Der Beweis des einmal ausgesprochenen Satzes ist so einfach, dass es genügt, denselben in Kürze anzudeuten.

Um die Bedingungen als nothwendige zu erkennen, bemerken wir zuerst, dass $f^{(n)}(\xi)$ für jedes endliche n differentiirbar sein muss in der Nähe von $\xi = x$, damit die Reihe überhaupt existire. Setzen wir dann:

$$f(x+h) = \sum f^{(n)}(x)\,\frac{h^n}{n!}, \quad [h] < \varrho_x,$$

so folgt (1) aus der Form der Reihe, die nach Potenzen von h fortschreitet. Ist ferner $[h] + [\delta] < \varrho_x$, so wird

$$f(x+h+\delta) = \sum f^{(n)}(x)\,\frac{(h+\delta)^n}{n!}$$

convergiren und auch nach Potenzen von h geordnet werden können, und man erkennt in den Coefficienten der verschiedenen Potenzen von h die Ableitungen von $f(x+h)$ für $h = \delta$, da die Reihe für $f(x+h)$ als Potenzreihe nach h gliedweise differenzirt werden kann, ferner δ im Darstellungsbereich liegt. Diess giebt die zweite Bedingung.

Da dann ferner

$$f(x+h+\delta) = \sum f^{(n)}(x+\delta)\,\frac{h^n}{n!}$$

ist, so folgt, dass die Reihe nach $\xi = x + \delta$ und h differenzirt, denselben Werth ergiebt, was sich leicht in die Bedingung (3) umsetzen lässt.

Dass die Bedingungen auch hinreichend sind, sieht man daraus, dass unter diesen Voraussetzungen die Reihe

$$\Phi = \sum f^{(n)}(\xi)\,\frac{h^n}{n!}$$

für alle Werthe von ξ und h, welche der Bedingung

$$[\xi - x] + [h] < \varrho_x$$

genügen, eine Function dieser Grössen definirt. Dieselbe besitzt einen bestimmten Differentialquotienten sowohl nach h, als auch — in Folge der dritten Bedingung — nach ξ. Da aber

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial h}$$

ist, so folgt, dass Φ nur von $\xi + h$ abhängt, und also auch für jeden Werth von ξ, der der Bedingung $[\xi - x] < \varrho_x$ genügt, da man dann $h = 0$ setzen kann, $\Phi(\xi) = f(\xi)$ ist; also schliesslich für $\xi = x$

$$f(x+h) = \sum f^{(n)}(x)\,\frac{h^n}{n!}$$

mit der Bedingung $[h] < \varrho_x$.

Man könnte in der Fassung des Satzes die erste und zweite Bedingung ganz weglassen, da jede derselben eine nothwendige Voraussetzung für die Erfüllung der nächstfolgenden ist, doch würde der Satz dadurch an Präcision verlieren, da jede Bedingung erst dann *einen Sinn erhält*, wenn der vorangehenden genügt ist*).

Die gesonderte Aufstellung der drei Bedingungen ist auch durch das Interesse gerechtfertigt, das sich für Functionen reeller Variabeln an ihr gegenseitiges Verhältniss knüpft. Dass die erste Bedingung in diesem Falle nur eine nothwendige, nicht aber eine hinreichende Voraussetzung der zweiten Bedingung ist, zeigt sich an dem von Herrn P. du Bois-Reymond in dem erwähnten Aufsatze behandelten ersten Beispiele. Die Frage, wie sich das Verhältniss der zweiten und dritten Bedingung stellt, muss wohl noch offen bleiben.

Budapest.

---

*) Es sei noch erwähnt, dass der gegebene Satz bei einer elementaren Behandlung der Analysis für die Entwicklung der Theorie der Taylor'schen Reihe benutzt werden kann. Die durch die Bedingung (3) gebotene, anscheinend schwierige Untersuchung gestaltet sich für die elementaren Functionen sehr einfach. So hat man z. B. für die Binomialreihe:

$$\sum \binom{\alpha}{n} (1+x)^{\alpha-n} h^n = (1+x)^\alpha \sum \binom{\alpha}{n} \left(\frac{h}{1+x}\right)^n,$$

wo die Differentiation nach x unmittelbar ausgeführt werden kann, da nach der angeführten Umformung die Reihe x nur in $\frac{h}{1+x}$ enthält, und nach Potenzen dieses Ausdruckes fortschreitet.

Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

Georg Cantor in Halle.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XXI, pag. 545.)

Nr. 6.

§ 15.

In Nr. 5 dieser Abhandlung habe ich an verschiedenen Stellen im Interesse des Zusammenhangs gewisse Sätze der Mengenlehre ausgesprochen, ohne mich auf deren Beweise damals einzulassen, weil im Plane jener Mittheilung andere Gegenstände den Vorzug eingehenderer Behandlung erfahren mussten. Ich will jetzt die sonach gebliebenen Lücken auszufüllen suchen und in dieser Nummer sowohl, wie in der bald nächstfolgenden die fehlenden Beweise geben, wobei ich mich aber nicht darauf beschränken, sondern auch Sätze entwickeln will, die zwar in diesen Zusammenhang gehören, in den früheren Nummern aber theils noch gar nicht erwähnt, theils nicht mit der erforderlichen Genauigkeit formulirt worden sind.

Den Anfang mache ich mit der folgenden einfachen und sehr allgemeinen Betrachtung.

Wenn ein n-dimensionaler Theil H eines nach n Dimensionen ausgedehnten, stetigen, ebenen Raumes G_n eine Punktmenge P enthält, wobei H auch der ganze Raum G_n selbst sein kann, und wir zerlegen den Raumtheil H nach einem bestimmten, im Uebrigen beliebig gelassenen Gesetze in eine endliche oder unendliche Anzahl getrennter, in sich zusammenhängender, n-dimensionaler Theile:

$$H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$$

(deren *Inbegriff*, wenn er unendlich ist, nach Bd. XX, pag. 117 stets von der *ersten Mächtigkeit* ist und folglich in der Form jener einfach unendlichen Reihe (H_ν) gedacht werden kann), wobei die gegenseitigen Begrenzungen der aneinanderstossenden Theile gehörig *vergeben* sind, (so dass ein und derselbe Punkt von H *einem* und *nur einem* der Theile H_ν desselben angehört), so zerfällt die Punktmenge P in eine entsprechende Anzahl von *Theilmengen:*

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots,$$

wobei P_ν derjenige *Theil* von P ist, welcher mit allen seinen Punkten dem Gebiete H_ν angehört; es kann also unter Umständen P_ν gleich *Null* sein, falls kein Punkt von P in den Raumtheil H_ν fällt.

Wir wollen nun mit dem Buchstaben Υ *irgend eine Eigenschaft* oder *Beschaffenheit* bezeichnen, welche von Punktmengen innerhalb G_n ausgesagt werden *kann und die nur an die folgenden Voraussetzungen geknüpft ist:*

1) falls P irgend eine, in einem *ganz im Endlichen* liegenden n-dimensionalen Theil H von G_n befindliche Punktmenge *von der Beschaffenheit* Υ ist und man zerlegt das Gebiet H in der oben besprochenen Weise nach irgend einem Gesetze in eine *endliche* Anzahl m von Theilgebieten:

$$H_1, H_2, \ldots, H_{m-1}, H_m,$$

wodurch P in die Theilmengen:

$$P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$$

zerfällt, so *soll dieselbe Beschaffenheit* Υ auch *wenigstens einer* von den Theilmengen $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$ zukommen;

2) ist P irgend eine Punktmenge innerhalb G_n, *welcher die Beschaffenheit* Υ zukommt und Q eine *beliebige* andere Punktmenge innerhalb G_n, welche mit P *keinen* Punkt *gemeinsam* hat, so soll die Menge $P + Q$ *stets auch* die Beschaffenheit Υ haben.

Als einfachstes Beispiel einer *Beschaffenheit* von Punktmengen, welche den Charakter Υ haben, führe ich diejenige Beschaffenheit einer unendlichen Punktmenge an, wonach sie aus *unendlich viel* Punkten besteht; offenbar genügt diese Beschaffenheit den beiden *soeben formulirten* Voraussetzungen. Es gilt nun folgender Satz:

Theorem I. *Ist H irgend ein ganz im Endlichen liegender n-dimensionaler Theil von G_n und P eine in H enthaltene Punktmenge von der Beschaffenheit Υ, so giebt es wenigstens einen Punkt g von H in solcher Lage, dass, wenn K_n irgend eine n-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunkt g ist, derjenige Bestandtheil von P, welcher in das Gebiet K_n fällt, stets die Beschaffenheit Υ hat, der Radius der Vollkugel K_n mag so klein genommen werden, wie man wolle.*

Zum Beweise dieses Satzes zerlegt man das *ganz im Endlichen liegende* Gebiet H nach irgend einem Gesetze in eine *endliche* Anzahl von n-dimensionalen Theilgebieten, in deren jedem sämmtliche Distanzen von je zwei Punkten kleiner sind als 1; dass solches immer thunlich ist, sieht man leicht ein; von den entsprechenden Theilmengen, in welche hierbei P zerfällt, muss wenigstens eine die Beschaffenheit Υ haben (wegen der Voraussetzung 1), man wähle in gesetzmässiger Weise eine von diesen Theilmengen und bezeichne sie mit $P_{(1)}$, den entsprechenden Theil von H, in welchem $P_{(1)}$ liegt, nennen wir $H_{(1)}$.

Nun zerlege man ebenso das Gebiet $H_{(1)}$ nach irgend einem *Gesetze* in eine *endliche* Anzahl von n-dimensionalen Theilgebieten, in deren jedem sämmtliche Distanzen kleiner sind als $\frac{1}{2}$; von den entsprechenden Theilmengen, in welche hierbei $P_{(1)}$ zerfällt, werde in gesetzmässiger Weise *eine* genommen, die die Beschaffenheit Υ hat, wir nennen sie $P_{(2)}$ und den entsprechenden Theil von $H_{(1)}$, in welchem $P_{(2)}$ liegt, nennen wir $H_{(2)}$; so fahren wir fort und erhalten eine gesetzmässige, *unendliche* Reihe von n-dimensionalen Theilgebieten

$$H_{(1)}, H_{(2)}, \ldots, H_{(\nu-1)}, H_{(\nu)}, \ldots$$

von denen jedes in den vorhergehenden enthalten ist und wo sämmtliche in H_ν vorkommenden Distanzen kleiner sind als $\frac{1}{\nu}$; gleichzeitig haben wir eine gesetzmässige unendliche Reihe von Punktmengen:

$$P_{(1)}, P_{(2)}, \ldots, P_{(\nu-1)}, P_{(\nu)}, \ldots$$

von denen jede ein Bestandtheil der vorhergehenden ist und stets die Beschaffenheit Υ hat; $P_{(\nu)}$ ist derjenige Bestandtheil von P, welcher mit allen Punkten dem Gebiete $H_{(\nu)}$ angehört. —

Nach einem bekannten Satze der arithmetischen Analysis giebt es nun einen *ganz bestimmten* Punkt g von H, der *allen* den Theilgebieten $H_{(\nu)}$ *zugleich* angehört und *hieraus* erkennt man leicht, dass dieser Punkt g eine *Lage* hat, wie sie in unserem Theorem beschrieben worden ist.

Ich bemerke, dass die hier angewandte Beweismethode, welche wohl schwerlich durch eine wesentlich andere ersetzt werden kann, ihrem Kerne nach sehr alt ist; in neuerer Zeit findet man sie unter Anderem in gewissen zahlentheoretischen Untersuchungen bei Lagrange, Legendre und Dirichlet, in Cauchy's *Cours d'analyse* (Note troisième) und in einigen Abhandlungen von Weierstrass und Bolzano; es scheint mir daher nicht richtig, sie vorzugsweise oder ausschliesslich auf Bolzano zurückzuführen, wie solches in neuerer Zeit beliebt worden ist.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, dass unsere Beweismethode von einigen Geometern angegriffen wird. Die hierzu benutzten Argumente sind höchst subtil; sie haben Viele in Verlegenheit gesetzt, eingeschüchtert und verwirrt, denen die Aufrechterhaltung der Beweisführung von grösster Wichtigkeit gewesen wäre. Die vorgekommenen Einwände sind jedoch ihrem Wesen nach nicht neu, sondern haben die grösste Aehnlichkeit mit jenen Paralogismen, die Zeno von Elea gebraucht hat, um die Möglichkeit der Bewegung oder der Vielheit der Dinge in Zweifel zu ziehen (vergl. Aristoteles, Physik VI, 9). Solche Erscheinungen lassen sich in fast jedem Zeitalter nachweisen; im siebenzehnten Jahrhundert beispielsweise lebte in Paris ein gewisser Chevalier

de Méré, welcher durch seine Sophismen, neben anderen Ursachen, dazu beigetragen hat, einem der grössten Geister Frankreichs, Pascal die Beschäftigung mit der Mathematik völlig zu verleiden. Man findet hierüber sehr interessante Details in Bayle's Dictionnaire historique et critique, im Artikel über Zeno von Sidon (Schüler des Apollodorus, nicht zu verwechseln mit jenem Eleaten Zeno). Dieser Epikureische Philosoph ist durch ein Werk berühmt geworden, worin er die Gültigkeit der mathematischen Beweise angriff. Er erscheint daher als Vorläufer einer Richtung, welche sich heutzutage selbst „Metamathematik" nennt. Der Stoiker Posidonius hat gegen ihn ein Werk geschrieben, um seine wider die Mathematik gerichteten Angriffe zu nichte zu machen. Beide Bücher sind verloren gegangen.

Eine sehr umfassende *Classe* von Punktmengen bilden diejenigen, welche die *erste* Mächtigkeit haben und die ich auch in den Nummern 1—4 *abzählbare* Mengen genannt habe. Die letztere Ausdrucksweise *kann* zwar im engeren Sinne auch ferner beibehalten werden, um diese Mengen von denen *höherer* Mächtigkeit zu unterscheiden, ich habe aber in Nr. 5 (Bd. XXI, pag. 550) *gezeigt* und *hervorgehoben* dass man strenggenommen auch von den Mengen *zweiter*, *dritter* oder *höherer* Mächtigkeit *immer* sagen kann, sie seien *abzählbar;* der *Unterschied* ist nur der, dass während die Mengen *erster* Mächtigkeit nur *durch* (*mit Hülfe von*) Zahlen der *zweiten* Zahlenclasse abgezählt werden können, die *Abzählung* bei Mengen *zweiter* Mächtigkeit *nur durch* Zahlen der *dritten* Zahlenclasse, bei Mengen *dritter* Mächtigkeit *nur durch* Zahlen der *vierten* Zahlenclasse u. s. w. erfolgen kann.

Denkt man sich *beispielsweise* den Inbegriff (φ) aller rationalen Zahlen die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ nach dem in Borchardt's J. Bd. 84, p. 250 angegebenen Gesetze in die Form einer einfach unendlichen Reihe:

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots)$$

gebracht, so bildet er in dieser Form eine „*wohlgeordnete Menge*" deren *Anzahl* (nach den Definitionen von Annalen Bd. XXI, p. 548 und p. 576) *gleich* ω ist.

Schreibt man aber denselben Inbegriff etwa in den beiden anderen *Formen wohlgeordneter* Mengen:

$$(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{\nu+1}, \ldots, \varphi_1),$$

$$(\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{2\nu-1}, \ldots, \varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2\nu}, \ldots)$$

so kommen ihm in *Bezug* auf diese Formen resp. die *Anzahlen* $\omega + 1$ und 2ω zu; und wenn α *irgend* eine Zahl der *zweiten* Zahlenclasse ist, so lassen sich unzählig viele *wohlgeordnete* Mengen denken, die ihrem *Bestande* nach völlig übereinstimmen und zusammenfallen mit dem Inbegriffe (φ), aber ihrer *Form* nach die *vorgeschriebene* Zahl α zur *Anzahl* haben.

Durch Umformung einer *wohlgeordneten* Menge wird, wie ich dies in Nr. 5 wegen seiner Wichtigkeit wiederholt hervorgehoben habe, *nicht* ihre *Mächtigkeit* geändert, wohl aber kann dadurch ihre *Anzahl* eine andere werden.

Ganz ebenso lässt sich irgend eine Menge (ψ) der *zweiten Mächtigkeit zunächst* in die Form einer wohlgeordneten Menge:

$$(\psi_\omega, \psi_{\omega+1}, \ldots, \psi_\alpha, \ldots)$$

bringen, worin α sämmtliche Zahlwerthe der *zweiten* Zahlenclasse anzunehmen hat; in *dieser* Form ist ihre *Anzahl* gleich Ω, wo Ω die *erste*, d. h. *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenclasse ist; *dieselbe* Menge (ψ) lässt sich aber auch, wenn A *irgend* eine *vorgegebene* Zahl der *dritten* Zahlenclasse ist, auf unzählig viele Weisen in die Form einer *wohlgeordneten Menge* bringen, welche *durch* die Zahl A *abgezählt* wird, u. s. w. —

Die *Frage*, durch *welche* Umformungen einer wohlgeordneten Menge ihre Anzahl *geändert* wird, durch welche *nicht*, lässt sich einfach so beantworten, dass diejenigen und nur diejenigen Umformungen die Anzahl *ungeändert* lassen, welche sich zurückführen lassen auf eine endliche oder unendliche Menge von Transpositionen, d. h. von *Vertauschungen je zweier Elemente*. —

Ich will nun zwei Sätze über Punktmengen *erster* Mächtigkeit formuliren, welche in der Mengenlehre häufig angewandt werden:

Theorem II. *Ist eine im unendlichen Raume G_n verbreitete Punktmenge P so beschaffen, dass, wenn H irgend ein ganz im Endlichen befindlicher Theil von G_n ist, der zu H gehörige Bestandtheil von P endlich ist oder die erste Mächtigkeit besitzt, so hat auch P selbst die erste Mächtigkeit*, (*es sei denn, dass P endlich ist*).

Der Beweis kann auf verschiedene Weisen dadurch geführt werden, dass man G_n in eine unendliche Anzahl von gesonderten n-dimensionalen Theilen:

$$H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$$

zerlegt, von denen jeder ganz im Endlichen liegt; dadurch zerfällt P in eine unendliche Anzahl von Theilmengen:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots;$$

da jede von diesen entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist, so gilt ein gleiches von ihrer Zusammenfassung, welche nichts anderes als P ist. (M. v. Bd. XX, pag. 117 oben).

Theorem III. *Es sei Q irgend eine Punktmenge innerhalb G_n, $Q^{(1)}$ ihre erste Ableitung und R eine Punktmenge, welche mit Q und ebenso mit $Q^{(1)}$ keinen Punkt gemeinsam und ausserdem eine solche Beschaffenheit hat, dass, wenn H irgend ein Theil von G_n ist, der weder Punkte von Q noch Punkte von $Q^{(1)}$ enthält, alsdann der zum Gebiete H*

gehörige Bestandtheil von R endlich ist oder die erste Mächtigkeit hat, so ist auch R selbst endlich oder von der ersten Mächtigkeit.

Beweis. Sei ϱ irgend eine positive Grösse; um jeden Punkt q von $\mathfrak{M}(Q, Q^{(1)})$ als Mittelpunkt werde eine n-dimensionale Vollkugel $K(q, \varrho)$ gedacht, wobei wir die $(n-1)$-dimensionale Grenze derselben zu ihr mitrechnen. Diese sämmtlichen Vollkugeln $K(q, \varrho)$ können theilweise in einander eindringen, bestimmen jedoch in ihrer *Gesammtheit* einen *gewissen* zusammenhängenden oder nicht zusammenhängenden n-dimensionalen Theil des Raumes G_n; diesen Theil, nach der Ausdrucksweise von Nr. 2 d. Abh., Annalen Bd. XVII, pag. 355 das *kleinste gemeinschaftliche Multiplum* aller $K(q, \varrho)$ bei festem ϱ, in Zeichen: $\mathfrak{M}(K(q, \varrho))$ wollen wir $\Pi(\varrho)$ und die Differenz $G_n - \Pi(\varrho)$ wollen wir $H(\varrho)$ nennen. $H(\varrho)$ enthält alsdann weder Punkte von Q, noch solche von $Q^{(1)}$; ist $\varrho' < \varrho$ so ist immer $H(\varrho)$ ein Bestandtheil von $H(\varrho')$.

Unter Umständen kann $H(\varrho)$ gleich Null sein, man sieht aber in unserm Falle, wo R von Null verschieden ist und weder mit Q noch mit $Q^{(1)}$ Punkte gemein hat, dass, wenn ϱ unter eine gewisse Grenze der Kleinheit sinkt, $H(\varrho)$ ein von Null verschiedener, n-dimensionaler Theil von G_n ist, dem seiner Definition nach seine *Grenze* nicht zugehörig anzusehen ist.

Man erkennt aber auch ferner, dass, wenn r *irgend* ein Punkt von R ist, alsdann durch hinreichende Verkleinerung von ϱ immer bewirkt werden kann, dass dieser Punkt r zum Gebiete $H(\varrho)$ gehört. Denn da R keinen Punkt mit Q und $Q^{(1)}$ gemeinsam hat, so können an r Punkte von Q nicht beliebig nahe herantreten. Bezeichnet man daher mit $\varepsilon(r)$ die *untere* Grenze der Entfernungen zwischen r und den Punkten von Q, *so ist $\varepsilon(r)$ von Null verschieden.*

Nimmt man nun $\varrho < \varepsilon(r)$, so muss nothwendig der Punkt r ausserhalb des Gebietes $\Pi(\varrho)$ liegen und daher zum Gebiete $H(\varrho)$ gehören. Man denke sich nun folgende unendliche Reihe von Raumgebieten:

$$H(1),\ \left(H\left(\tfrac{1}{2}\right) - H(1)\right),\ \left(H\left(\tfrac{1}{3}\right) - H\left(\tfrac{1}{2}\right)\right), \ldots,$$
$$\left(H\left(\tfrac{1}{\nu}\right) - H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)\right), \ldots,$$

so wird nach dem soeben Bewiesenen jeder Punkt r von R einem *ganz bestimmten* von diesen Gebieten angehören. Der Bestandtheil R_ν von R, welcher einem beliebigen Gliede dieser Reihe:

$$\left(H\left(\tfrac{1}{\nu}\right) - H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)\right)$$

angehört, ist, weil das Gebiet:

$$H\left(\tfrac{1}{\nu}\right) - H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)$$

keinen Punkt von Q oder $Q^{(1)}$ enthält, der *Voraussetzung* unseres Theorems gemäss, *endlich* oder von der *ersten Mächtigkeit*. Folglich ist auch R, d. h. die Gesammtheit der Punkte von $R_1, R_2, \ldots, R_\nu, \ldots$ *endlich* oder *von der ersten Mächtigkeit*. w. z. b. w.

§ 16.

Theorem A*). *Eine in einem stetigen, n-dimensionalen Gebiete G_n enthaltene Punktmenge P kann, wenn sie von der ersten Mächtigkeit ist, nie eine perfecte Punktmenge sein.*

Beweis. Unter einer *perfecten* Punktmenge in einem stetigen Gebiete G_n verstehe ich eine Menge S von solcher Beschaffenheit, dass ihre *erste Ableitung* $S^{(1)}$ völlig mit ihr identisch ist, so dass:

$$S^{(1)} = S.$$

In Folge dessen ist auch *jede* höhere Ableitung $S^{(\alpha)}$ von S mit S identisch.

Ist also s *irgend* ein *Punkt* einer *perfecten* Menge S, so ist s gleichzeitig ein *Grenzpunkt* von S und ist s' *irgend* ein *Grenzpunkt* von S, d. h. irgend ein *Punkt* von $S^{(1)}$, so ist s' gleichzeitig auch ein *zu S gehöriger Punkt*. —

Dies vorausgeschickt sei P irgend eine Punktmenge *erster Mächtigkeit* innerhalb des Gebietes G_n, so können wir uns die sämmtlichen Punkte p von P in die Form:

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$$

einer einfach unendlichen Reihe (p_ν) gebracht denken. Um nun zu zeigen, dass P *nicht* eine *perfecte* Menge sein kann, wollen wir voraussetzen, dass *jeder* Punkt p_ν von P ein *Grenzpunkt* von P ist und *alsdann beweisen*, dass immer gewisse andere *Grenzpunkte* p' von P vorkommen müssen, die nicht zugleich *Punkte* von P sind, oder, was dasselbe ist, die mit keinem der Punkte p_ν zusammenfallen. Hiermit wird unser Theorem vollkommen bewiesen sein; denn wäre P eine *perfecte* Menge, so müsste *nicht nur* jeder Punkt p_ν von P ein *Grenzpunkt* von P sein, sondern es müsste auch umgekehrt *jeder Grenzpunkt* p' von P ein zu P gehöriger Punkt p_ν sein.

Man nehme p_1 zum Mittelpunkt eines *sphärischen Gebildes* von $(n-1)$ Dimensionen innerhalb G_n und gebe demselben den Radius $\varrho_1 = 1$; wir wollen dieses sphärische Gebilde mit K_1 bezeichnen. Von allen Punkten der Reihe (p_ν), welche auf p_1 folgen, sei p_{ν_1} der erste (d. h. mit dem kleinsten Index versehene) von allen, die in das *Innere* der Sphäre K_1 fallen; dass solche Punkte in unzähliger Menge in der Reihe (p_ν) vorkommen, ist deshalb nothwendig, weil unserer obigen Voraussetzung nach p_1 ein Grenzpunkt der Menge (p_ν) ist.

*) M. v. Acta math. t. II, pag. 409.

Wir bezeichnen mit σ_1 den *Abstand* der beiden Punkte p_1 und p_{i_1} und nehmen p_{i_1} zum Mittelpunkt einer *zweiten* Sphäre K_2, deren Radius ϱ_2 durch die Bedingung bestimmt ist, *gleich* der *kleinsten* von den beiden Grössen:

$$\frac{1}{2}\sigma_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_1 - \sigma_1)$$

zu sein.

Es liegt alsdann die Sphäre K_2 *ganz* im *Innern* von K_1 und die Punkte: $p_1, p_2, \ldots, p_{i_1-1}$ der Reihe (p_ν) liegen offenbar sämmtlich *ausserhalb* der Sphäre K_2; wir heben ferner hervor, dass der Radius ϱ_2 von K_2 kleiner ist als $\frac{1}{2}$.

Ebenso sei p_{i_2} der erste unter den auf p_{i_1} folgenden Punkten der Reihe (p_ν), welcher in das *Innere* der Sphäre K_2 fällt; solcher Punkte von (p_ν), die in das Innere der Sphäre K_2 fallen, giebt es nämlich unendlich viel, weil der Mittelpunkt p_{i_2} von K_2 ein *Grenzpunkt* der Menge (p_ν) sein soll; den *Abstand* der beiden Punkte p_{i_2} und p_{i_1} nennen wir σ_2 und nehmen p_{i_2} zum *Mittelpunkt* einer *dritten Sphäre* K_3, deren Radius ϱ_3 die *kleinste* von den beiden Grössen:

$$\frac{1}{2}\sigma_2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_2 - \sigma_2)$$

ist. Die Sphäre K_3 fällt alsdann *ganz* in das *Innere* der Sphäre K_2 und die Punkte:

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}$$

der Reihe (p_ν) sind alle *ausserhalb* der Sphäre K_3 gelegen; der Radius ϱ_3 von K_3 ist offenbar kleiner als $\frac{1}{4}$.

Nach dem schon hieraus *sichtbaren Gesetze* wird eine *unendliche* Reihe von Sphären:

$$K_1, K_2, \ldots, K_\nu, \ldots$$

erhalten, die in Beziehung steht zu einer bestimmten unendlichen Reihe von *wachsenden ganzen* Zahlen:

$$1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu < i_{\nu+1} < \cdots$$

Jede Sphäre K_ν fällt *ganz* in das *Innere* der vorangehenden Sphäre $K_{\nu-1}$.

Das *Centrum* p_{i_ν} der Sphäre K_ν ist definirt als der erste in der Reihe (p_ν) *auf* $p_{i_{\nu-1}}$ *folgende Punkt*, der in das Innere der Sphäre $K_{\nu-1}$ zu liegen kommt (wobei wieder zu bemerken ist, dass $p_{i_{\nu-1}}$, der Mittelpunkt von $K_{\nu-1}$, ein *Grenzpunkt* von P ist); der Radius ϱ_ν der Sphäre K_ν ist definirt als die *kleinste* von beiden Grössen:

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}),$$

wobei $\sigma_{\nu-1}$ die *Distanz* der beiden Punkte $p_{i_{\nu-1}}$ und p_{i_ν} ist.

Die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{i_{\nu-1}}$ fallen, wie man leicht sieht, *ausserhalb* der Sphäre K_ν und man hat:

$$\varrho_\nu \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

Es *werden* daher die Radien der Sphären K_ν *mit wachsendem* ν *unendlich klein*; hieraus, und weil immer K_ν *ganz* in das Innere von $K_{\nu-1}$ fällt, folgt nach einem bekannten Hauptsatze der Grössenlehre, dass die Mittelpunkte p_{i_ν} der Sphäre K_ν mit wachsendem ν gegen einen bestimmten Grenzpunkt convergiren, den wir p' nennen wollen, so dass:

$$\lim_{\nu=\infty} (p_{i_\nu}) = p',$$

p' ist offenbar ein *Grenzpunkt* von P, weil die Punkte p_{i_ν} sämmtlich zu P gehören. Andrerseits überzeugt man sich aber, dass p' *nicht als Punkt zu* P *gehören kann;* denn sonst würde für einen gewissen Werth des Index n die Gleichung statthaben:

$$p' = p_n;$$

sie ist aus dem Grunde *unmöglich*, weil p' in das *Innere* der Sphären K_ν fällt, wie gross auch ν sei, dagegen p_n *ausserhalb* der Sphären K_ν liegt, sobald nur $\nu > n$ genommen wird.

Auf solche Weise haben wir gezeigt, dass eine Punktmenge P von der *ersten Mächtigkeit niemals* eine *perfecte* Menge sein kann.

Theorem B. *Ist* α *irgend eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse und* P *innerhalb* G_n *eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass:*

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

so ist $P^{(1)}$ *sowohl wie auch* P *von der ersten Mächtigkeit, es sei denn, dass* P *resp.* $P^{(1)}$ *endliche Mengen sind.*

Beweis. Die *erste* Ableitung einer Punktmenge P ist eine bestimmte neue Menge $P^{(1)}$, nämlich die Menge *aller* Grenzpunkte von P; unter der *zweiten* Ableitung $P^{(2)}$ von P verstanden wir die *erste* Ableitung von $P^{(1)}$ und allgemein unter der ν^{ten} Ableitung $P^{(\nu)}$ die *erste* Ableitung von $P^{(\nu-1)}$.

Die Ableitung $P^{(2)}$ ist, wie leicht zu sehen, stets mit allen ihren Punkten in $P^{(1)}$ enthalten und allgemein ist $P^{(\nu)}$ ein *Bestandtheil* aller Ableitungen $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu-1)}$, welche ihr vorangehen.

Wir sahen aber auch, dass die *für die Erforschung der Natur einer Punktmenge* P *so wichtige Begriffsbildung* von Ableitungen verschiedener Ordnung durch die soeben erwähnten Ableitungen mit *endlicher* Ordnungszahl ν *keineswegs* ihren Abschluss findet, dass es vielmehr im Allgemeinen *nothwendig* ist, aus P *abgeleitete* Mengen mit in die Betrachtung zu ziehen, welche sich *naturgemäss* als Ableitungen der Menge P auffassen lassen, deren *Ordnungen* durch be-

stimmte *transfinite* Zahlen der *zweiten*, *dritten* Zahlenclasse u. s. w. characterisirt werden.

In Wirklichkeit stellt sich zwar, wie aus den später folgenden Theoremen aufs bestimmteste hervorgehen wird, die Sache so, dass bei den Punktmengen innerhalb eines beliebigen Gebietes G_n streng-genommen nur diejenigen *Ableitungen* eine Rolle spielen, deren Ordnungszahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehört. Es zeigt sich nämlich die *höchst merkwürdige Thatsache*, dass für *jede* Punktmenge P *von einer gewissen Ordnungszahl* α an, welche der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse, jedoch *keiner* höheren Zahlenclasse angehört, die Ableitung $P^{(\alpha)}$ entweder 0 oder eine *perfecte* Menge wird; daraus folgt, dass die Ableitungen höherer Ordnung als α mit der Ableitung $P^{(\alpha)}$ sämmtlich identisch sind, ihre Inbetrachtnahme daher *überflüssig* wird.

Nichtsdestoweniger sind wir im Stande formell (d. h. dem Begriffe nach) Ableitungen einer Punktmenge P zu definiren, deren Ordnungszahlen *beliebig hohen* Zahlenclassen angehören, vorausgesetzt, dass diese Zahlenclassen vorher ordnungsmässig definirt sind. — Die Begriffe der Ableitungen mit *transfiniter* Ordnungszahl ergeben sich *successive in derselben Folge wie die transfiniten Zahlen selbst.*

Zunächst erhält man:

$$P^{(\omega)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(\nu)}, \cdots),$$

wo das Zeichen $\mathfrak{D}$ die Bedeutung hat, welche ich ihm in Bd. XVII, pag. 355 gegeben habe.

Sodann erhalten wir $P^{(\omega+1)}$ als die erste Ableitung von $P^{(\omega)}$, $P^{(\omega+2)}$ als die erste Ableitung von $P^{(\omega+1)}$ u. s. w. Ist γ *irgend eine transfinite* Zahl der *zweiten* oder einer *höheren* Zahlenclasse, so gründet sich der Begriff $P^{(\gamma)}$ auf die Begriffe der Ableitungen von *niedrigerer* Ordnung als γ wie folgt: ist γ eine transfinite Zahl der *ersten* Art, d. h. eine solche Zahl, welche einen ihr *nächst kleineren* Nachbar hat, den wir γ_{-1} nennen, so ist $P^{(\gamma)}$ definirt als die *erste Ableitung* von $P^{(\gamma-1)}$; ist hingegen γ eine transfinite Zahl der *zweiten* Art, d. h. eine solche Zahl, welche in der Reihe der ganzen Zahlen *keinen nächst vorangehenden* Nachbar hat (wie beispielsweise die Zahlen ω, ω^ω oder $\omega^{\omega^\omega} + \omega^2$), so geschieht die Definition von $P^{(\gamma)}$ mittelst der Formel:

$$P^{(\gamma)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(\gamma')}, \cdots),$$

worin γ' alle ganzen Zahlenwerthe, die *kleiner* sind als γ, zu erhalten hat.

Jedes $P^{(\gamma)}$ wird daher ein bestimmter *Bestandtheil* von $P^{(\gamma')}$, falls $\gamma' < \gamma$, so dass, unter letzterer Voraussetzung die Differenz:

$$P^{(\gamma')} - P^{(\gamma)}$$

gleichfalls die Bedeutung einer bestimmten in $P^{(1)}$ enthaltenen Punktmenge hat, nämlich derjenigen Menge, welche übrig bleibt, wenn

man von $P^{(\gamma')}$ die sämmtlichen der Menge $P^{(\gamma)}$ angehörigen Punkte entfernt.

Aus diesen Erklärungen ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit folgender Gleichung, die gültig ist für jede Zahl γ, mag diese endlich oder überendlich sein:

$$(1) \qquad P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma')} - P^{(\gamma'+1)}) + P^{(\gamma)},$$

wo γ' einen veränderlichen Index bedeutet, der alle ganzzahligen Werthe von 1 an zu erhalten hat, die kleiner sind als die *gegebene* Zahl γ. —

Dies Alles vorausgeschickt, sei nun α irgend eine ganze Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse und P eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass:

$$P^{(\alpha)} \equiv 0.$$

Es soll gezeigt werden, dass $P^{(1)}$ und daher auch P (vergl. Bd. XXI, pag. 53) von der *ersten* Mächtigkeit sind.

Zu dem Ende wenden wir obige Formel (1) an, indem wir darin $\gamma = \alpha$ voraussetzen und haben:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}),$$

wo α' ein veränderlicher Index ist, der alle ganzen Zahlen von 1 an zu durchlaufen hat, die *kleiner* sind als α.

Das auf der *rechten* Seite eigentlich noch hinzukommende Glied $P^{(\alpha)}$ fällt hier nämlich fort, weil es gleich 0 *vorausgesetzt* ist.

Jedes Glied unserer Summe auf der Rechten:

$$P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}$$

bildet eine *isolirte* Menge (vergl. Bd. XXI, pag. 51) und ist *daher*, wie an der soeben citirten Stelle gezeigt worden ist, falls sie aus unendlich viel Punkten besteht, von der *ersten Mächtigkeit*.

Der *Inbegriff aller* Glieder unserer Summe ist gleichfalls (falls er nicht *endlich* ist) von der *ersten* Mächtigkeit, weil nach der Definition der *zweiten* Zahlenclasse der Inbegriff aller Zahlen α', welche kleiner sind als eine *bestimmte* transfinite Zahl α der zweiten Zahlenclasse die *erste* Mächtigkeit hat. (M. vergl. Bd. XXI, pag. 579.)

Achtet man nun auf den in Bd. XX, pag. 117, oben, angeführten Satz, so folgt aus dem eben gesagten unmittelbar, dass $P^{(1)}$ und daher auch P von der *ersten Mächtigkeit* sind, falls diese Mengen nicht aus einer *endlichen* Anzahl von Punkten bestehen. —

Theorem C. *Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ von der ersten Mächtigkeit ist, so giebt es immer Zahlen γ der ersten oder zweiten*

Zahlenclasse derart, dass $P^{(\gamma)}$ gleich Null wird und von allen solchen Zahlen γ giebt es eine kleinste α.

Beweis. In der Formel (1) von § 16 werde die Zahl $\gamma = \Omega$ gesetzt, wo unter Ω die *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenclasse verstanden wird. (M. vergl. Bd. XXI, pag. 582).

Man hat alsdann:

$$(2) \qquad P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)},$$

worin der Buchstabe γ *alle* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenclasse durchläuft.

In unserem Theorem wird vorausgesetzt, dass $P^{(1)}$ von der *ersten* Mächtigkeit sei; in Folge dessen sind alle höheren Ableitungen $P^{(\gamma)}$, *weil* sie in $P^{(1)}$ *aufgehen*, gleichfalls von der *ersten* Mächtigkeit, wofern sie nicht aus einer *endlichen* Anzahl von Punkten bestehen; es kann daher die Differenz:

$$(P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)})$$

nicht anders gleich Null werden, als indem $P^{(\gamma)}$ und daher auch $P^{(\gamma+1)}$ Null werden; denn im andern Falle wäre $P^{(\gamma)}$, wegen:

$$P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$$

eine *perfecte* Menge, was dem *Satze A* widersprechen würde.

Wären daher sämmtliche Ableitungen $P^{(\gamma)}$, wie hoch wir auch γ innerhalb der *ersten* oder der *zweiten* Classe annehmen, von Null verschieden, so würden auch sämmtliche Glieder:

$$(P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)})$$

der Summe auf der Rechten unserer Gleichung (2) von Null verschieden sein.

Der Inbegriff *aller* dieser Glieder, oder, was dasselbe bedeutet, der Inbegriff aller *ganzen* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenclasse zusammengenommen hat die *zweite* Mächtigkeit. (M. vergl. Bd. XXI, pag. 579 u. f.) Wir würden daher auf der rechten Seite unserer Gleichung (2) eine Punktmenge stehen haben, die sicherlich von *höherer* Mächtigkeit wäre, als die linke Seite unserer Gleichung, welche der Voraussetzung nach von der *ersten* Mächtigkeit ist.

Es führt also die Annahme, dass sämmtliche Ableitungen $P^{(\gamma)}$ (unter γ eine Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse verstanden) von Null verschieden seien, zu einem *offenbaren* Widerspruche mit der Voraussetzung, dass $P^{(1)}$ die erste Mächtigkeit hat.

Daher *muss* es Zahlen γ der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse geben, so dass:

$$P^{(\gamma)} \equiv 0,$$

und von allen solchen Zahlen γ muss es eine kleinste α geben, weil der *allgemeine* Satz besteht, dass in jedem *irgendwie definirten In-*

begriffe von ganzen Zahlen, die der ersten oder zweiten (oder auch einer höheren) Zahlenclasse angehören, ein *Minimum*, d. h. eine Zahl vorhanden sein muss, die *kleiner* ist, als alle übrigen Zahlen desselben Inbegriffes. (M. vergl. Bd. XXI, pag. 581).

Theorem D. *Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, so giebt es immer Punkte, welche allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, wo α irgend eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse ist und der Inbegriff aller dieser Punkte, der nichts anderes ist als $P^{(\Omega)}$, ist stets eine perfecte Punktmenge.*

Beweis. Dass es immer unter der gemachten Voraussetzung über $P^{(1)}$ solche Punkte giebt, die gleichzeitig allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ angehören, erkennt man aus Theorem I in § 15, wenn man ausserdem Theorem B dieses Paragraphen berücksichtigt. In Folge des letzteren hat nämlich P die Beschaffenheit, dass alle ihre Ableitungen $P^{(\alpha)}$, wie hoch wir auch α in der zweiten Zahlenclasse annehmen, *von Null verschieden sind.* Diese Beschaffenheit von P genügt den *beiden* Voraussetzungen einer Beschaffenheit, welche in Theorem I durch den Buchstaben Υ bezeichnet wurde; folglich giebt es nach diesem Satze *wenigstens* einen Punkt, wir wollen ihn s nennen, von solcher Lage, dass wenn wir ihn zum Mittelpunkte einer Vollkugel $K(\varrho)$ mit dem Radius ϱ nehmen, der *Bestandtheil* $P(\varrho)$ von P, welcher in diese Vollkugel fällt, ebenfalls die Beschaffenheit hat, dass alle seine Ableitungen $P^{(\alpha)}(\varrho)$ von Null verschieden sind, wie klein auch ϱ gewählt werden möge; ist daher α irgend eine ganze, zur ersten oder zweiten Zahlenclasse gehörige Zahl, so ist (da $P^{(\alpha)}(\varrho)$ ein Bestandtheil von $P^{(\alpha)}$ und da es somit in jeder Nähe von s Punkte von $P^{(\alpha)}$ giebt) s ein *Grenzpunkt* von $P^{(\alpha)}$, also ein *Punkt* von $P^{(\alpha+1)}$; nun ist aber $P^{(\alpha+1)}$ ein Bestandtheil von $P^{(\alpha)}$, daher also auch s ein Punkt von $P^{(\alpha)}$. Der Punkt s gehört also allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich an.

Fassen wir nun den Inbegriff $S = P^{(\Omega)}$ aller Punkte s in's Auge, welche sämmtlichen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, so überzeugt man sich leicht, dass dieser Inbegriff S eine perfecte Menge bildet. In der That muss jeder Punkt s von S ein Grenzpunkt von S sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man um s als Mittelpunkt eine Vollkugel $K(\varrho, s)$ mit hinreichend kleinem Radius $\varrho \leq \varepsilon$ legen, so dass der Theil $P^{(1)}(\varrho, s)$ von $P^{(1)}$, welcher dieser Vollkugel angehört, eine Ableitung $P^{(\Omega)}(\varrho, s)$ hat, die aus dem einzigen Punkte s besteht; es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\nu, \cdots$ eine Reihe von abnehmenden, beliebig klein werdenden Grössen, welche alle kleiner sind als ε, so dass dem soeben gemeinten ϱ nach einander die Werthe $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\nu, \cdots$ gegeben werden können; man hat alsdann:

$$(3)\quad P^{(1)}(\varepsilon,s)\equiv s+(P^{(1)}(\varepsilon,s)-P^{(1)}(\varepsilon_1,s))+(P^{(1)}(\varepsilon_1,s)-P^{(1)}(\varepsilon_2 s))+\cdots$$
$$+(P^{(1)}(\varepsilon_{\nu-1},s)-P^{(1)}(\varepsilon_\nu,s))+\cdots.$$

Jedes der einzelnen Glieder auf der rechten Seite ist nun endlich oder von der ersten Mächtigkeit; denn die Menge

$$P^{(1)}(\varepsilon_{\nu-1},s)-P^{(1)}(\varepsilon_\nu,s)=Q_\nu$$

ist so beschaffen, dass $Q_\nu^{(\Omega)}$ gleich Null ist, weil sonst in das Innere der Vollkugeln $K(\varrho,s)$ $(\varrho\leqq\varepsilon)$ ausser s noch andere Punkte von S fallen würden; Q_ν kann daher nach dem vorher Bewiesenen keine höhere Mächtigkeit haben als die *erste*.

Es müsste also auch wegen (3) $P^{(1)}(\varepsilon,s)$ von keiner höheren als der ersten Mächtigkeit sein, was aber nach Theorem C unverträglich damit ist, dass $P^{(\Omega)}(\varepsilon,s)$ von Null verschieden, nämlich gleich s ist.

Wir sehen daher, dass jeder Punkt s von S ein *Grenzpunkt* von S ist.

Es ist aber auch jeder Grenzpunkt s' von S ein Punkt von S, weil $P^{(\Omega+1)}$ ein Bestandtheil von $P^{(\Omega)}$ ist.

Somit ist gezeigt, dass $S=P^{(\Omega)}$ eine *perfecte* Menge ist.

Theorem E. *Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, und ist $S=P^{(\Omega)}$ die perfecte Menge, deren Existenz in Theorem D ausgesprochen ist, so ist die Differenz:*

$$R\equiv P^{(1)}-S$$

stets eine Punktmenge von höchstens der ersten Mächtigkeit und wir können daher stets und nur auf eine Weise $P^{(1)}$ in zwei Bestandtheile R und S zerlegen, so dass:

$$P^{(1)}\equiv R+S,$$

wo S eine perfecte Punktmenge und R eine Punktmenge ist, die entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist.

Beweis. Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, brauchen wir nur das Theorem III in § 15 und das soeben bewiesene Theorem D anzuwenden. Es hat hier nämlich R, ihrer Bedeutung nach, *keinen* Punkt mit S gemein und mithin, da $S^{(1)}\equiv S$, auch keinen Punkt mit $S^{(1)}$ gemein.

Wenn wir ferner irgend einen stetigen Theil H von G_n betrachten, der keinen Punkt von S und mithin auch keinen Punkt von $S^{(1)}\equiv S$ enthält, so muss die Theilmenge von R, wir wollen sie $\overline{R}$ nennen, welche dem Gebiete H angehört, endlich oder von der ersten Mächtigkeit sein; denn wäre $\overline{R}$ von einer höheren als der ersten Mächtigkeit, so wäre nach Theorem D die Menge $\overline{R}^{(\Omega)}$ von Null verschieden und es müssten also, da $\overline{R}$ ein Bestandtheil von $P^{(\Omega)}$ und folglich

$\overline{R}^{(\Omega)}$ ein Bestandtheil von $P^{(\Omega)} \equiv S$ ist, in dem Gebiete H Punkte der Menge S liegen, was unserer Voraussetzung nach nicht der Fall ist.

Es treffen also für unsere Menge R alle diejenigen Annahmen zu, welche im Theorem III in § 15 in Bezug auf die dort mit demselben Buchstaben R bezeichnete Menge gemacht worden sind, wobei wir nur an Stelle der dort mit Q bezeichneten Menge unsere Menge S zu setzen haben.

Wir schliessen daher, mit Hülfe von Theorem III, § 15, dass unsere Menge R höchstens von der *ersten* Mächtigkeit ist, was zu beweisen war.

Theorem F. *Ist P innerhalb G_n eine beliebige Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, so giebt es stets eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahl α, so dass:*

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha+1)},$$

und es ist folglich bereits die α^{te} Ableitung von P, d. i. $P^{(\alpha)}$ gleich der perfecten Menge $P^{(\Omega)} \equiv S$.

Beweis. Nach dem Vorhergehenden ist:

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

wo R von der *ersten* Mächtigkeit und S gleich der perfecten Menge $P^{(\Omega)}$ ist.

Nach Formel (2) dieses Paragraphen ist aber auch:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)}.$$

Vergleichen wir diese beiden Ausdrücke von $P^{(1)}$ und berücksichtigen, dass $P^{(\Omega)} \equiv S$, so ergiebt sich für R der Ausdruck:

$$R \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}), \tag{4}$$

wo der Buchstabe γ *alle* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenclasse zu durchlaufen hat.

Da R von der *ersten* Mächtigkeit ist, dagegen die Menge der Glieder auf der rechten Seite von (3) die *zweite Mächtigkeit* hat (c. Ann. Bd. XXI, pag. 579), so schliessen wir, dass es eine *kleinste* der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehörige Zahl α geben muss, so dass:

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha+1)}.$$

Hieraus folgt, dass $P^{(\alpha)}$ eine perfecte und daher mit $P^{(\Omega)} \equiv S$ zusammenfallende Menge ist.

Diese Sätze A, B, C, D, E, F sowohl, wie die hier entwickelten Beweise derselben waren mir zur Zeit der Abfassung von Nr. 5 dieser Abhandlung bekannt; indessen bin ich dort bei der Formulirung des

Satzes E, auf pag. 575, Bd. XXI, etwas zu weit gegangen; so wie der Satz E dort steht, ist er nicht allgemein richtig. Aus dem Umstande nämlich, dass R höchstens von der ersten Mächtigkeit und gleichzeitig ein Bestandtheil von $P^{(1)}$ ist, glaubte ich folgern zu dürfen, dass R die Ableitung eines gewissen Bestandtheiles von P wäre und schloss daraus mit Hülfe des Theorems C ganz richtig, dass es ein α geben müsste, so dass $R^{(\alpha)} = 0$. Es zeigt sich nun aber, dass im Allgemeinen R nicht Ableitung einer andern Menge zu sein braucht.

Diese *wichtige* Bemerkung ist zuerst von Herrn Ivar Bendixson in Stockholm in einem an mich gerichteten Schreiben (v. Mai 1883) gemacht worden. Auf meinen Wunsch hat derselbe seine bei dieser Gelegenheit gefundenen Resultate, welche zum Theil mit den obigen Sätzen D, E, F übereinstimmen, ausgearbeitet und in Acta mathem. Bd. II, pag. 415 publicirt.

Da hiernach $R^{(\gamma)}$ im Allgemeinen für keinen Werth von γ Null zu sein braucht, so ergab sich die Frage, durch *welche Eigenschaft* die abzählbare Menge R sich von anderen Mengen der ersten Mächtigkeit unterscheide; die Beantwortung dieser Frage fand Herr Bendixson in folgendem Theorem:

Theorem G. *Ist R die in Theorem E vorkommende Menge erster Mächtigkeit, so giebt es eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl α, so dass:*

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0.$$

Beweis. Nach Theorem F giebt es ein *kleinstes* α der ersten oder zweiten Zahlenclasse, so dass:

$$P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)} \equiv S.$$

Nun hat R mit S keinen Punkt gemein, folglich ist auch:

$$\mathfrak{D}(R, P^{(\alpha)}) \equiv 0.$$

Da R ein Bestandtheil von $P^{(1)}$, mithin $R^{(\alpha)}$ ein Bestandtheil von $P^{(\alpha)}$ ist, so hat man umsomehr auch:

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0 \quad \text{q. e. d.}$$

An diese Theoreme knüpfen sich erläuternde und zusätzliche Bemerkungen.

Schon in Nr. 2 dieser Abh. (Bd. XVII, pag. 358) habe ich auf den merkwürdigen Umstand hingewiesen, dass, wenn eine Punktmenge P so beschaffen ist, dass $P^{(\omega)} \equiv 0$, es alsdann immer auch eine *endliche* Zahl ν giebt, so dass schon $P^{(\nu)} \equiv 0$. Der hierin enthaltene Satz ist aber nur ein specieller Fall eines allgemeineren, welchen man wie folgt ausdrücken kann:

Ist β irgend eine zur zweiten Zahlenclasse gehörige Zahl der zweiten Art (d. h. eine Zahl, welche in zwei Factoren zerlegt werden kann,

von denen der Multiplicandus $= \omega$ ist) und P eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass $P^{(\beta)} \equiv 0$, so giebt es stets kleinere, zur ersten oder zweiten Zahlenclasse gehörige Zahlen $\beta' < \beta$, so dass auch für sie: $P^{(\beta')} \equiv 0$ ist.

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, nehmen wir an, es sei zwar $P^{(\beta)} \equiv 0$, dagegen $P^{(\beta')}$ für jede Zahl $\beta' < \beta$ von Null verschieden. Nach Theorem I des § 15 würde es einen Punkt g von solcher Lage geben, dass in jede Vollkugel K_ϱ mit dem Mittelpunkte g und dem Radius ϱ eine Theilmenge $P(\varrho)$ von P fiele, für welche ebenfalls alle Ableitungen $P^{(\beta')}(\varrho)$, wenn $\beta' < \beta$, von Null verschieden wären. Indem wir ϱ beliebig klein annehmen können, so folgt hieraus leicht, dass der Punkt g zu jeder der Ableitungen $P^{(\beta')}$, wenn $\beta' < \beta$, als Punkt gehören und mithin auch, wegen der Formel:

$$P^{(\beta)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\beta')}, \ldots)$$

ein Punkt von $P^{(\beta)}$ sein würde, was der Annahme widerspricht, wonach $P^{(\beta)} \equiv 0$ ist. Folglich ist die gleichzeitig von uns gemachte Voraussetzung, dass alle $P^{(\beta')}$ von Null verschieden seien, unstatthaft und es muss daher Zahlen β' geben, die kleiner sind als β und für welche $P^{(\beta')}$ ebenfalls gleich Null ist.

Aus diesem Satze folgern wir, *dass die in Theorem C mit α bezeichnete Zahl stets von der ersten Art ist*, so dass eine ihr nächst kleinere Zahl α_{-1} immer vorhanden ist; denn wäre α von der *zweiten* Art, so könnte nach dem soeben Bewiesenen α nicht die *kleinste* Zahl sein, für welche $P^{(\alpha)} \equiv 0$ wäre. Es giebt also, falls $P^{(1)}$ von der ersten Mächtigkeit ist, stets eine Zahl α_{-1}, so dass zwar $P^{(\alpha_{-1})}$ von Null verschieden, dagegen $P^{(\alpha)}$ oder was dasselbe ist $P^{(\alpha_{-1}+1)}$ gleich Null ist.

§ 17.

Um die Sätze der beiden vorangehenden Paragraphen noch weiter zu vervollständigen, sowie um neue Untersuchungen im Folgenden bequem ausführen zu können, ist es für mich unvermeidlich neue Definitionen sowohl wie Benennungen festzusetzen.

Zunächst will ich bemerken, dass es sich als zweckmässig erweist, das kleinste gemeinsame Multiplum mehrerer Mengen $P_1, P_2, \ldots$ wofür wir bisher das Zeichen $\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ (Ann. Bd. XVII, p. 355) gebraucht haben, als Summe der einzelnen Mengen $P_1, P_2, \ldots$ auch in denjenigen Fällen zu schreiben, wo die Mengen $P_1, P_2, \ldots$ Punkte gemeinsam haben, wobei jeder gemeinsame Punkt nur *einfach* der Menge $\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ zugetheilt wird.

Wir haben also von jetzt ab in allen Fällen:

$$(1) \qquad P_1 + P_2 + \cdots \equiv \mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots).$$

Man überzeugt sich nämlich leicht, dass die gewöhnlichen Commutations- und Associationsregeln für die Summanden auch hier Gültigkeit haben. Nur muss beachtet werden, dass aus einer Gleichung:

$$P \equiv P_1 + P_2 + \cdots$$

die folgende:

$$P - P_1 \equiv P_2 + P_3 + \cdots$$

nur in dem Falle geschlossen werden kann, dass P_1 mit keiner der übrigen $P_2, P_3 \ldots$ gemeinsame Punkte hat.

Wenn ferner die Summe (1) aus einer nur *endlichen* Anzahl von Summanden besteht, sieht man ohne Schwierigkeit, dass immer folgende Regel für die Bildung der Ableitungen besteht:

$$(2) \qquad (P_1 + P_2 + \cdots + P_\nu)^{(\alpha)} = P_1^{(\alpha)} + P_2^{(\alpha)} + \cdots + P_\nu^{(\alpha)},$$

wo α irgend eine endliche oder transfinite ganze Zahl bedeutet.

Diese Regel hört jedoch im Allgemeinen auf gültig zu sein, wenn die Anzahl der Theilmengen $P_1, P_2, \ldots$ unendlich gross ist. —

Wenn eine Punktmenge P so beschaffen ist, dass ihre Ableitung $P^{(1)}$ in ihr als Divisor enthalten ist oder, was dasselbe ist, dass

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) \equiv P^{(1)},$$

so wollen wir P eine *abgeschlossene* Menge nennen. Zu dieser Art von Mengen gehören beispielsweise die Mengen der singulären Punkte analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen. Ferner entsteht aus jeder Menge P eine *abgeschlossene:*

$$\mathfrak{M}(P, P^{(1)}) \equiv P + P^{(1)}.$$

Jede Menge, welche selbst erste Ableitung einer andern Menge ist, gehört auch, wie wir wissen, zu den abgeschlossenen Mengen.

Dieser letztere Satz ist umkehrbar: *jede abgeschlossene Menge lässt sich auf unzählig viele Weisen darstellen als die erste Ableitung einer andern Menge.*

In der That sei P eine abgeschlossene Menge, also $P^{(1)}$ ein Bestandtheil von P; wir setzen:

$$P \equiv Q + P^{(1)}.$$

Es ist dann Q eine *isolirte* Menge und daher von der *ersten* Mächtigkeit; es mögen die zu ihr gehörigen Punkte mit:

$$q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \ldots$$

bezeichnet werden.

Sei ϱ_ν die hier von Null verschiedene untere Grenze der Entfernungen des Punktes q_ν von allen übrigen Punkten der Menge P; um q_ν als Mittelpunkt werde eine n-dimensionale Vollkugel K_ν mit dem Radius $\frac{\varrho_\nu}{2}$ geschlagen.

Die sämmtlichen Vollkugeln K_ν liegen ausser einander und können sich höchstens berühren; in das Innere von K_ν fällt kein anderer Punkt von P, als ihr Mittelpunkt q_ν.

Man setze nun in jede dieser Vollkugeln K_ν eine Punktmenge P_ν deren Ableitung $P_\nu^{(1)}$ aus dem einzigen Punkte q_ν besteht und bilde folgende Menge:

$$M \equiv P^{(1)} + \Sigma P_\nu,$$

so hat M, wie leicht zu erkennen, zur Ableitung die Menge P, d. h. es ist:

$$M^{(1)} \equiv P.$$

Denn man hat:

$$P \equiv Q + P^{(1)}$$

und daher:

$$P^{(1)} \equiv Q^{(1)} + P^{(2)}$$

mithin:

$$P \equiv Q + Q^{(1)} + P^{(2)}$$

andererseits ist:

$$M^{(1)} \equiv P^{(2)} + (\Sigma P_\nu)^{(1)}.$$

Es ist aber, wie man leicht erkennt:

$$(\Sigma P_\nu)^{(1)} \equiv Q + Q^{(1)}$$

woraus der zu beweisende Satz folgt.

Aus unsern Sätzen C, D, E, F in § 16 ergeben sich daher folgende Sätze für *abgeschlossene* Punktmengen:

Theorem C'. *Ist P irgend eine abgeschlossene Punktmenge von der ersten Mächtigkeit, so giebt es immer eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahl α, so dass $P^{(\alpha)}$ gleich Null ist, oder was dasselbe heissen soll, solche Mengen sind immer reductibel.*

Theorem E'. *Ist P eine abgeschlossene Punktmenge von höherer, als der ersten Mächtigkeit, so zerfällt P und zwar nur auf eine Weise in eine perfecte Menge S und eine Menge von der ersten Mächtigkeit R, so dass*

$$P \equiv R + S$$

und es existirt eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahl α, so dass $P^{(\alpha)}$ gleich S wird.

Es ist ferner wichtig den Fall ins Auge zu fassen, dass eine Menge P *Divisor ihrer Ableitung $P^{(1)}$ ist* oder, was dasselbe ist, dass

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) \equiv P;$$

unter solchen Umständen wollen wir P eine *in sich dichte Menge* nennen.

Ist P irgend eine in sich dichte Menge, so ist ihre Ableitung $P^{(1)}$ stets eine perfecte Menge.

Denn einerseits ist ja *immer* $P^{(2)}$ Divisor von $P^{(1)}$; in unserm Falle ist aber auch $P^{(1)}$ Divisor von $P^{(2)}$; denn schreiben wir:

$$P^{(1)} \equiv N + P,$$

so folgt daraus:

$$P^{(2)} \equiv N^{(1)} + P^{(1)};$$

d. h. $P^{(1)}$ ist mit allen seinen Punkten in $P^{(2)}$ enthalten. Folglich sind die beiden Mengen $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ identisch dieselben und es ist daher $P^{(1)}$ eine *perfecte* Menge.

Dann ist auch der Fall hervorzuheben, wo eine Menge P eine solche Beschaffenheit hat, dass *kein* Bestandtheil d. h. *keine* Theilmenge von P *in sich dicht* ist; in diesem Falle nennen wir die Menge P eine *separirte Menge.*

Die *isolirten* Mengen bilden offenbar eine besondere Classe von *separirten* Mengen. Ferner ist hervorzuheben, dass *alle abgeschlossenen Mengen erster Mächtigkeit* separirte Mengen sind, weil sie sonst nicht *reductibel* wären, und dass auch alle diejenigen Mengen erster Mächtigkeit, welche in den Theoremen E, E′ und G (§ 16) vorkommen und dort mit R bezeichnet wurden, *separirte* Mengen sind.

Würde nämlich R einen Bestandtheil M haben, welcher *in sich dicht* ist, so würde $R^{(\alpha)}$ den Bestandtheil $M^{(1)}$ haben, weil $M^{(1)}$ eine perfecte Menge ist, die in *allen* Ableitungen von R erhalten bleibt; da zudem M als in sich dichte Menge ein Bestandtheil von $M^{(1)}$ ist, so würde der Bestandtheil M von R ebenfalls in $R^{(\alpha)}$ enthalten sein, was in Widerspruch zu dem Bendixsonschen Satze G (§ 16) treten würde. Also hat R keinen Bestandtheil, welcher *in sich dicht* ist, und es gehört also R immer zu der Classe der *separirten Mengen.*

Zu den *separirten* Mengen gehört auch *immer*, was auch P sei, die Menge

$$P - \mathfrak{D}(P, P^{(\Omega)}),$$

von welcher man zugleich stets behaupten kann, dass sie von der ersten Mächtigkeit ist, was leicht mittelst des Theorems III in § 15 bewiesen wird. Auf die Frage ob eine *separirte* Menge auch von höherer als der ersten Mächtigkeit sein kann, kommen wir später.

Der Begriff *„in sich dicht“* steht natürlich in einer gewissen Verwandtschaft zu dem schon früher oft von mir gebrauchten *„überalldicht“*, umsomehr müssen wir sie auseinander halten und jeder Verwechslung zwischen ihnen vorbeugen.

Der Ausdruck *„in sich dicht“* bezeichnet *für sich* eine bestimmte Beschaffenheit einer Menge; dagegen hat *„überalldicht“* an und für sich nicht die Bedeutung einer Mengenbeschaffenheit, sondern erlangt solche erst dadurch, dass man ihn in Verbindung mit einem bestimmten *n*-

dimensionalen stetigen Bestandtheil H von G_n braucht, indem man von einer Menge P sagt, sie sei *„überalldicht in H"*.

Macht man sich diesen wesentlichen Unterschied klar, so folgt von selbst, dass eine Menge P sehr wohl *in sich dicht* sein kann, *ohne* dass sie in irgend welchem Theilgebiete H von G_n *überalldicht* wäre, und dass auch umgekehrt eine Menge P *in einem Theilgebiete H überalldicht* sein kann, ohne dass sie *in sich dicht* zu sein braucht, falls nämlich P auch ausserhalb des Gebietes H zugehörige Punkte besitzt. —

Liegt andrerseits P ganz im Gebiete H und ist *darin überalldicht*, so ist unmittelbar klar, dass in einem solchen Falle P auch *in sich dicht* genannt werden muss.

§ 18.

Jeder Punktmenge P innerhalb G_n, sie mag *continuirlich* oder *discontinuirlich* sein, kommt eine bestimmte *nicht negative Zahlgrösse* zu, welche wir ihren *Inhalt* oder ihr *Volumen mit Bezug auf ihre Theilnehmerschaft an dem ebenen n-dimensionalen Raum G_n*, oder, wie wir uns kürzer ausdrücken wollen, *mit Bezug auf G_n* nennen wollen. Diese Zahlgrösse ist in allen Fällen, in welchen man bisher von *Volumen* oder *Inhalt* gesprochen hat (wenn nämlich P ein aus einem oder mehreren n-dimensionalen Stücken bestehender Theil von G_n ist) *gleich* dem n-fachen Integral:

$$\int \partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n,$$

wobei die Integration über alle Elemente des betreffenden Raumtheiles P ausgedehnt wird. Sie hat aber auch in *allen anderen* Fällen ihre *bestimmte Bedeutung* und einen *einzigen Werth*. Wegen ihrer Abhängigkeit sowohl von P, wie auch von dem ebenen Raume G_n, in welchem P enthalten ist, wollen wir diese Zahlgrösse mit:

$$I(P \text{ in } G_n)$$

oder einfach mit:

$$I(P)$$

bezeichnen, letzteres in den Fällen, wo in der laufenden Betrachtung die Heranziehung mehrerer *ebener* Räume G_n, $G'_m, \ldots$, denen P gemeinschaftlich angehören könnte, ausgeschlossen und daher eine Verwechselung nicht möglich ist. Zu dieser Verallgemeinerung des *Inhaltsbegriffes* gelangt man durch die Betrachtung einer gewissen Function einer positiven unbeschränkten Variablen ρ, die wir *die zu der gegebenen Punktmenge P mit Bezug auf G_n gehörige charakteristische Function nennen* und je nach Bedarf mit:

$$F(\varrho, P \text{ in } G_n)$$

oder, falls dies ausreicht, einfacher mit:

$$F(\varrho, P) = F(\varrho)$$

bezeichnen wollen.

Ist nämlich irgend eine *ganz in das Endliche fallende* Punktmenge P innerhalb G_n gegeben, so bilde man um *jeden* der abgeschlossenen Menge

$$\mathfrak{M}(P, P^{(1)}) \equiv P + P^{(1)}$$

zugehörigen Punkt p eine n-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunkt p und dem Radius ϱ; wir wollen sie, als Menge mit allen innern und auf der Begrenzung liegenden Punkten aufgefasst, mit:

$$K(\varrho, p)$$

bezeichnen.

Der Inbegriff *aller* dieser Vollkugeln, welchen man erhält, indem man p *alle* Punkte der Menge $P + P^{(1)}$ durchlaufen lässt, hat nun ein bestimmtes kleinstes gemeinschaftliches Multiplum;

$$\sum_p K(\varrho, p),$$

welcher Punktmenge wir die Bezeichnung:

$$\Pi(\varrho, P \text{ in } G_n)$$

oder die einfachere:

$$\Pi(\varrho, P)$$

oder

$$\Pi(\varrho),$$

je nach Umständen geben wollen.

Diese Punktmenge $\Pi(\varrho)$ ist nun, weil P ganz im *Endlichen* liegend vorausgesetzt ist, wie man leicht sieht, immer ein aus einer *endlichen Anzahl* von Stücken bestehender Theil des Raumes G_n, wo *jedes dieser Stücke ein n-dimensionales Continuum mit dazu gehöriger Begrenzung darstellt.* Es hat also das n-fache Integral

$$\int \partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n,$$

ausgeführt über alle Elemente des Raumtheiles $\Pi(\varrho)$ einen bestimmten Werth, der sich mit ϱ ändert; diesen Werth nennen wir $F(\varrho)$, so dass wir also folgende Definition der *zu einer gegebenen Punktmenge P mit Bezug auf G_n gehörigen charakteristischen Function erhalten:*

$$(1) \qquad F(\varrho, P \text{ in } G_n) = \int_{(\Pi(\varrho, P \text{ in } G_n))} \partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n$$

Bemerken wir nun, dass $F(\varrho)$, wie leicht erkannt wird, eine mit ϱ gleichzeitig abnehmende stetige Function von ϱ ist, deren Derivirte $F'(\varrho)$ sogar auch eine ganz bestimmte Bedeutung hat, indem sie nämlich in gewissem Sinne den Inhalt der Begrenzung von $\Pi(\varrho)$

ausdrückt, so folgt, dass mit beliebigem Abnehmen der Grösse ϱ die Function $F(\varrho)$ sich einem bestimmten, nicht negativen Grenzwerth $\lim_{\varrho=0} F(\varrho)$ beliebig nähert; *diesen Grenzwerth nennen wir den Inhalt oder das Volumen der Menge P mit Bezug auf den ebenen Raum* G_n und haben daher die Definitionsgleichung:

$$I(P \text{ in } G_n) = \lim_{\varrho=0} F(\varrho, P \text{ in } G_n) \tag{2}$$

oder einfacher geschrieben:

$$I(P) = \lim_{\varrho=0} F(\varrho).$$

Sind P und Q zwei Punktmengen von solcher Lagenbeziehung, *dass völlig getrennte n-dimensionale Raumtheile H und H' angegeben werden können, so dass P ganz in H, Q ganz in H' enthalten ist*, so gilt, wie leicht zu zeigen, der Satz, dass:

$$I(P+Q) = I(P) + I(Q).$$

Lässt man aber die gemachte Voraussetzung über P und Q fallen, so gilt dieser Satz im Allgemeinen *nicht*.

Zunächst beweisen wir nun den *Fundamentalsatz, dass der Inhalt einer Menge P stets gleich ist dem Inhalt ihrer Ableitung* $P^{(1)}$ *mit Bezug auf denselben ebenen Raum* G_n, *oder dass immer die Gleichung besteht:*

$$I(P \text{ in } G_n) = I(P^{(1)} \text{ in } G_n) \tag{3}$$

Der Beweis dafür wird wie folgt geführt: sei ε eine beliebige positive Grösse, die wir für's erste als gegeben ansehen, später aber gegen Null abnehmen lassen werden.

Sei ferner H ein ganz im Endlichen gelegener n-dimensionaler Theil von G_n, der nur so gross anzunehmen ist, dass der Raumtheil $\Pi(\varepsilon, P)$ und mithin auch die Mengen P und $P^{(1)}$ ganz in ihn hineinfallen.

Wir wollen nun, während die zu P gehörige charakteristische Function mit $F(\varrho)$ bezeichnet wird, die zu $P^{(1)}$ gehörige charakteristische Function mit $F_1(\varrho)$ bezeichnen, so dass also $F_1(\varrho)$ genau geschrieben gleich ist $F'(\varrho, P^{(1)} \text{ in } G_n)$. Betrachten wir nun den Raumtheil $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, so ist derselbe enthalten in $\Pi(\varepsilon, P)$ und daher auch in H.

Der Raumtheil:

$$\Delta_1 \equiv H - \Pi(\varepsilon, P^{(1)})$$

wird nun sammt seiner Begrenzung höchstens eine *endliche* Anzahl von Punkten der Menge P enthalten, weil in ihm kein *einziger* Punkt der Menge $P^{(1)}$ vorkommt. Wir wollen die Menge dieser in endlicher Anzahl vorkommenden Punkte mit Q_1 bezeichnen.

Unter ϱ wollen wir nun eine positive Grösse verstehen, die kleiner als ε ist und gegen Null convergirt.

Wir haben alsdann erstens:

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) \geqq 0,$$

weil $\Pi(\varrho, P^{(1)})$ stets *innerhalb* $\Pi(\varrho, P)$ gelegen ist.

Andrerseits können wir ϱ immer *so klein* nehmen, dass $\Pi(\varrho, P-Q)$ ganz in den Raumtheil $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$ zu liegen kommt, weil die Punkte der Menge $P - Q$ nirgends der Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$ unendlich nahe kommen (sonst würde diese Begrenzung Punkte von $P^{(1)}$ in sich haben, was ihrer Natur entgegen ist); von einem *hinreichend kleinen* ϱ an ist also immer:

$$F(\varrho, P-Q) < F_1(\varepsilon).$$

Folglich haben wir:

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) < (F_1(\varepsilon) - F_1(\varrho)) + (F(\varrho) - F(\varrho, P-Q))$$

während schon vorher gesehen wurde, dass:

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) \geqq 0.$$

Nun haben aber die beiden Mengen P und $P - Q$, weil sie sich nur um eine *endliche* Anzahl von Punkten unterscheiden, *gleiche* Inhalte, es wird also die Differenz $F(\varrho) - F(\varrho, P - Q)$ mit ins unendliche abnehmendem ϱ selbst unendlich klein; wir schliessen daher aus den beiden soeben geschriebenen Ungleichungen, dass:

$$I(P) - I(P^{(1)})$$

seinem absoluten Betrage nach nicht grösser ist als:

$$F_1(\varepsilon) - I(P^{(1)}).$$

Hier ist ε eine ganz beliebige positive Grösse, die wir daher *jetzt* auch gegen Null convergiren lassen können; unter solchen Verhältnissen nähert sich die letztere Differenz selbst der Null und es muss also $I(P)$ gleich $I(P^{(1)})$ sein, worin der zu beweisende Satz liegt.

Es besteht nun aber auch der allgemeinere Satz:

Ist γ irgend eine endliche oder der zweiten Zahlenclasse angehörige transfinite Zahl, P eine beliebige Punktmenge in G_n, so ist immer

$$I(P \text{ in } G_n) = I(P^{(\gamma)} \text{ in } G_n). \tag{4}$$

Zum Beweise wenden wir ein vollständiges Inductionsverfahren an; wir nehmen an, es sei bei *jeder* Punktmenge P erwiesen, dass für *alle Werthe von γ', die kleiner sind als ein gegebenes* der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehöriges γ, die Gleichung besteht:

$$I(P) = I(P^{(\gamma')})$$

und wollen nun zeigen, dass alsdann auch:

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

In dem Falle, dass γ eine Zahl der *ersten* Art ist, so dass eine ihr *nächst* vorhergehende Zahl γ_{-1} existirt, hat dieses keine Schwierigkeit; denn da unter diesen Umständen

$$(P^{(\gamma-1)})^{(1)} = P^{(\gamma)},$$

so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze:

$$I(P^{(\gamma-1)}) = I(P^{(\gamma)}),$$

und daher auch:

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

Nehmen wir nun *zweitens* an, es sei γ eine *transfinite* Zahl der *zweiten* Art.

Betrachten wir hier den Raumtheil:

$$\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

innerhalb H und bezeichnen die Differenz:

$$H - \Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

mit Δ_γ.

Was die positive Grösse ε anbetrifft, so wollen wir sie nur so gewählt denken, dass auf die Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ *kein einziger* Punkt der *abzählbaren* Punktmenge $(P + P^{(1)}) - P^{(\gamma)}$ fällt; eine solche Wahl von ε und selbst *unter jeder Kleinheitsgrenze* ist stets möglich, wie mit Anwendung meines in Ann. Bd. XV pag. 5 bewiesenen Satzes leicht erkannt wird.

In dem Raumtheil Δ_γ ist ein gewisser, im Allgemeinen aus unendlich viel Punkten zusammengesetzter Bestandtheil von $P + P^{(1)}$ enthalten, den wir Q_γ nennen wollen.

Die Menge Q_γ ist nun offenbar von der Art, dass *ihre* γ^{te} *Ableitung Null* ist; denn sonst würde ausserhalb des Raumtheiles

$$\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

zum mindesten ein Punkt von $P^{(\gamma)}$ liegen, was nicht der Fall ist.

Da γ eine transfinite Zahl der *zweiten* Art ist, so muss es (s. § 16 gegen Schluss) sogar noch eine kleinere Zahl $\bar{\gamma} < \gamma$ geben, so dass auch die $\bar{\gamma}^{te}$ Ableitung von Q_γ gleich Null ist.

Da aber unser zu beweisende Satz als richtig vorausgesetzt wird für alle Punktmengen, also auch für Q_γ, sofern nur $\gamma' < \gamma$, so schliessen wir, dass:

$$I(Q_\gamma) = I(Q_\gamma^{(\bar{\gamma})}) = 0 \tag{5}$$

ist.

Da ferner die beiden Punktmengen Q_γ und $(P + P^{(1)}) - Q_\gamma$ derart ausser einander liegen, dass die eine in dem Raumtheil Δ_γ, die andere in dem davon gänzlich getrennten Raumtheile $\Pi(\varepsilon - \varkappa, P^{(\gamma)})$ (für ein hinreichend kleines $\varkappa$, wie sogleich gezeigt wird) liegt, so haben wir:

$$I(P) = I(P + P^{(1)}) = I\big((P + P^{(1)}) - Q_\gamma\big) + I(Q_\gamma)$$

und wegen $I(Q_\gamma) = 0$:

$$I(P) = I\big((P + P^{(1)}) - Q_\gamma\big). \tag{6}$$

Unter ϱ verstehen wir nun eine beliebige Grösse die kleiner ist als ε und ausserdem *so klein* ist, dass $\Pi(\varrho, (P+P^{(1)}) - Q_\gamma)$ ganz in den Raumtheil $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ zu liegen kommt; letztere Bedingung ist erfüllbar, weil ε so gewählt worden ist, dass auf der Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ *kein einziger* Punkt der Menge $(P+P^{(1)}) - P^{(\gamma)}$ liegt; dies hat zur Folge, dass die Punkte der Menge $P+P^{(1)}$ *nicht beliebig nahe* an diese Begrenzung heranrücken, weil diese sonst einen Punkt von $P^{(\gamma)}$ in sich aufnehmen würde, was offenbar eine Unmöglichkeit ist, da *alle* Punkte von $P^{(\gamma)}$ zum *mindesten* in der Entfernung ε von dieser Begrenzung abstehen.

Folglich haben wir für *hinreichend kleine* Werthe von ϱ:

$$F(\varrho, (P+P^{(1)}) - Q_\gamma) < F(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

mithin auch:

$$F(\varrho, P) - F(\varrho, P^{(\gamma)}) < (F(\varepsilon, P^{(\gamma)}) - F(\varrho, P^{(\gamma)})) + (F(\varrho, P) - F(\varrho, (P+P^{(1)}) - Q_\gamma)).$$

Anderseits ist offenbar:

$$F(\varrho, P) - F(\varrho, P^{(\gamma)}) \geqq 0.$$

Lassen wir nun ϱ unendlich klein werden, so folgt in Rücksicht auf (6), dass die Differenz:

$$I(P) - I(P^{(\gamma)})$$

ihrem absoluten Betrage nach nicht grösser ist als:

$$F(\varepsilon, P^{(\gamma)}) - I(P^{(\gamma)}).$$

Hier ist ε eine beliebige positive Grösse, die nur an gewisse Voraussetzungen geknüpft ist, *welche jedoch ihre Kleinheit nicht beschränken:* lassen wir daher ε unendlich klein werden, so folgt, dass:

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

Wir können daher den Satz (4) als durch *vollständige* Induction bewiesen ansehen; aus ihm ergeben sich nun die Folgerungen:

I. *Wenn P eine reductible Menge ist, so ist ihr Inhalt $I(P)$ immer gleich Null.*

In der That giebt es in diesem Falle, ein kleinstes α, so dass:

$$P^{(\alpha)} \equiv 0;$$

folglich ist $I(P^{(\alpha)})$ und daher auch $I(P)$ gleich Null.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung meines in Ann. Bd. XXI, pag. 54 für *lineare* reductible Mengen bewiesenen Satzes.

II. *Wenn P nicht reductibel ist, so giebt es immer eine perfecte Menge S, die denselben Inhalt hat, wie P, so dass:*

$$I(P \text{ in } G_n) = I(S \text{ in } G_n). \tag{7}$$

Denn nach Theorem E in § 16 giebt es eine perfecte Menge S, so dass für ein kleinstes der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehöriges α:

$$P^{(\alpha)} \equiv S;$$

also haben wir nach (4):

$$I(P) = I(S).$$

Hieraus folgt, *dass die Bestimmung der Inhalte von beliebigen Punktmengen immer zurückgeführt ist auf die Herstellung der Inhalte perfecter Punktmengen.*

In einer späteren Abhandlung werde ich das letztere Problem ausführlich in seiner Allgemeinheit behandeln und beschränke mich daher hier auf folgende Bemerkungen.

Bei einer perfecten Punktmenge kommt es oft vor, dass ihr Inhalt gleich Null ist, doch kann dies nur dann eintreten, wenn die perfecte Punktmenge in *keinem* n-dimensionalen Theilgebiete von G_n *überalldicht* ist.

Ein Beispiel von *linearen* perfecten Punktmengen mit *dem Inhalte Null* wird von mir in Ann. Bd. XXI, pag. 590 angeführt. Aehnliche Beispiele lassen sich innerhalb G_n für $n > 1$ leicht bilden.

Ist dagegen eine perfecte Punktmenge innerhalb eines gewissen n-dimensionalen Raumtheiles H *überalldicht*, so ist ihr Inhalt offenbar von Null verschieden.

Andrerseits giebt es aber auch perfecte Mengen, die in *keinem noch so kleinen n-dimensionalen Raumtheile überalldicht sind und deren Inhalt trotzdem einen von Null verschiedenen Werth hat.*

In den mathematisch-physikalischen Anwendungen der Mengenlehre, über welche ich demnächst die von mir angestellten Untersuchungen veröffentlichen werde, spielt ein noch allgemeinerer Begriff, als der hier mit $I(P)$ bezeichnete, eine wesentliche Rolle.

Ist $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ irgend eine unbedingt integrirbare Function der n Coordinaten eines beliebigen Punktes von G_n und P irgend eine in G_n, ganz im Endlichen gelegene Punktmenge, $\Pi(\varrho, P \text{ in } G_n)$ der im Vorigen definirte Raumtheil, so stellt uns das Integral:

$$\int_{(\Pi(\varrho, P \text{in} G_n))} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, \partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n$$

eine stetige Function von ϱ dar, deren Grenzwerth für Lim $\varrho = 0$ eine von P sowohl wie von der Function $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ abhängige Zahl liefert, die ich mit $I(\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), P \text{ in } G_n)$ oder kürzer mit $I(\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), P)$ bezeichne, so dass unser $I(P)$ nichts andres ist als $I(1, P)$.

§ 19.

Wir wollen nun zu einer genaueren Untersuchung der *perfecten Mengen* übergehen.

Da jede solche Punktmenge gewissermassen *in sich begrenzt, abgeschlossen* und *vollendet* ist, so zeichnen sich die *perfecten Mengen* vor allen anderen Gebilden durch besondere Eigenschaften aus.

Sie dürften aber auch noch aus dem Grunde eine generelle und ausführliche Behandlung verdienen, weil die sämmtlichen *Continua*, wenn wir dieses Wort in dem Sinne nehmen, wie ich ihn in der vorigen Nummer dieser Abhandlung, in Ann. Bd. XXI, pag. 576 gebraucht habe, zu ihnen gehören; denn unter einem *Continuum* im *eigentlichen Sinne* verstehe ich jede *perfecte* Punktmenge, die *in sich zusammenhängend* ist; was ich hierbei mit *„zusammenhängend"* sagen will, ist gleichfalls an der soeben erwähnten Stelle erklärt worden.

Alle *übrigen* Continua, welche ich Ann. Bd. XXI, pag. 590 *Semicontinua* genannt habe, lassen sich gewissermassen durch *Addition* und *Subtraction* aus perfecten Punktmengen und aus solchen Punktmengen, die aus einer endlichen Anzahl von Punkten oder auch aus einer unendlichen Anzahl von der *ersten Mächtigkeit* zusammengesetzt sind, herstellen; aus diesem Grunde scheint mir die Untersuchung der *perfecten Continua* derjenigen der *Semicontinua* vorangehen zu müssen.

Bei aller Verschiedenheit, welche wir in der *reichhaltigen Classe* der *perfecten Punktmengen* kennen lernen werden, indem sowohl in Ansehung ihres *„Inhaltes"* wie auch in Bezug auf ihre *innere* und *äussere Gestaltung* die merkwürdigsten und zum Theil seltsamsten Varietäten sich unter ihnen vorfinden, haben sie doch *alle* ein *Gemeinsames;* sie sind *alle* von *gleicher Mächtigkeit* und folglich, da die *Continua* zu ihnen gehören, sind sie *alle von der Mächtigkeit des Linearcontinuums*, also beispielsweise von der Mächtigkeit des *Inbegriffs aller rationalen und irrationalen Zahlen, die grösser oder gleich Null und kleiner oder gleich Eins sind.*

In Borchardts Journ. Bd. 84, pag. 242 ist bereits gezeigt worden, dass die Mächtigkeit *n-dimensionaler Continua* dieselbe ist, wie die des *eindimensionalen Linearcontinuums.* Wir werden im weiteren Verlaufe dieser Untersuchung diese merkwürdige Thatsache von Neuem zu bestätigen Veranlassung finden.

Zunächst aber will ich meine Betrachtungen wieder auf die linearen Punktmengen beschränken und einen Beweis für den Satz entwickeln, dass alle *linearen perfecten Mengen gleiche Mächtigkeit* haben oder, was dasselbe heisst, dass je zwei solche Mengen in eine Beziehung zu einander gesetzt werden können, welcher gemäss gewissermassen *die eine als eine eindeutige Function der andern* betrachtet werden kann.

Sei zunächst S eine *lineare, perfecte, im Intervall* $(0 \ldots 1)$ *ein-*

geschlossene Punktmenge, welche in keinem noch so kleinen Intervall überalldicht ist und welcher die Punkte 0 *und* 1 *zugehörig sind;* alle anderen *in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichten* Punktmengen lassen sich *projectivisch* auf die soeben charakterisirten zurückführen; wenn also von S gezeigt sein wird, dass ihre Mächtigkeit gleich ist der Mächtigket des Linearcontinuums $(0 \ldots 1)$, so ist damit das gleiche bewiesen für alle linearen perfecten Mengen, *die in keinem Intervalle überalldicht* sind.

Den einfachen Betrachtungen zufolge, welche in Ann. Bd. XXI, pag. 55 und 56 angestellt worden sind, gehört zu unsrer Menge S eine *bestimmte unendliche Menge von in* $(0 \ldots 1)$ *enthaltenen*, völlig von einander getrennten *Theilintervallen*, durch deren Endpunkte, welche zusammengenommen eine *in sich dichte aber in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichte* Punktmenge *erster Mächtigkeit* bilden, die *perfecte Menge S völlig bestimmt ist*, indem sie die *erste Ableitung* von jener, welche wir J nennen wollen, darstellt, so dass:

$$S \equiv J^{(1)}. \tag{1}$$

S besteht sonach aus zwei zu unterscheidenden Bestandtheilen, nämlich aus J und aus einer *andern in sich dichten aber in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichten* Punktmenge, die wir L nennen wollen, so dass:

$$S \equiv J + L. \tag{2}$$

Diese letztere Menge L wird nämlich von allen *Grenzpunkten* der Menge J gebildet, die nicht J selbst zugehörig sind.

Wir wollen uns jene Theilintervalle, deren Endpunkte die Menge J constituiren, ihrer *Grösse* nach geordnet denken, so dass die *kleineren* auf die *grösseren* folgen und wenn gleich grosse unter ihnen vorkommen, die mehr nach links gelegenen früher geschrieben werden, als die mehr nach rechts fallenden; in *dieser* Anordnung mögen sie folgende unendliche Reihe bilden:

$$(a_1 \ldots b_1),\ (a_2 \ldots b_2),\ \ldots,\ (a_\nu \ldots b_\nu) \ldots \tag{3}$$

Den Inbegriff aller Punkte a_ν wollen wir mit $\{a_\nu\}$, den aller Punkte b_ν mit $\{b_\nu\}$ bezeichnen und für einen beliebigen der zur Menge L gehörigen Punkte das Zeichen l wählen, so dass wir haben:

$$J \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\};\ L \equiv \{l\};\ S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{l\}. \tag{4}$$

Ich will noch Folgendes aus dem Begriffe von S leicht sich Ergebende ausdrücklich hervorheben:

Die Endpunkte 0 und 1 gehören dem Bestandtheile L von S an; zwischen irgend zweien Intervallen $(a_\mu \ldots b_\mu)$ und $(a_\nu \ldots b_\nu)$ der Reihe (3) liegen immer unendlich viele andere Intervalle derselben Reihe; in jeder beliebigen Nähe eines einzelnen von den Punkten a_ν oder b_ν oder l liegen Intervalle der Reihe (3) von beliebiger Kleinheit.

Nachdem wir solchermaassen den Begriff unsrer Menge S vollständig analysirt haben, geben wir uns *irgend eine abzählbare* lineare Punktmenge:

(5) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots,$$

die nur folgenden Bedingungen unterworfen ist:

1) *alle Punkte* φ_ν *sind unter einander verschieden;*
2) *sie fallen alle in das Intervall* $(0 \ldots 1)$;
3) *die Endpunkte* 0 *und* 1 *dieses Intervalles gehören nicht zu der Menge* $\{\varphi_\nu\}$ *und*
4) *die Menge* $\{\varphi_\nu\}$ *ist im Intervalle* $(0 \ldots 1)$ *überalldicht.*

Ich behaupte nun Folgendes:

zwischen der Punktmenge $\{\varphi_\nu\}$ *einerseits und der Intervallmenge* $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ *andrerseits lässt sich immer eine solche, gesetzmässige, gegenseitig eindeutige und vollständige Correspondenz ihrer Elemente herstellen, dass, wenn* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *und* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *irgend zwei Intervalle der Intervallmenge,* $\varphi_{\varkappa_\nu}$ *und* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *die zu ihnen gehörigen Punkte der Punktmenge* $\{\varphi_\nu\}$ *sind, alsdann stets* $\varphi_{\varkappa_\nu}$ *links oder rechts von* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *liegt, jenachdem das Intervall* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *links oder rechts von dem Intervalle* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *fällt, oder, was dasselbe heissen soll, dass die Lagenbeziehung der Punkte* $\varphi_{\varkappa_\nu}$ *und* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *stets dieselbe ist, wie die Lagenbeziehung der ihnen entsprechenden Intervalle* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *und* $(a_\mu \ldots b_\mu)$.

Um eine solche Beziehung zwischen den beiden Mengen $\{\varphi_\nu\}$ und $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ herzustellen, *kann* man wie folgt verfahren:

man setze $\varkappa_1 = 1$, d. h. man ordne dem Intervall $(a_1 \ldots b_1)$ den Punkt φ_1 zu; dem Intervalle $(a_2 \ldots b_2)$ ordne man den mit *kleinstem Index* versehenen, also bei Verfolgung der Reihe (5) *zuerst* hervortretenden Punkt $\varphi_{\varkappa_2}$ zu, der zu φ_1 dieselbe Lagenbeziehung hat, wie das Intervall $(a_2 \ldots b_2)$ zum Intervall $(a_1 \ldots b_1)$; dem Intervalle $(a_3 \ldots b_3)$ ordne man den mit kleinstem Index versehenen, d. h. bei Verfolgung der Reihe (5) zuerst hervortretenden Punkt $\varphi_{\varkappa_3}$ zu, der *sowohl* zu φ_1, wie auch zu φ_2 dieselbe Lagenbeziehung hat, wie das Intervall $(a_3 \ldots b_3)$ respective zu den beiden Intervallen $(a_1 \ldots b_1)$ und $(a_2 \ldots b_2)$; nach diesem Gesetze gehen wir weiter, so dass, nachdem den ν *ersten* Intervallen der Reihe (3) die Punkte:

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}$$

zugeordnet sind, welche unter einander dieselbe Lagenbeziehung erhalten, wie sie die entsprechenden Intervalle untereinander haben, alsdann dem nächst folgenden Intervall $(a_{\nu+1} \ldots b_{\nu+1})$ der Reihe (3) der mit dem *kleinsten Index* versehene Punkt $\varphi_{\varkappa_{\nu+1}}$ der Reihe (5) zugeordnet wird, welcher dieselbe Lagenbeziehung zu *allen* Punkten

$\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \ldots, \varphi_{x_\nu}$ besitzt, wie sie das Intervall $(a_{\nu+1} \ldots b_{\nu+1})$ zu den entsprechenden Intervallen $(a_1 \ldots b_1), (a_2 \ldots b_2), \ldots, (a_\nu \ldots b_\nu)$ hat.

Klar ist zunächst, dass auf diese Weise *allen* Intervallen der Reihe (3) *bestimmte* Punkte der Reihe (5) zugeordnet werden; denn wegen des Ueberalldichtseins der Menge $\{\varphi_\nu\}$ im Intervall $(0 \ldots 1)$ und weil die Endpunkte 0 und 1 nicht zu $\{\varphi_\nu\}$ gehören, giebt es in dieser Reihe unendlich viele Punkte, die eine *geforderte* Lagenbeziehung zu einer bestimmten endlichen Anzahl von Punkten derselben Menge $\{\varphi_\nu\}$ besitzen und es erfährt daher der aus unsrer Regel resultirende Zuordnungsprocess *keinen Stillstand.*

Die Punkte φ_{x_ν} constituiren also eine gewisse in (5) enthaltene unendliche Reihe von Punkten:

$$\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \ldots, \varphi_{x_\nu}, \ldots \tag{6}$$

und die Zuordnung der beiden Mengen $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ und $\{\varphi_{x_\nu}\}$ würde den gestellten Anforderungen völlig entsprechen, wenn wir uns nur noch davon überzeugen könnten, dass auch umgekehrt in der Reihe (6) die Reihe (5) *vollständig enthalten* ist, sich also von ihr *nur durch eine andre Anordnung der Glieder unterscheidet;* dass dies nun wirklich der Fall, erhellt aus folgender Ueberlegung.

Denken wir uns es seien nach unsrer Regel die ν ersten Zuordnungen ausgeführt und damit die ν Punkte $\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \ldots \varphi_{x_\nu}$ an die ersten ν Intervalle der Reihe (3) derart vergeben, dass auf beiden Seiten gleiche Lagenbeziehung unter entsprechenden Elementen vorhanden ist. Von den *übrig gebliebenen* Punkten unsrer Reihe (5) wird nun einer die unterste Stelle in dieser Reihe einnehmen oder, was dasselbe heisst, den kleinsten Index haben, wir nennen ihn φ_ϱ; es giebt nun, wie aus der oben angestellten Analysirung des Begriffes S hervorgeht, unendlich viele Intervalle der Reihe (3), welche zu den ν Intervallen $(a_1 \ldots b_1) \ldots (a_\nu \ldots b_\nu)$ *genau dieselbe Lagenbeziehung haben*, wie der Punkt φ_ϱ zu den entsprechenden Punkten

$$\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \ldots, \varphi_{x_\nu};$$

unter diesen unendlich vielen Intervallen sei $(a_\sigma \ldots b_\sigma)$ dasjenige, dessen Index der kleinste von allen ist. Es ist $\sigma > \nu$. Nach unsrer Regel muss nun offenbar bei der σ^{ten} Zuordnung der Punkt φ_ϱ an die Reihe kommen, d. h. es ist:

$$\varrho = x_\sigma \tag{7}$$

Nach der σ^{ten} Zuordnung sind alsdann jedenfalls *zum Mindesten* die ϱ ersten Punkte der Reihe (5):

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$$

alle vergeben.

ϱ ist aber eine von ν abhängige, während ν wächst nicht abnehmende und mit ins Unendliche wachsendem ν selbst eine über alle Grenzen hinaus wachsende Zahl. Folglich müssen nach unsrer Regel *alle Glieder* unsrer Reihe (5) bei der Vergebung *schliesslich an die Reihe kommen* und es ist daher die Reihe (5) vollständig in der Reihe (6) enthalten, diese beiden Reihen sind abgesehen von der Folge ihrer Glieder, identisch dieselben; es ist:

$$\{\varphi_\nu\} = \{\varphi_{\varkappa_\nu}\}. \tag{8}$$

Wir wollen nun der grösseren Einfachheit halber schreiben:

$$\varphi_{\varkappa_\nu} = \psi_\nu. \tag{9}$$

Alsdann können wir das voraufgehende Resultat wie folgt ausdrücken:

Es lässt sich immer eine im Intervall $(0 \ldots 1)$ *gelegene und darin überalldichte Punktmenge erster Mächtigkeit in folgender Reihenform aufstellen:*

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots, \tag{10}$$

zu welcher die Endpunkte 0 *und* 1 *des Intervalls* $(0 \ldots 1)$ *nicht gehören und die zu der in Reihenform* (3) *gegebenen Intervallmenge:*

$$(a_1 \ldots b_1), (a_2 \ldots b_2), \ldots, (a_\nu \ldots b_\nu), \ldots \tag{3}$$

ein solches Verhältniss hat, dass irgend je zwei Punkte von (10) ψ_ν *und* ψ_μ *stets dieselbe Lagenbeziehung zu einander haben, wie die entsprechenden Intervalle* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *und* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *der Reihe* (3)*; und zwar kann jede beliebige im Intervall* $(0 \ldots 1)$ *gelegene, darin überalldichte und die Punkte* 0 *und* 1 *nicht in sich aufnehmende Punktmenge erster Mächtigkeit in eine Reihenform gebracht werden, so dass sie in dieser Reihenform die Beschaffenheit unsrer Reihe* (10) *annimmt.*

Wir wollen nun den Inbegriff aller derjenigen Punkte des Intervalles $(0 \ldots 1)$, welche nicht in der Menge $\{\psi_\nu\}$ vorkommen, mit F und einen beliebigen Repräsentanten dieser letzteren Menge mit f bezeichnen, so dass:

$$F \equiv \{f\}, \quad (0 \ldots 1) = \{\psi_\nu\} + \{f\}. \tag{11}$$

Die Menge F ist, wie ich in Borch. J. Bd. 84, pag. 254 gezeigt, von gleicher Mächtigkeit wie das Linearcontinuum $(0 \ldots 1)$ und daher (s. Ann. Bd. XV, pag. 5) von höherer Mächtigkeit als der ersten.

Unsere perfecte Menge S ist nach (4) aus den drei Mengen $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ und $\{l\}$ zusammengesetzt; es war:

$$S = \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{l\}. \tag{4}$$

Schreiben wir nun die zweite Formel (11) wie folgt:

$$(0 \ldots 1) = \{\psi_{2\nu}\} + \{\psi_{2\nu-1}\} + \{f\} \tag{12}$$

so geht aus dem Vergleich dieser beiden Formeln nach Ann. Bd. XVII, pag. 356 hervor, dass wir zum Beweise unseres Satzes, dass S und $(0 \ldots 1)$ von gleicher Mächtigkeit sind, gelangen werden, wenn es uns möglich ist, zu zeigen, dass die beiden Mengen L und F gleiche Mächtigkeit haben; letzteres ist aber wirklich der Fall, wie wir nun leicht sehen können.

Ist f ein beliebiger Punkt von F, so können wir, da die Menge $\{\psi_\nu\}$ überalldicht ist, eine derselben zugehörige unendliche Reihe von Punkten aufstellen:

$$\psi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_2}, \ldots, \psi_{\lambda_\nu}, \ldots \tag{13}$$

so dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \psi_{\lambda_\nu} = f.$$

Diese Punktreihe bestimmt eine entsprechende Intervallreihe:

$$(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1}).\ (a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2}), \ldots., (a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu}), \ldots \tag{14}$$

die sich nothwendig einem bestimmten Punkte l der Menge L als Grenze nähern.

Dass sie sich einem bestimmten Grenzpunkte nähern müssen, folgt leicht aus der Lagenbeziehung der beiden Reihen (10) und (3) und ebenso, dass dieser Grenzpunkt nicht etwa ein zu J gehöriger Punkt sein kann.

Nimmt man anstatt der Reihe (13) eine andere der Menge $\{\psi_\nu\}$ angehörige Punktfolge, die sich aber demselben Punkt f als Grenzpunkt nähert, so kommt man zwar auch zu einer andern entsprechenden Intervallreihe an Stelle von (14), überzeugt sich aber ebenso leicht, dass diese keinen andern Grenzpunkt haben kann, als den schon gefundenen l.

Geht man umgekehrt von einem beliebigen Punkt l der Menge L aus und wählt irgend eine Intervallreihe (14), die sich ihm als Grenzpunkt unendlich nähert, so kommt man mit Hülfe von (13) zu einem bestimmten zugehörigen Punkt f der Menge F, welcher derselbe bleibt, sobald wir nur von ein und demselben Punkt l der Menge L ausgehen. Die sämmtlichen Punkte l unsrer Menge L sind also in gegenseitig eindeutige und vollständige Beziehung zu sämmtlichen Punkten f der Menge F gebracht, das heisst: die beiden Mengen L und F sind von gleicher Mächtigkeit, woraus, wie oben bemerkt, folgt, dass *die gegebene perfecte lineare Menge S gleiche Mächtigkeit hat mit dem Linearcontinuum* $(0 \ldots 1)$.

Im Vorhergehenden habe ich gezeigt, dass irgend eine perfecte lineare Menge, welche in keinem Intervall überalldicht ist, sich auf ein Linearcontinuum, z. B. auf das vollständige Intervall $(0 \ldots 1)$ vollständig mit

gegenseitiger Eindeutigkeit beziehen lässt, folglich mit ihm von gleicher Mächtigkeit ist. Ich will nun zeigen, wie sich derselbe Satz in Bezug auf eine *ganz beliebige* lineare perfecte Menge beweisen lässt.

Sei also jetzt S irgend eine derartige Punktmenge im Intervall $(-\infty \cdots +\infty)$.

Es werden im Allgemeinen gewisse, nicht aneinander grenzende, *keiner Vergrösserung fähige* Intervalle vorhanden sein, in denen S *überalldicht* ist und die folglich, da S *perfect* ist, mit *allen ihren Punkten* zu S gehören. Sie bilden zusammen eine Intervallmenge von der *ersten* Mächtigkeit, wie Ann. Bd. XX, pag. 118 gezeigt worden ist.

Wir wollen diese Intervalle in irgend einer Ordnung als einfach unendliche Reihe gedacht, wie folgt schreiben:

$$(15) \qquad (c_1 \ldots d_1),\ (c_2 \ldots d_2), \ldots,\ (c_\nu \ldots d_\nu), \ldots$$

Da wir sie so gross annehmen, dass sie bei keiner Vergrösserung die Beziehung zu S behalten würden, wonach S in ihnen überalldicht bleibt, so folgt daraus leicht, dass sie durch diese Bedingung für jedes S völlig bestimmt sind, dass sie nicht an einander grenzen und dass in dem Zwischenraum zwischen je zweien von ihnen die Menge S nicht überalldicht ist.

Ausser diesen Intervallen (15), welche mit ihrem vollen Punktbestand der Menge S angehören, wird im allgemeinen eine andere Intervallmenge existiren, welche, wenn sie aus unendlich vielen Intervallen besteht, ebenfalls die *erste* Mächtigkeit hat und die gleichfalls durch die Menge S bestimmt ist; jedes dieser Intervalle soll einen *perfecten Bestandtheil* von S enthalten, der in keinem Theilintervalle überalldicht ist und dem die Endpunkte des Intervalles zugehörig sind; auch sollen diese Intervalle so gross genommen werden, dass bei weiterer Vergrösserung sie aufhören würden in der angegebenen Beziehung zu S zu stehen. Diese *zweite* Intervallmenge wollen wir mit:

$$(16) \qquad (e_1 \ldots f_1),\ (e_2 \ldots f_2),\ \ldots,\ (e_\nu \ldots f_\nu), \ldots$$

bezeichnen.

Die in diesen Intervallen enthaltenen perfecten Bestandtheile von S wollen wir entsprechend mit:

$$(17) \qquad S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_\nu,\ \ldots$$

bezeichnen.

Aus der Erklärung, welche wir gegeben haben, folgt ohne weiteres, dass die Intervalle von (1) *höchstens* an ihren Endpunkten mit Intervallen der Reihe (2) zusammenstossen, im übrigen aber ganz ausserhalb derselben zu liegen kommen.

Wir haben nun folgende Zerlegung der perfecten Menge S:

$$(18) \qquad S = \Sigma(c_\nu \ldots d_\nu) + \Sigma S_\nu.$$

Zu bemerken ist hierbei, (da e_ν und f_ν immer Punkte von S_ν sind und da es vorkommen kann, dass sich Intervalle in der Reihe (1) mit Intervallen der Reihe (2) berühren) dass Glieder der ersten Summe in unserer Gleichung (4) mit Gliedern der zweiten Summe einzelne Punkte gemein haben können; um die Zerlegung (4) der Menge S von dieser Unbequemlichkeit zu befreien, wollen wir mit $\bar{S}_\nu$ diejenige Menge verstehen, welche aus S_ν dadurch hervorgeht, dass wir davon den Punkt oder die beiden Punkte in Abzug bringen, welche S_ν mit höchstens zwei Intervallen der Reihe (1) (nämlich nach links oder nach rechts hin) gemeinsam haben könnte, so dass $S_\nu \equiv \bar{S}_\nu$ ist in allen Fällen, wo solche Berührungspunkte nicht existiren, dagegen in den übrigen Fällen entweder: $S_\nu \equiv \bar{S}_\nu + e_\nu + f_\nu$, oder $\equiv \bar{S}_\nu + e_\nu$ oder $\equiv \bar{S}_\nu + f_\nu$ ist, jenachdem S_ν zu beiden Seiten an Intervalle der Reihe (1) grenzt, oder nur zu ihrer Linken oder nur zu ihrer Rechten mit einem dieser Intervalle einen Punkt gemein hat.

Wir können nun offenbar auch schreiben:

$$S \equiv \Sigma(c_\nu \ldots d_\nu) + \Sigma\bar{S}_\nu, \tag{19}$$

und hier ist S in Bestandtheile $(c_\nu \ldots d_\nu)$ und $\bar{S}_\nu$ zerlegt, die unter einander keinen Zusammenhang haben.

Jeder Bestandtheil $(c_\nu \ldots d_\nu)$ hat, weil er selbst ein Continuum ist, die Mächtigkeit von $(0 \ldots 1)$; das gleiche gilt aber auch, wie wir im Vorhergehenden bewiesen haben, von jedem Bestandtheil S_ν, folglich auch vom Bestandtheil $\bar{S}_\nu$, da er aus S_ν durch Abtrennung von höchstens zwei Punkten hervorgeht. (Letzteres ist leicht zu beweisen mit Anwendung der Methode, die ich in Borchardts Journal, Bd. 84, pag. 254 gebraucht habe).

So haben wir nun in Formel (19) S zerlegt in eine *endliche* oder *abzählbar unendliche* Anzahl von Theilmengen $(c_\nu \ldots d_\nu)$ und $\bar{S}_\nu$, von welchen *jede* die Mächtigkeit des Linearcontinuums hat.

Nach einem bekannten in Borchardts J., Bd. 84 bewiesenen Satze hat folglich auch die perfecte Menge S die Mächtigkeit von $(0 \ldots 1)$ und es haben daher *alle* linearen *perfecten* Mengen *gleiche* Mächtigkeit.

In einem späteren Paragraphen will ich denselben Satz für perfecte Mengen beweisen, die einem Raum mit n Dimensionen angehören.

Zunächst will ich aber bei den *linearen* Punktmengen stehen bleiben und zeigen, welcher Schluss sich aus dem soeben bewiesenen Satze auf die Mächtigkeiten der *abgeschlossenen* linearen Mengen ziehen lässt.

Falls die *abgeschlossene* lineare Menge P *nicht* von der *ersten* Mächtigkeit, d. h. in dem Falle, dass sie irreductibel ist, zerfällt sie nach dem Theorem E′ in § 17 in eine bestimmte Menge R von der *ersten* Mächtigkeit und in eine bestimmte perfecte Menge S, so dass:

$$P = R + S.$$

Schreiben wir R in der Form $\{r_\nu\}$, so haben wir:

$$P \equiv \{r_\nu\} + S. \tag{20}$$

Sei $\{\eta_\nu\}$ irgend eine im Intervall $(0 \ldots 1)$ enthaltene Punktmenge *erster* Mächtigkeit, $\{u\}$ die Menge der übrigen Punkte dieses Intervalles und $\{\vartheta_\nu\}$ irgend eine in $\{u\}$ enthaltene Punktmenge *erster* Mächtigkeit, $\{v\}$ der Inbegriff aller übrigen Punkte der Menge $\{u\}$; wir haben alsdann:

$$(0 \ldots 1) \equiv \{\eta_\nu\} + \{\vartheta_\nu\} + \{v\}$$
$$\{u\} \equiv \{\vartheta_{2\nu}\} + \{\vartheta_{2\nu-1}\} + \{v\}$$

und weil:

$$\{\eta_\nu\} \sim \{\vartheta_{2\nu}\};\ \{\vartheta_\nu\} \sim \{\vartheta_{2\nu-1}\};\ \{v\} \sim \{v\},$$

so folgt hieraus:

$$(0 \ldots 1) \sim \{u\},$$

mithin ist auch:

$$S \sim \{u\}. \tag{21}$$

Nun ist:

$$(0 \ldots 1) \equiv \{\eta_\nu\} + \{u\}. \tag{22}$$

Aus den Formeln (20), (21) und (22) folgt nun:

$$P \sim (0 \ldots 1), \tag{23}$$

d. h. wenn die abgeschlossene lineare Punktmenge P nicht die *erste* Mächtigkeit hat, so hat sie die Mächtigkeit des Linearcontinuums.

Wir haben also folgenden Satz:

Eine unendliche abgeschlossene lineare Punktmenge hat entweder die erste Mächtigkeit oder sie hat die Mächtigkeit des Linearcontinuums, sie kann also entweder in der Form Funct. (ν) oder in der Form Funct. (x) gedacht werden, wo ν eine unbeschränkt veränderliche endliche ganze Zahl und x eine unbeschränkt veränderliche beliebige Zahl des Intervalls $(0 \ldots 1)$ ist.

Dass dieser merkwürdige Satz eine weitere Gültigkeit auch für *nicht abgeschlossene* lineare Punktmengen und ebenso auch für alle n-dimensionalen Punktmengen hat, wird in späteren Paragraphen bewiesen werden. (Vergl. Borchardts J., Bd. 84, pag. 257).

Hieraus wird mit Hülfe der in Bd. XXI, pag. 582 *bewiesenen* Sätze geschlossen werden, dass das *Linearcontinuum die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II.) hat.*

Halle, 15. Novbr. 1883.

(Fortsetzung folgt).

Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen.

Von

Heinrich Weber in Berlin.

§ 1.

Die Beziehung der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung zu den Thetafunctionen von drei Veränderlichen und die auf Grund dieser Beziehungen gebildete Bezeichnungsweise derselben, wie ich sie in meiner Schrift „über die Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3", Berlin 1876, angewandt habe, führt zu einer übersichtlichen und eleganten Darstellung der Galois'schen Gruppe der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltangenten abhängen, welche die algebraischen Eigenthümlichkeiten dieser Gleichung leicht und einfach erkennen lässt.

Als ursprünglicher Rationalitätsbereich, auf welchen sich die Gruppe bezieht, wird dabei der Inbegriff der rationalen Functionen der *sämmtlichen Coefficienten* der Gleichung einer allgemeinen Curve 4ter Ordnung betrachtet, welche als variabel anzusehen sind, und es ist für diese Gruppe zunächst gleichgültig, ob man die *Constanten* auf das Gebiet der rationalen Zahlen beschränkt, oder ob man gewisse irrationale Zahlen, z. B. Einheitswurzeln, adjungirt, oder endlich, ob man das Gebiet aller Zahlen überhaupt mit zum Rationalitätsbereich rechnet.

1. Um eine feste Grundlage zu gewinnen, möge

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer allgemeinen Curve 4ter Ordnung in Cartesischen Coordinaten sein, in welcher ein Coefficient durch Division $= 1$ gemacht ist; und mit a_i mögen die 14 Coefficienten der Function F bezeichnet sein.

Damit die gerade Linie

$$y = \Theta(x - \xi) \tag{2}$$

eine Doppeltangente sei, muss die ganze rationale Function vierten Grades von x

$$F(x, \Theta(x-\xi))$$

ein Quadrat sein, woraus sich zwei Bedingungen für die beiden Unbekannten Θ, ξ ergeben. Die Elimination von Θ aus diesen beiden Gleichungen führt zu einer Gleichung 28^{ten} Grades für ξ, welche wir in der Folge kurz die *Doppeltangentengleichung* nennen wollen.

Da zu einer Wurzel ξ dieser Gleichung im Allgemeinen (so lange sich nicht zwei Doppeltangenten auf der x-Axe schneiden) nur *ein* Werth von Θ gehört, so lässt sich Θ *rational* durch ξ und die Coefficienten a_ι ausdrücken:

$$\Theta = \varphi(\xi, a_\iota) \tag{3}$$

und diese Relation hat dieselbe Form für je zwei zusammengehörige Werthe ξ, Θ.

Es lassen sich, wie ich in § 4 der citirten Arbeit nachgewiesen habe, aus den 28 ungeraden Charakteristiken auf 288 verschiedene Arten sieben solche auswählen, welche ein *vollständiges System ungerader Charakteristiken* bilden, und zwar gehören von diesen 36 mal je 8 zu derselben geraden Charakteristik. Zwei und nicht mehr Charakteristiken eines vollständigen Systems können beliebig gewählt werden.

Daraus ergiebt sich (l. c. § 15) indem man die Doppeltangenten den ungeraden Charakteristiken zuordnet, dass man aus den Wurzeln der Doppeltangentengleichung auf 288 Arten 7 solche auswählen kann, durch welche sich die übrigen rational ausdrücken lassen, und dass unter diesen sieben zwei beliebig gegebene Doppeltangenten sein können. Hat man ein solches *vollständiges Siebenersystem* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ ausgewählt, so erhält man die übrigen 21 Wurzeln durch eine einzige Formel, indem man je zweien Wurzeln dieses Siebenersystems eine ausgezeichnete Stellung giebt.

Man kann nämlich, indem man unter f eine rationale Function versteht, die noch von den Coefficienten a_ι abhängig ist, setzen:

$$\xi_{1,2} = f(\xi_1, \xi_2 \mid \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7). \tag{4}$$

Die Vertauschung von ξ_1 mit ξ_2, ebenso die Vertauschung von $\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7$ unter einander ändert in diesem Ausdruck nichts. Vertauscht man aber ξ_1, ξ_2 mit ξ_λ, ξ_k so erhält man aus (4) die sämmtlichen Wurzeln $\xi_{\lambda,k}$.

Ersetzt man in der Formel (4) das vollständige Siebenersystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ durch ein anderes, so werden auch die Wurzeln $\xi_{\lambda,k}$ in bestimmter Weise durch andere ersetzt. Um diese Veränderungen zu bestimmen, ist es erforderlich auf die Bildungsweise der vollständigen Siebenersysteme etwas näher einzugehen. Unter diesen sind zunächst sieben, welche zu derselben geraden Charakteristik gehören wie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$,

von denen es genügt, eines anzugeben, da die andern nach der Analogie daraus sofort abzuleiten sind:

$$\xi_1, \xi_{1,2}, \xi_{1,3}, \xi_{1,4}, \xi_{1,5}, \xi_{1,6}, \xi_{1,7}.$$

Ersetzt man in (4) das System $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ durch dieses System, so geht

$$\xi_{1,2} \text{ in } \xi_2, \quad \xi_{1,3} \text{ in } \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_{1,7} \text{ in } \xi_7$$

über, während die $\xi_{2,3} \ldots$ ungeändert bleiben.

Man kann nun aber auch das Siebenersystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ ersetzen durch 8 Siebenersysteme, welche zu einer beliebigen der 36 geraden Charakteristiken gehören. Die noch fehlenden 35 . 8 Siebenersysteme lassen sich so darstellen, dass man sie den 35 Dreiersystemen (1, 2, 3) zu je achten zuordnet. Man erhält so zu (1, 2, 3) gehörig die acht Systeme:

$$\begin{array}{l}
\xi_2, \xi_3, \xi_{2,3}, \xi_{1,4}, \xi_{1,5}, \xi_{1,6}, \xi_{1,7}, \\
\xi_3, \xi_1, \xi_{3,1}, \xi_{2,4}, \xi_{2,5}, \xi_{2,6}, \xi_{2,7}, \\
\xi_1, \xi_2, \xi_{1,2}, \xi_{3,4}, \xi_{3,5}, \xi_{3,6}, \xi_{3,7}, \\
\xi_{2,3}, \xi_{3,1}, \xi_{1,2}, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \\
\xi_{1,4}, \xi_{2,4}, \xi_{3,4}, \xi_4, \xi_{6,7}, \xi_{7,5}, \xi_{5,6}, \\
\xi_{1,5}, \xi_{2,5}, \xi_{3,5}, \xi_{6,7}, \xi_5, \xi_{7,4}, \xi_{1,6}, \\
\xi_{1,6}, \xi_{2,6}, \xi_{3,6}, \xi_{5,7}, \xi_{7,4}, \xi_6, \xi_{4,5}, \\
\xi_{1,7}, \xi_{2,7}, \xi_{3,7}, \xi_{5,6}, \xi_{6,4}, \xi_{4,5}, \xi_7.
\end{array}$$

Legt man in den Formeln (4) eines dieser 8 Siebenersysteme zu Grunde, so geht jede Wurzel $\xi_{i,k}$ in eine bestimmte andere über, die man nach folgender Regel findet.

$\xi_{i,k}$ geht in diejenige Wurzel über, deren Index man erhält, wenn man die den i, k entsprechenden Indices neben einander stellt, 1, 2, 3 hinzufügt, dann doppelt vorkommende Ziffern im Index unterdrückt und eventuell, wenn die Anzahl der Ziffern im Index 5 oder 6 ist, diese Ziffern durch die fehlenden ersetzt. Es würde also beispielsweise, wenn

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4, \quad \xi_5, \quad \xi_6, \quad \xi_7$$

durch

$$\xi_{1,4}, \quad \xi_{2,4}, \quad \xi_{3,4}, \quad \xi_4, \quad \xi_{6,7}, \quad \xi_{7,5}, \quad \xi_{5,6}$$

ersetzt wird,

$$\begin{array}{l}
\xi_{1,2} \text{ in } \xi_{1,4,\,2,4,\,1,2,3} = \xi_3, \\
\xi_{4,5} \text{ in } \xi_{4,6,\,7,\,1,2,3} = \xi_5, \\
\xi_{5,6} \text{ in } \xi_{6,7,\,7,5,\,1,2,3} = \xi_{4,7}
\end{array}$$

übergehen.

2. Da durch 7 Doppeltangenten eines vollständigen Systems eine Curve 4ter Ordnung eindeutig (rational) bestimmt ist, so lassen sich die Coefficienten a_i rational ausdrücken durch

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7, \quad \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_7$$

in der Form

$$a_\iota = \Psi_\iota(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7, \quad \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_7) \tag{5}$$

und hierin können die

$$\xi_1, \ldots, \xi_7, \quad \Theta_1, \ldots, \Theta_7$$

an Stelle der a_ι als unabhängige Veränderliche angesehen werden, da *ein* vollständiges System von 7 Doppeltangenten willkürlich angenommen werden kann.

Diese Gleichungen bleiben richtig, wenn die $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ und die ihnen entsprechenden $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_7$ irgend wie unter einander vertauscht werden. Es ist aber auch gestattet, in denselben das vollständige Siebenersystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ durch ein beliebiges anderes zu ersetzen, wenn die zugehörigen Θ immer durch die Formel (3) bestimmt werden; denn die Curve 4^{ter} Ordnung ist durch jedes vollständige System von 7 Doppeltangenten in gleicher Weise eindeutig bestimmt.

3. Die Doppeltangenten lassen sich auf 63 Arten in Steiner'sche Gruppen von je 6 Paaren ordnen in der Weise, dass die 8 Berührungspunkte je zweier Paare einer Gruppe auf einem Kegelschnitt liegen. Durch *ein Paar* ist die ganze Steiner'sche Gruppe bestimmt; dies eine Paar kann aber beliebig ausgewählt werden. Sind

$$x_1 \equiv y - \Theta_1(x - \xi_1) = 0,$$
$$x_2 \equiv y - \Theta_2(x - \xi_2) = 0,$$

die Gleichungen zweier Doppeltangenten, so lässt sich zunächst in rationaler Weise (durch ξ_1, Θ_1; ξ_2, Θ_2; also nach (3) auch durch ξ_1, ξ_2) die Gleichung eines Kegelschnittes, $\Phi = 0$, bestimmen, welche durch die vier Berührungspunkte dieser beiden Doppeltangenten geht; hierauf kann man einen Factor h und die Coefficienten der Gleichung eines zweiten Kegelschnittes, $\Psi = 0$, gleichfalls rational, so bestimmen, dass die Identität besteht:

$$hF - \Phi^2 = x_1 x_2 \Psi.$$

Hieraus folgt für ein beliebiges λ

$$hF - (\Phi + \lambda x_1 x_2)^2 = x_1 x_2 (\Psi - 2\lambda\Phi - \lambda^2 x_1 x_2).$$

Man erhält nun die fünf übrigen Paare der zu x_1, x_2 gehörigen Steiner'schen Gruppe, wenn man λ so bestimmt, dass

$$\Psi - 2\lambda\Phi - \lambda^2 x_1 x_2$$

in zwei lineare Factoren zerfällt, was für λ eine Gleichung fünften Grades giebt. Das Product, genommen über die 5 Wurzeln dieser Gleichung

$$\prod^{\lambda} (\Psi - 2\lambda\Phi - \lambda^2 x_1 x_2) = \Xi(x, y)$$

lässt sich rational durch ξ_1, ξ_2 ausdrücken, und ist, gleich Null gesetzt, die Gleichung der 10 noch fehlenden Doppeltangenten dieser Gruppe.

Setzt man darin $y = 0$, so erhält man eine Gleichung 10^{ten} Grades

$$X(\xi; \xi_1, \xi_2) = 0, \tag{6}$$

deren Wurzeln ξ 10 weitere Wurzeln der Doppeltangentengleichung sind, welche die Eigenschaft haben, dass die drei Wurzeln ξ, ξ_1, ξ_2 niemals zu einem vollständigen System gehören*); und es gilt auch das Umgekehrte: wenn ξ, ξ_1, ξ_2 drei nicht zu einem vollständigen System gehörige Wurzeln sind (d. h. wenn denselben drei Charakteristiken mit ungerader Summe entsprechen) so besteht zwischen ihnen die Gleichung (6).

§ 2.

Wir betrachten nun das System $\mathfrak{S}$ derjenigen Substitutionen der 28 Wurzeln der Doppeltangentengleichung, welches man erhält, indem man zunächst die Elemente des Siebenersystems $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ auf alle mögliche Arten unter einander vertauscht, und ferner dasselbe durch alle 287 andere vollständige Siebenersysteme, jedes in jeder möglichen Ordnung genommen, ersetzt, und die übrigen Wurzeln jedesmal nach den Formeln (4), also nach der in § 1, 1. angegebenen Regel bestimmt.

Die Anzahl dieser Substitutionen beträgt

$$N = 288 \,.\, \Pi(7) = 36 \,.\, \Pi(8) = 1451520,$$

und es lässt sich nachweisen, dass das System $\mathfrak{S}$ die Galois'sche Gruppe der Doppeltangentengleichung ist, wodurch wir zugleich der Nothwendigkeit des (übrigens leicht zu erbringenden) Beweises überhoben sind, dass das System $\mathfrak{S}$ eine Gruppe ist.

Der Beweis ergiebt sich aus Folgendem:

1. Wir bezeichnen die Galois'sche Gruppe der Doppeltangentengleichung einstweilen mit $\mathfrak{S}'$ und zeigen zunächst, dass in derselben keine Substitution G vorkommen kann, durch welche ein vollständiges Siebenersystem in ein anderes als ein vollständiges Siebenersystem überginge. Denn angenommen, es gehe ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch G über in ξ_1', ξ_2', ξ_3' der Art, dass die Summe der Charakteristiken von ξ_1, ξ_2, ξ_3 gerade, die von ξ_1', ξ_2', ξ_3' ungerade sei, so würde die Gleichung (6) bestehen

$$X(\xi_1', \xi_2', \xi_3') = 0$$

und diese müsste richtig bleiben, wenn man die Substitution G^{-1}, die gleichfalls zu $\mathfrak{S}'$ gehört, anwendet, weil jede rationale Beziehung

*) Nach unserer Bezeichnungsweise hat die Gleichung (6) die Wurzeln:

$$\xi_{1,3}, \xi_{2,3}, \xi_{1,4}, \xi_{2,4}, \xi_{1,5}, \xi_{2,5}, \xi_{1,6}, \xi_{2,6}, \xi_{1,7}, \xi_{2,7}.$$

zwischen den Wurzeln einer Gleichung erhalten bleibt, wenn man irgend eine Substitution der Gruppe dieser Gleichung auf dieselbe anwendet; also:

$$X(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

was nach § 1, 3. nicht möglich ist.

2. Ist G irgend eine in $\mathfrak{G}'$ enthaltene Substitution, durch welche das vollständige Siebenersystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ übergeht in das vollständige System $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_7'$ so kann man die Substitution G auf die Relationen (4) § 1 anwenden, wodurch die Veränderungen bestimmt sind, welche die übrigen Wurzeln durch G erfahren. Diese Veränderungen sind aber dieselben wie in derjenigen Substitution aus $\mathfrak{G}$, welche $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ überführt in $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_7'$, woraus folgt, dass G in $\mathfrak{G}$ enthalten ist.

Jede Substitution aus $\mathfrak{G}'$ ist also zugleich in $\mathfrak{G}$ enthalten.

3. Drückt man in irgend einer rationalen Relation zwischen den Wurzeln der Doppeltangentengleichung:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7, \xi_{1,2}, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_{14}) = 0$$

zunächst die $\xi_{i,x}$ durch die Formeln (4) und hierauf nach (5) die a_i durch $\xi_1, \ldots, \xi_7, \Theta_1, \ldots, \Theta_7$ aus, so muss diese Relation in eine Identität übergehen, da die 14 Grössen $\xi_1, \ldots, \xi_7, \Theta_1, \ldots, \Theta_7$ ganz beliebig gewählt werden können. Daraus folgt aber, dass auf jede solche Relation die sämmtlichen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ angewandt werden dürfen. Insbesondere muss also jede Function der Wurzeln, welche im Rationalitätsbereich enthalten ist, durch die sämmtlichen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ ungeändert bleiben, woraus hervorgeht, dass jede in $\mathfrak{G}$ enthaltene Substitution zugleich in $\mathfrak{G}'$ vorkommt, womit der gesuchte Beweis vollendet ist.*)

Da man zwei und nicht mehr Charakteristiken eines vollständigen Siebenersystems beliebig wählen kann, so ist hiernach die Gruppe der Doppeltangentengleichung *zweifach transitiv*.

§ 3.

Wir suchen nun zunächst eine übersichtliche Darstellung und Bezeichnung der Substitutionen dieser Gruppe zu gewinnen.

Wenn man zunächst diejenigen unter den Substitutionen $\mathfrak{G}$ herausgreift, welche das vollständige Siebenersystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ im Ganzen ungeändert lassen, und nur seine Elemente unter einander vertauschen, so erhält man eine Gruppe von $\Pi(7)$ Substitutionen, welche ganz in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, welche sich eindeutig beziehen lässt auf die Gruppe

$$\mathfrak{A} = A_0, A_1, A_2, \ldots$$

*) Vgl. Serret, Algèbre sup. (3te Aufl.) II, p. 611.

der sämmtlichen $\Pi(7)$ Substitutionen von sieben Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Wir wählen ferner aus $\mathfrak{G}$ sieben Substitutionen aus, durch welche das vollständige System $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ durch sieben andere ersetzt wird, welche zu derselben geraden Charakteristik gehören. Diese mögen sein:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 1, & 1,2, & 1,3, & 1,4, & 1,5, & 1,6, & 1,7 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 1,2, & 2, & 2,3, & 2,4, & 2,5, & 2,6, & 2,7 \end{pmatrix} \text{ etc.},$$

woraus man eine weitere, gleichfalls in $\mathfrak{G}$ enthaltene Gruppe von $\Pi(8)$ Substitutionen ableitet, welche alle diejenigen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ umfasst, durch welche das System $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ entweder ungeändert bleibt, oder durch ein anderes ersetzt wird, welches zu derselben geraden Charakteristik gehört. Diese Gruppe lässt sich eindeutig beziehen auf die Gruppe $\mathfrak{S}$ der sämmtlichen $\Pi(8)$ Substitutionen von 8 Elementen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), wenn man die Bezeichnung der Wurzeln dahin abändert, dass man einen 8^{ten} Index einführt und demnach $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7$ durch $\xi_{1,8}, \xi_{2,8}, \xi_{3,8}, \xi_{4,8}, \xi_{5,8}, \xi_{6,8}, \xi_{7,8}$ bezeichnet. (Bezeichnung der Doppeltangenten von Hesse). Die Wurzeln der Doppeltangentengleichung sind dann übereinstimmend durch $\xi_{\iota,\varkappa}(\iota, \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, 8)$ bezeichnet und jeder Vertauschung der 8 Elemente $(1, 2, 3, \ldots, 8)$ entspricht eine bestimmte Vertauschung dieser Wurzeln. Die Substitutionen $T_1, T_2, \ldots, T_7$ entsprechen den Vertauschungen $(1,8), (2,8), \ldots, (7,8)$. Wir können daher die aus $\mathfrak{A}$ und $T_1, T_2, \ldots$ gebildete Gruppe einfach durch die Gruppe $\mathfrak{S}$, und ihre Substitutionen durch die Substitutionen $S_0, S_1, \ldots$ von $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Um die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ darzustellen, müssen noch 35 Substitutionen hinzugenommen werden, durch welche das vollständige System $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$ durch ein anderes ersetzt wird, welches zu jedem der 35 Dreiersysteme $(\iota, \varkappa, \lambda)$ gehört. Eine solche zu (1, 2, 3) gehörige Substitution ist

$$U_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 2,3, & 3,1, & 1,2, & 4, & 5, & 6, & 7 \end{pmatrix}.$$

Es ist auch hier bequemer, den 8^{ten} Index noch beizufügen und diese Substitution $U_{1,2,3}$ mit

$$U_{1,2,3,8} = U_{4,5,6,7}$$

zu bezeichnen, indem man festsetzt, dass $U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$ und $U_{\varkappa,\varkappa',\varkappa'',\varkappa'''}$ dasselbe bedeuten sollen, wenn die $\iota, \iota', \iota'', \iota''', \varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ zusammen alle 8 Indices umfassen. Die Anzahl dieser Substitutionen ist dann

gerade 35 und die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ kann symbolisch so bezeichnet werden:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S} + \sum \mathfrak{S}\, U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}. \tag{1}$$

Die Gesetze der Zusammensetzung in dieser Gruppe sind folgende:

Ist

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8 \end{pmatrix}$$

irgend eine Substitution in $\mathfrak{S}$, so ist

$$U_{1,2,3,4}\, S = S\, U_{a_1,a_2,a_3,a_4}, \tag{2}$$

$$U_{1,2,3,4}\, U_{1,2,3,4} = 1, \tag{3}$$

$$U_{1,2,3,4}\, U_{1,2,3,5} = (4,5)\, U_{1,2,3,4}, \tag{4}$$

$$U_{1,2,3,4}\, U_{1,2,5,6} = (1,2)\,(3,4)\,(5,6)\,(7,8)\, U_{1,2,7,8}. \tag{5}$$

§ 4.

Aus dieser Darstellung der Gruppe der Doppeltangentengleichung ergiebt sich sofort eine bemerkenswerthe Folgerung. Die Gruppe $\mathfrak{S}$ lässt sich zusammensetzen aus den Transpositionen $(\iota, \varkappa)$. Eine solche Transposition, etwa (1, 2), bewirkt aber die folgenden Transpositionen der Wurzeln:

$$(\xi_{1,3}, \xi_{2,3}),\quad (\xi_{1,4}, \xi_{2,4}),\quad (\xi_{1,5}, \xi_{2,5}),$$
$$(\xi_{1,6}, \xi_{2,6}),\quad (\xi_{1,7}, \xi_{2,7}).\quad (\xi_{1,8}, \xi_{2,8}),$$

während die übrigen Wurzeln ungeändert bleiben. Da die Anzahl dieser Transpositionen gerade ist, so folgt, dass alle Substitutionen in $\mathfrak{S}$ aus einer *geraden* Anzahl von Transpositionen zusammengesetzt sind. Dasselbe gilt aber auch von den Substitutionen U und mithin von der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}$; denn z. B. die Substitution $U_{1,2,3,4}$ bewirkt die folgenden Wurzelvertauschungen:

$$(\xi_{1,2}, \xi_{3,4}),\quad (\xi_{1,3}, \xi_{2,4}),\quad (\xi_{1,4}, \xi_{2,3}),$$
$$(\xi_{5,6}, \xi_{7,8}),\quad (\xi_{5,7}, \xi_{6,8}),\quad (\xi_{6,7}, \xi_{5,8}).$$

Daraus aber ergiebt sich, dass das Differenzenproduct der sämmtlichen 28 Wurzeln durch die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ ungeändert bleibt, und mithin im Rationalitätsbereich enthalten ist. Damit ist bewiesen:

Die Discriminante der Doppeltangentengleichung ist das Quadrat einer rationalen Function.

§ 5.

Wenn in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ eine andere Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ganz enthalten ist, so nennen wir $\mathfrak{G}_1$ einen Divisor von $\mathfrak{G}$; wenn ferner für je zwei Substitutionen G in $\mathfrak{G}$ und G_1 in $\mathfrak{G}_1$ die transformirte Substitution

$$G^{-1} G_1 G$$

in G_1 enthalten ist, wenn also mit andern Worten

$$G^{-1} \mathfrak{G}_1 G = \mathfrak{G}_1$$

ist, so heisst $\mathfrak{G}_1$ ein *eigentlicher Divisor von* $\mathfrak{G}$. (Galois).

Dies vorausgeschickt, wollen wir nachweisen, dass unsere Gruppe $\mathfrak{G}$ ausser $\mathfrak{G}$ selbst und der Einheit keinen eigentlichen Divisor enthält.

Die Gruppe $\mathfrak{S}$, welche durch die sämmtlichen Substitutionen von 8 Elementen dargestellt ist, enthält bekanntlich einen eigentlichen Divisor $\mathfrak{S}'$, der diejenigen Substitutionen umfasst, welche aus einer geraden Anzahl von Transpositionen gebildet sind, und welche die *alternirende* Gruppe von 8 Elementen genannt wird. Wir können, indem wir den Inbegriff derjenigen Substitutionen in $\mathfrak{S}$, welche aus einer ungeraden Anzahl von Transpositionen bestehen mit $\mathfrak{S}''$ bezeichnen

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'(1,2)$$

setzen. Ist dann $\mathfrak{H}$ irgend ein von der Einheit verschiedener eigentlicher Divisor von $\mathfrak{G}$, so ergiebt sich Folgendes:

1. Wenn in $\mathfrak{H}$ eine von 1 verschiedene Substitution aus $\mathfrak{S}'$ vorkommt, so enthält $\mathfrak{H}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{S}'$; enthält $\mathfrak{H}$ eine Substitution aus $\mathfrak{S}''$, so enthält es die ganze Gruppe $\mathfrak{S}$. Dies sind bekannte Sätze aus der allgemeinen Substitutionstheorie.

2. Wenn $\mathfrak{H}$ eine von der Einheit verschiedene Substitution aus $\mathfrak{S}$, also sicher die ganze Gruppe $\mathfrak{S}'$ enthält, so ist $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch; denn n. V. kommt in $\mathfrak{H}$ vor:

$$U_{1,2,3,4}\,(4,5,6)\,U_{1,2,3,4} = (4,5,6)\,(4,5)\,U_{1,2,3,5}$$

und mithin das ganze System

$$\mathfrak{S}''\,U_{1,2,3,5}$$

und folglich auch sämmtliche

$$\mathfrak{S}''\,U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}.$$

Ebenso enthält aber $\mathfrak{H}$ auch

$$U_{1,2,3,4}(3,5)\,(4,6)\,U_{1,2,3,4} = (3,5)(4,6)(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)\,U_{1,2,7,8},$$

mithin auch sämmtliche

$$\mathfrak{S}'\,U_{1,2,7,8}$$

und folglich alle

$$\mathfrak{S}'\,U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$$

also auch das ganze System $\mathfrak{S}''$, w. z. b. w.

3. Enthält $\mathfrak{H}$ eine der Substitutionen $U_{1,2,3,4}$, so enthält sie wegen

$$S^{-1}\,U_{1,2,3,4}\,S = U_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$$

alle diese Substitutionen; mithin auch

$$U_{1,2,3,4}\,U_{1,2,3,5}\,U_{1,2,3,4} = (4,5)$$

und ist also nach 2. mit $\mathfrak{G}$ identisch.

4. Enthält $\mathfrak{H}$ eine Substitution von der Form $SU_{1,2,3,4}$, worin S von 1 verschieden ist, so enthält es auch, wenn $\iota, \varkappa$ irgend zwei Indices sind, beide aus der Reihe 1, 2, 3, 4 oder beide aus der Reihe 5, 6, 7, 8,

$$(\iota, \varkappa)\, S\, U_{1,2,3,4}\, (\iota, \varkappa)\, U_{1,2,3,4} S^{-1} = (\iota, \varkappa)\, S(\iota, \varkappa)\, S^{-1}.$$

Wenn man also nachweisen kann, dass sich über $\iota, \varkappa$ so verfügen lässt, dass dies letztere nicht die identische Substitution ist, so ist nach 1. bewiesen, dass auch in diesem letzten Falle $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmen muss. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass

$$S^{-1}(\iota, \varkappa)\, S = (a_\iota, a_\varkappa)$$

von $(\iota, \varkappa)$ verschieden sei. Dies ist sicher dann der Fall, wenn man für ι zunächst einen durch S veränderten Index und dann, was stets möglich ist, $\varkappa$ so wählt dass $a_\varkappa$ nicht $= \iota$ ist. Damit ist also nachgewiesen, *dass die Gruppe $\mathfrak{G}$ ausser der Einheit und sich selbst keinen eigentlichen Divisor besitzt.*

Hieraus folgt zunächst, dass die Gruppe der Doppeltangentengleichung nicht durch Adjunction der Wurzel einer *reinen Gleichung* erniedrigt werden kann.

§ 6.

Um solche Gleichungen zu ermitteln, deren Wurzeln die Gruppe der Doppeltangentengleichung erniedrigen, hat man uneigentliche Divisoren der Gruppe $\mathfrak{G}$ aufzusuchen. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage, ob sich darunter Gleichungen von niedrigerem als dem 28ten Grade befinden, d. h. ob es Divisoren von $\mathfrak{G}$ giebt, deren Grad höher als $\frac{N}{28}$ ist*). Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

1. Wenn ein Divisor $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{S}'$ und ausserdem eine nicht in $\mathfrak{S}$ enthaltene Substitution enthält, so ist $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch. Beim Beweis dieser Behauptung sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Es enthalte $\mathfrak{H}$ eine Substitution von der Form $S' U_{1,2,3,4}$. Dann enthält $\mathfrak{H}$ die sämmtlichen $\mathfrak{S}' U_{1,2,3,4}$ und auch die sämmtlichen $\mathfrak{S}' U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$; mithin auch $U_{1,2,3,4}$ und $U_{1,2,3,5}$; folglich auch

$$U_{1,2,3,4}\, U_{1,2,3,5}\, U_{1,2,3,4} = (4, 5)$$

und daher die ganze Gruppe $\mathfrak{S}$ und mithin $\mathfrak{G}$.

b) Es enthalte $\mathfrak{H}$ eine Substitution von der Form $S'' U_{1,2,3,4}$ und folglich sämmtliche $\mathfrak{S}'' U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$. Dann enthält $\mathfrak{H}$ auch

*) C. Jordan hat auf anderem Wege diese Frage behandelt und in verneinendem Sinne beantwortet (Traité des substitutions p. 329).

$$(1,2)\,U_{1,2,3,4}\,(1,2)\,U_{1,2,5,6}\,(1,2)\,U_{1,2,7,8} = (3,4)\,(5,6)\,(7,8)$$

also die ganze Gruppe $\mathfrak{S}$ und mithin $\mathfrak{G}$.

2. Es sei $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ vom Grade d. Wenn dann in $\mathfrak{H}$ irgend eine Substitution $S\,U_{1,2,3,4}$ vorkommt, so enthält $\mathfrak{H}$ alle $\mathfrak{D}S\,U_{1,2,3,4}$, und es ist auch umgekehrt, wenn $S_1\,U_{1,2,3,4}$ in $\mathfrak{H}$ enthalten ist, S_1 in $\mathfrak{D}S$ enthalten, woraus hervorgeht, dass es in $\mathfrak{S}\,U_{1,2,3,4}$ entweder gar keine oder genau d Substitutionen aus $\mathfrak{H}$ giebt. Der Grad h von $\mathfrak{H}$ ist also $\leq 36d$, und wenn h grösser als $\frac{N}{28}$ sein soll, so muss

$$36d > \frac{\Pi(8)\,36}{28},$$

d. h.

$$d > \frac{\Pi(8)}{28}$$

sein. Wir haben also nur diejenigen Divisoren $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{S}$ zu berücksichtigen, deren Index (nach Cauchy u. Serret) kleiner als 28 ist.

Was zunächst die *intransitiven* Divisoren von $\mathfrak{S}$ betrifft, so sind darunter nur zwei Typen, deren Index < 28 ist*), nämlich die Gruppe sämmtlicher Vertauschungen von nur sieben Elementen, und die alternirende Gruppe von sieben Elementen. Die Indices dieser beiden Gruppen sind bezw. 8 und 16. Lassen wir in beiden Gruppen dieselbe Ziffer, etwa 8 ungeändert, so enthält die erste die zweite. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass eine Gruppe $\mathfrak{H}$, welche eine dieser beiden Gruppen und ausserdem noch irgend eine Substitution $S\,U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$ enthält, mit $\mathfrak{G}$ identisch ist. Der Beweis dieser Behauptung setzt sich folgendermassen zusammen.

Es bedeute $\mathfrak{A}$ die Gruppe sämmtlicher Substitutionen der 7 Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, $\mathfrak{A}'$ die darin enthaltene alternirende Gruppe und es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''.$$

Eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene Gruppe, welche $\mathfrak{A}'$ enthält, und ausserdem eine Substitution aus $\mathfrak{A}''(1,8)$, enthält die ganze Gruppe $\mathfrak{S}'$, und wenn sie eine Substitution aus $\mathfrak{A}'(1,8)$ enthält, so ist sie mit $\mathfrak{S}$ identisch.

Eine in $\mathfrak{G}$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{H}$ möge nun $\mathfrak{A}'$ und ausserdem eine Substitution

$$H = S\,U_{\iota,\iota'\iota''\iota'''}$$

enthalten. Es sind dann folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Die Substitution H hat die Form

$$A'\,U_{1,2,3,4}.$$

*) Vgl. Serret, Alg. sup. II, p. 322 ff.

In diesem Falle enthält die Gruppe $\mathfrak{H}$ auch $U_{1,2,3,4}$ und sämmtliche $U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$ (da man die letztere Bezeichnung immer so wählen kann, dass der Index 8 nicht unter den ι, ι', ι'', ι''' vorkommt). Folglich kommt in $\mathfrak{H}$ auch

$$U_{1,2,3,4}\,U_{1,2,3,5}\,U_{1,2,3,4} = (4,5)$$

und mithin die ganze Gruppe $\mathfrak{A}$ vor; ebenso aber auch

$$U_{1,2,3,7}\,U_{1,2,3,8}\,U_{1,2,3,7} = (7,8),$$

mithin die ganze Gruppe $\mathfrak{S}$ und folglich ist $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch.

2. H ist von der Form

$$A''\,U_{1,2,3,4}.$$

In diesem Falle enthält $\mathfrak{H}$ das ganze System $\mathfrak{A}''\,U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$, also auch:

$$(4,5)\,U_{1,2,3,8}\,U_{1,4,5,8}\,(6,7) = (1,8)\,(2,3)\,U_{1,6,7,8}$$

und folglich auch $(1,8)$, also die ganze Gruppe $\mathfrak{S}$ und mithin wie oben $\mathfrak{G}$.

3. H habe die Form

$$A(1,8)\,U_{1,2,3,4}.$$

Dann enthält $\mathfrak{H}$ auch $A_1(1,8)\,U_{1,2,3,5}$ (Zusammensetzung mit (4,5,6); $A_{(4,5,6)} = A_1$ gesetzt) und folglich auch:

$$A(1,8)\,U_{1,2,3,4}\,U_{1,2,3,5}(1,8)\,A_1^{-1} = A(1,8)(4,5)\,U_{1,2,3,4}(1,8)\,A_1^{-1},$$

also auch $A(4,5)\,U_{2,3,4,8}A_1^{-1}$, wodurch dieser Fall auf 2. zurückgeführt ist. Ganz ebenso schliesst man, wenn H die Form

$$A(7,8)\,U_{1,2,3,4}$$

hat.

Der nächst niedrige Werth, den der Index einer intransitiven Gruppe bei 8 Elementen haben kann, ist 28. Eine solche Gruppe entsteht nur dadurch, dass zwei Elemente unter sich und die übrigen 6 unter sich auf alle möglichen Arten vertauscht werden. Hieraus ergiebt sich ein Divisor von $\mathfrak{G}$ vom Grade $\frac{N}{28}$, welcher aus allen den Substitutionen von $\mathfrak{G}$ besteht, welche *eine* Wurzel der Doppeltangentengleichung ungeändert lassen.

Unter den transitiven Divisoren von $\mathfrak{S}$ kommen aber überhaupt keine vor, deren Index kleiner als 28 ist. Denn bei einer *imprimitiven* Gruppe kann der Index nicht kleiner als 35 sein (vgl. Netto, Substitutionstheorie, Leipzig 1883, Seite 79) und für eine primitive und transitive Gruppe von n Elementen besteht ein allgemeiner Satz (Netto, l. c. Seite 126), wonach ihr Index durch jede Primzahl, die $< \frac{2n}{3}$ ist, theilbar sein muss. Für unsern Fall ($n = 8$) muss also der Index einer jeden transitiven und primitiven Gruppe durch 30 theilbar sein.

§ 7.

1. Unsere bisherige Untersuchung hat uns auf einen Divisor $\mathfrak{S}$ der Gruppe der Doppeltangentengleichung geführt, welcher vom Grade $\frac{N}{36}$ ist. Da durch Substitution der Gruppe $\mathfrak{S}$ jedes Paar 1, 2 in jedes andere, also jede Wurzel in jede andere übergehen kann, so ist diese Gruppe noch *transitiv*. Aber sie ist nur einfach transitiv, da man durch Substitutionen von $\mathfrak{S}$ beispielsweise nicht gleichzeitig $\xi_{1,2}$ ungeändert lassen und $\xi_{1,3}$ in $\xi_{4,5}$ überführen kann.

Eine Function der Wurzeln, welche durch die Substitutionen von $\mathfrak{S}$ ungeändert bleibt, dagegen durch jede nicht in $\mathfrak{S}$ enthaltene Substitution sich ändert, genügt einer irreductibeln Gleichung 36^{ten} Grades. Eine solche Function ist z. B. wenn man

$$v_1 = \xi_{1,2}\xi_{1,3}\xi_{1,4}\xi_{1,5}\xi_{1,6}\xi_{1,7}\xi_{1,8}$$

setzt:

$$u = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8.$$

Durch Adjunction *einer* Wurzel dieser Gleichung wird die Doppeltangentengleichung selbst noch nicht reducirt, aber ihre Gruppe reducirt sich auf die Gruppe $\mathfrak{S}$, d. h. auf die Gruppe einer allgemeinen Gleichung des 8^{ten} Grades. Die Grössen $v_1, v_2, \cdots v_8$ sind die Wurzeln einer solchen, nach deren vollständiger Auflösung auch die Gleichung der Doppeltangenten gelöst ist.

2. Unter den übrigen Divisoren der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist zunächst noch derjenige hervorzuheben, den wir schon in § 6 erwähnt haben, welcher eine Wurzel, etwa $\xi_{7,8}$ ungeändert lässt, und welcher vom Grade $\frac{N}{28}$ ist.

Bedeutet $\mathfrak{A}$ das System der sämmtlichen Vertauschungen der Elemente $1, 2, 3 \cdots 6$, so lässt sich diese Gruppe folgendermassen darstellen:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}(7,8) + \sum_{1,6}^{\varkappa,\lambda,\mu} \mathfrak{A}\, U_{\varkappa,\lambda,\mu,8} + \sum_{1,6}^{\varkappa,\lambda,\mu} \mathfrak{A}(7,8)\, U_{\varkappa,\lambda,\mu,8} + \sum_{1,6}^{\varkappa,\lambda} \mathfrak{A}(7,\varkappa)\,(8,\lambda)\, U_{\varkappa,\lambda,7,8},$$

Diese Gruppe stimmt nach einer schon von C. Jordan benutzten Bemerkung von Geiser*) mit der Gruppe der Gleichung 27^{ten} Grades überein, von welcher die 27 Geraden auf einer allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung abhängen.

Die Gruppe $\mathfrak{T}$ ist intransitiv; auf sie wird durch *Adjunction der Wurzel* $\xi_{7,8}$ die Gruppe der Doppeltangentengleichung reducirt. Die

*) Mathemat. Annalen, Bd. I, S. 129.

Gleichung selbst reducirt sich dadurch auf den 27^{ten} Grad. Adjungirt man eine zweite Wurzel, etwa $\xi_{6,8}$, so reducirt sich die Gruppe $\mathfrak{T}$ noch weiter, und zwar, wenn man mit $\mathfrak{B}$ die Gruppe der Substitutionen der Elemente 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet, auf

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{B} + \sum_{1,5}^{\varkappa,\lambda,\mu} \mathfrak{B}\, U_{\varkappa,\lambda,\mu,8} + \sum_{1,5}^{\varkappa} \mathfrak{B}(6,7)(8,\varkappa)\, U_{6,7,8,\varkappa},$$

welche $\Pi(5) \cdot 16$ Substitutionen enthält. Diese Gruppe ist aber auch für die 26 übrigen Wurzeln nicht mehr transitiv, denn sie vertauscht die Wurzeln

$$\xi_{1,6},\ \xi_{1,7},\ \xi_{2,6},\ \xi_{2,7},\ \xi_{3,6},\ \xi_{3,7},\ \xi_{4,6},\ \xi_{4,7},\ \xi_{5,6},\ \xi_{5,7}$$

nur unter einander, welche daher als Wurzeln einer Gleichung 10^{ten} Grades bestimmt sind. Diese Gleichung 10^{ten} Grades ist keine andere als die in § 1 erwähnte Gleichung (6), und $\mathfrak{V}$ ist die Gruppe dieser Gleichung. $\mathfrak{V}$ besitzt einen Divisor von $\Pi(4) \cdot 16$ Substitutionen, welcher alle diejenigen Substitutionen umfasst, welche ein Product wie $\xi_{5,6}\xi_{5,7}$ ungeändert lässt, und diese Producte sind also die Wurzeln einer Gleichung 5^{ten} Grades.

3) Hat $\mathfrak{A}$ dieselbe Bedeutung wie oben, so findet man leicht noch den folgenden Divisor von $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}(7,8) + \sum_{1,6}^{\varkappa,\lambda} \mathfrak{A}\, U_{\varkappa,\lambda,7,8} + \sum_{1,6}^{\varkappa,\lambda} \mathfrak{A}(7,8)\, U_{\varkappa,\lambda,7,8},$$

dessen Grad $\frac{N}{63}$ ist. Auch diese Gruppe ist intransitiv, indem sie die Wurzeln

$$\xi_{1,8},\ \xi_{2,8},\ \xi_{3,8},\ \xi_{4,8},\ \xi_{5,8},\ \xi_{6,8},$$
$$\xi_{1,7},\ \xi_{2,7},\ \xi_{3,7},\ \xi_{4,7},\ \xi_{5,7},\ \xi_{6,7}$$

nur unter einander vertauscht.

Eine Function welche durch die Substitutionen von $\mathfrak{M}$ und nur durch diese ungeändert bleibt, und daher einer Gleichung 63^{ten} Grades genügt, ist z. B.

$$v = \xi_{1,7}\xi_{1,8} + \xi_{2,7}\xi_{2,8} + \xi_{3,7}\xi_{3,8} + \cdots + \xi_{6,7}\xi_{6,8};$$

die Adjunction *einer* Wurzel dieser Gleichung 63^{ten} Grades bewirkt ein Zerfallen der Doppeltangentengleichung in eine Gleichung 12^{ten} und eine 16^{ten} Grades.

4. Es möge endlich noch ein Divisor von $\mathfrak{G}$ vom Grade $\frac{N}{336}$ erwähnt sein. Es bedeute $\mathfrak{E}$ die Gruppe derjenigen Substitutionen der Elemente $1, 2 \cdots 8$, welche 1, 2, 3, 4, 5 einerseits, 6, 7, 8 andererseits unter einander vertauschen. Die erwähnte Gruppe ist dann

$$\mathfrak{S} + \sum_{1,5}^{\varkappa} \mathfrak{S}\, U_{6,7,8,\varkappa}.$$

Auch diese Gruppe ist intransitiv, denn sie vertauscht die Wurzeln $\xi_{\varkappa,\lambda}$ ($\varkappa, \lambda = 1, 2, 3, 4, 5$) nur unter einander. Eine zu dieser Gruppe gehörige Function, welche Wurzel einer Gleichung 336$^{\text{ten}}$ Grades ist, ist folgende:

$$w = \xi_{1,6}\,\xi_{2,6}\,\xi_{3,6}\,\xi_{4,6}\,\xi_{5,6}\,\xi_{7,8} + \xi_{1,7}\,\xi_{2,7}\,\xi_{3,7}\,\xi_{4,7}\,\xi_{5,7}\,\xi_{6,8} + \xi_{1,8}\,\xi_{2,8}\,\xi_{3,8}\,\xi_{4,8}\,\xi_{5,8}\,\xi_{6,7}.$$

Dieser Gruppe kann die folgende geometrische Interpretation gegeben werden:

Es lassen sich auf 336 Arten 18 Doppeltangenten auswählen, welche drei Brianchon'sche Sechsecke bilden.

Charlottenburg, im October 1883.

Ueber die Integration der Hamilton'schen Systeme und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Von

Julius König in Budapest.

Seitdem Jacobi gezeigt hat, dass die Integration der Hamilton'schen Systeme totaler Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung äquivalente Probleme darbietet, hat sich das Interesse beinahe ausschliesslich der zweiten Form des Problems zugewendet, und die vollständige Entwicklung der Theorie ist an den partiellen Differentialgleichungen gegeben worden. Man kann sich dem gegenüber die Aufgabe stellen, nachdem einmal die Integration der partiellen Differentialgleichung auf die Integration des Hamilton'schen Systems zurückgeführt ist, alle weiteren Vereinfachungen der Integration an dem letzteren Systeme zu studiren, und es ist dies in gewisser Beziehung auch ein Zurückgreifen auf die Entwicklungen Cauchy's, der ja diese Umformung des Problems zuerst gegeben.

Die Resultate sind nicht ohne Interesse; denn es ergiebt sich eine Integrationsmethode, die wohl als neu bezeichnet werden darf*), da sie von den Jacobi'schen Entwicklungen vollständig unabhängig, auch die bei Mayer und Lie gebrauchten Sätze nicht benützt, und dabei so einfach ist, dass sie wohl geeignet ist, in die Lehrbücher der Integralrechnung überzugehen, wo diese Probleme eigentlich ihrer Wichtigkeit entsprechend, behandelt werden sollen.

Die Mayer'schen unbeschränkt integrabeln Systeme totaler Differentialgleichungen erweisen sich hiebei von grundlegender Wichtigkeit. Ihre Theorie ist hier vorausgesetzt, doch verweise ich auch auf die folgende Note, die allerdings in ziemlich weitgehender Verallgemeinerung die Integration dieser Systeme behandelt.

*) Es versteht sich von selbst, dass bei wirklicher Anwendung der gegebenen Integrationsmethode die auszuführenden Operationen genau dieselben sind, wie bei der Mayer'schen und Lie'schen Methode, die ja hieraufbezüglich auch untereinander vollständig übereinstimmen.

Nennt man kurz ein System von n totalen Differentialgleichungen erster Ordnung ein System n^{ter} Ordnung, so sind im Folgenden dem Wesen der Sache nach Methoden angegeben, nach denen die Integration gewisser Systeme n^{ter} Ordnung in die nacheinander zu leistende Integration je eines Systems $n - k^{\text{ter}}$ und eines k^{ter} Ordnung zerlegt wird.

Dabei ergiebt sich für die Hamilton'schen Systeme die weitere Vereinfachung, dass nach Integration des ersten Systems die Auflösung des zweiten sich auf Quadraturen zurückführen lässt.

Ich gebe zum Schluss die Form eines ziemlich allgemeinen Systems totaler Differentialgleichungen an, das in dem angegebenen Sinne „zerlegbar" ist.

Die Resultate und Methoden, welche in dieser Note und einigen folgenden verwandten Inhalts mitgetheilt sind, habe ich zum Theil schon in einer Schrift gegeben, welche die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung und die verwandten Probleme in zusammenhängender Darstellung behandelt, und 1881 in ungarischer Sprache unter den Publicationen der ungarischen Akademie erschien.

I.

1. Das Hamilton'sche System sei in folgender Form gegeben:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dx_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \\ \frac{dx_3}{dx_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_3}, & \frac{dp_3}{dx_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_3}, \\ &\cdots\cdots\cdots

nach irgend einer der Grössen x, p oder a identisch verschwinden muss. Die eckige Klammer soll auch hier anzeigen, dass die Differenzialquotienten $\frac{dx_i}{dx_1}$, $\frac{dp_i}{dx_1}$ durch ihre Werthe aus (1) zu ersetzen sind.

Der folgenden Anwendung wegen soll die aus diesem Satze entspringende Identität für den Fall vollständig entwickelt werden, dass das erste Integral in nach p_2 gelöster Form erscheint:

$$p_2 - F(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ p_3, \cdots, p_n;\ a) = 0. \tag{6}$$

Bezeichnet hier die eckige Klammer das Einsetzen von F für p_2, so wird diese Identität zuerst:

$$\begin{aligned}(7)\quad &-\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right] - \frac{\partial F}{\partial x_3}\left[\frac{\partial H}{\partial p_3}\right] - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n}\left[\frac{\partial H}{\partial p_n}\right]\\ &- \left[\frac{\partial H}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial F}{\partial p_3}\left[\frac{\partial H}{\partial x_3}\right] + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_n}\right] = 0.\end{aligned}$$

Ist wieder $[H]$ der Werth, den H durch Einsetzen von $p_2 = F$ erhält, so kann man in (7) noch $\left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right]$ und $\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right]$ durch die Differentialquotienten von $[H]$ ersetzen. Sei v irgend eine der Grössen $x_2 \cdots x_n$, $p_3 \cdots p_n$, so wird

$$\frac{\partial [H]}{\partial v} = \left[\frac{\partial H}{\partial v}\right] + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial v}$$

und also

$$\left[\frac{\partial H}{\partial v}\right] = \frac{\partial [H]}{\partial v} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial v}, \tag{8}$$

$$(v = x_2, \cdots, x_n,\ p_3, \cdots, p_n).$$

Diese Werthe in (7) eingesetzt, ergiebt nach unmittelbar zu ersehender Vereinfachung:

$$\begin{aligned}(9)\quad &-\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial [H]}{\partial p_3} - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial [H]}{\partial p_n}\\ &- \frac{\partial [H]}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial [H]}{\partial x_3} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial [H]}{\partial x_n} = 0.\end{aligned}$$

Aus (9) erhält man noch die später unmittelbar zur Anwendung gelangende Identität durch Differentiation nach irgend einer der Grössen v:

$$\begin{aligned}(10)\quad &-\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial x_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial x_3}\frac{\partial [H]}{\partial p_3} - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial^2 [H]}{\partial v \partial p_3} - \cdots\\ &- \frac{\partial^2 [H]}{\partial v \partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial p_3}\frac{\partial [H]}{\partial x_3} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial^2 [H]}{\partial v \partial x_3} + \cdots = 0,\end{aligned}$$

die demnach erfüllt wird, wenn $p_2 = F$ ein erstes Integral des vorgelegten Hamilton'schen Systems ist.

2. Bei der Untersuchung der Frage, wie sich die Integration des Systems (1) durch die Kenntniss eines ersten Integrals vereinfacht, kann — unbeschadet der Allgemeinheit — immer vorausgesetzt werden, dass das erste Integral die Grösse p_2 enthält. Da hier nämlich jeder Zusammenhang mit der äquivalenten partiellen Differentialgleichung entfällt, können in dem Falle, wo das Integral gar kein p enthält, die x und p mit einander vertauscht werden.

Ist demnach $p_2 = F$, ein erstes Integral, gegeben, so kann man zuerst, wie bei jedem System von Differentialgleichungen, diesen Werth von p_2 einführen, und dementsprechend die Gleichung für $\frac{dp_2}{dx_1}$ ganz weglassen. Dadurch erhält man

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right],$$

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right], \quad \frac{dp_i}{dx_1} = -\left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right],$$

$$(i = 3, 4 \cdots n),$$

oder mit Hülfe der Formeln (8) transformirt:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right],$$

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial [H]}{\partial p_i} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial [H]}{\partial x_i} + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$(i = 3, 4 \cdots n).$$

3. Die Aufgabe der Integration dieses Systems kann nun auch in folgender Weise formulirt werden. Es sollen $x_3, p_3, \cdots, x_n, p_n$ als Functionen von x_1 und x_2 bestimmt werden und in einer letzten Gleichung dann noch x_2 als Function von x_1 gegeben werden. Man verlangt damit eine Form der Integralgleichungen, die, wie man unmittelbar sieht, immer existirt. In dieser Auffassung geschrieben wird das zu integrirende System:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right],$$

$$(11) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_1} + \frac{\partial x_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial [H]}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dx_2}{dx_1},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \frac{\partial p_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial [H]}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{dx_2}{dx_1}.$$

Wenn es nun möglich ist, $x_3, p_3 \cdots x_n, p_n$ so als Functionen von x_1 und x_2 zu bestimmen, dass unabhängig von dem Zusammenhange dieser Grössen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial [H]}{\partial p_i}, & \frac{\partial x_i}{\partial x_2} &= -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial x_1} &= -\frac{\partial [H]}{\partial x_i}, & \frac{\partial p_i}{\partial x_2} &= \frac{\partial F}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

$$(i = 3, 4, \cdots, n),$$

so sind die Gleichungen (11), mit Ausnahme der ersten, befriedigt, wie immer x_2 als Function von x_1 bestimmt werde. Setzt man also die Werthe von $x_3, p_3 \cdots x_n, p_n$ als Functionen von x_1 und x_2 in diese erste Gleichung ein, so bestimmt diese Differentialgleichung erster Ordnung

$$(13)\qquad \frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]$$

x_2 als Function von x_1, und die Integration ist in der angegebenen Form geleistet.

Da nun (12) *ein Mayer'sches unbeschränkt integrables System ist*, so kann die Integration in der That auf diesem Wege ausgeführt werden, und man erhält die *allgemeine Lösung;* denn die Gleichungen (12) und (13) enthalten aus $p_2 = F$ die Constante a, (12) ergiebt $2n - 4$, und (13) eine letzte Constante, also schliesslich, wie nothwendig, $2n - 2$ Constanten.

Dass (12) die Integrabilitätsbedingungen wirklich erfüllt, ist leicht zu sehen. Diese Bedingungen können sämmtlich in der Form:

$$-\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{d}{dx_2}\left(\frac{\partial [H]}{\partial v}\right) = 0,$$

$$(v = x_3, p_3, \cdots, x_n, p_n)$$

vereinigt werden.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} &+ \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial [H]}{\partial p_3} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial [H]}{\partial p_n} \\ &- \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial [H]}{\partial x_3} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial [H]}{\partial x_n}, \\ \frac{df}{dx_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} &- \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial F}{\partial p_3} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial F}{\partial x_3} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial F}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Schreibt man nun die Integrabilitätsbedingungen dementsprechend in entwickelter Form, so gelangt man zu den Gleichungen (10), also, da $p_2 = F$ ein Integral des gegebenen Systems ist, in der That zu Identitäten.

Um nun das System (12) aufzulösen, hat man bekanntlich*) nur das gewöhnliche System totaler Differentialgleichungen zu bilden:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial [H]}{\partial p_i} - y_2 \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial x_1} &= -\frac{\partial [H]}{\partial x_i} + y_2 \frac{\partial F}{\partial x_i}, \\ (i &= 3, \cdots, n), \end{aligned}$$

wo nur in $[H]$ und F, oder — was auf dasselbe herauskömmt — in deren partiellen Differentialquotienten nach $x_3, p_3, \cdots, x_n, p_n$, die Grösse x_2 mit Hülfe der Substitution

$$(16)\qquad x_2 - x_2^0 = (x_1 - x_1^0)\, y_2$$

durch y_2 zu ersetzen ist. Wenn man nach der Integration die willkürlichen Constanten durch die von y_2 unabhängig zu wählenden Anfangswerte $x_3^0, p_3^0, \cdots, x_n^0, p_n^0$ ausdrückt, und y_2 mit Hülfe von (16) wieder durch x_2 ersetzt, so hat man zugleich die allgemeinen Integralgleichungen des Systems (12) erhalten.

Um das vorgelegte Hamilton'sche System vollständig zu integriren, hätte man nur noch die Differentialgleichung erster Ordnung (13) zu integriren. Wie sich diese Integration auf eine blosse Quadratur reducirt — mit Hülfe bekannter Sätze aus der Theorie der Hamilton'schen Systeme, z. B. des Princips des letzten Multiplicators — braucht hier nicht weiter auseinandergesetzt zu werden.

Das Wichtigste ist aber, dass (15) *wieder die Form eines Hamilton'schen Systems besitzt*, und also wieder in gleicher Weise behandelt werden kann. Man kann nämlich (15) auch so schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial ([H] - y_2 F)}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial x_1} &= -\frac{\partial ([H] - y_2 F)}{\partial x_i}, \\ (i &= 3, \cdots, n) \end{aligned}$$

und kann also das Schlussresultat in folgender Form aussprechen:

Zur vollständigen Integration eines Hamilton'schen Systems $2(n-1)$-ter Ordnung genügt es je ein erstes Integral gewisser Hamilton'scher Systeme zu kennen, deren Ordnung der Reihe nach

$$2n-2,\ 2n-4,\ \cdots,\ 4,\ 2$$

ist.

---

*) S. A. Mayer's Abhandlung „Ueber unbeschränkt integrable Systeme etc.", Math. Annalen, V. Bd., pag. 448, insbesondere pag. 459—60, und meine diesem Aufsatze folgende Note.

II.

1. In völlig analoger Weise lässt sich die Reduction ermitteln, welche das Problem der Integration des Hámilton'schen Systems (1) erfährt, wenn $k-1$ erste Integrale

$$\Phi_2 = a_2, \quad \cdots, \quad \Phi_k = a_k \tag{17}$$

von solcher Beschaffenheit bekannt sind, dass sich die gegebenen Integralgleichungen nach $k-1$ der Grössen p auflösen lassen*), und wenn

$$p_2 - F_2 = 0, \cdots, p_k - F_k = 0 \tag{18}$$

diese neue Form der Gleichungen geben, die Relationen

$$(p_r - F_r,\ p_s - F_s) = \frac{\partial F_s}{\partial x_r} - \frac{\partial F_r}{\partial x_s} + \sum_{t=k+1}^{t=n} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_t}\frac{\partial F_s}{\partial p_t} - \frac{\partial F_s}{\partial x_t}\frac{\partial F_r}{\partial p_t} \right) = 0, \tag{19}$$

$$(r,\ s = 2, \cdots, k)$$

identisch erfüllt sind.

Für die Functionen F soll wieder zuerst eine Reihe von Identitäten abgeleitet werden, die am besten hier zusammengestellt werden, um später nicht den Gang der Untersuchung unterbrechen zu müssen.

Bedeutet v irgend eine der Grössen $x_2, \cdots, x_k; x_{k+1}, p_{k+1}, \cdots, x_n \cdot p_n$, so erhält man aus (19) durch partielle Differentiation nach v die Identitäten:

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial v \partial x_r} - \frac{\partial^2 F_r}{\partial v \partial x_s} + \sum_{t=k+1}^{t=n} \left(\frac{\partial^2 F_r}{\partial v \partial x_t}\frac{\partial F_s}{\partial p_t} + \frac{\partial F_r}{\partial x_t}\frac{\partial^2 F_s}{\partial v \partial p_t} - \frac{\partial^2 F_s}{\partial v \partial x_t}\frac{\partial F_r}{\partial p_t} - \frac{\partial F_s}{\partial x_t}\frac{\partial^2 F_r}{\partial v \partial p_t} \right) = 0, \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} r,\ s = 2, \cdots, k. \\ v = x_2, \cdots, x_n;\ p_{k+1}, \cdots, p_n \end{pmatrix}$$

Ferner erhält man aus

$$p_r - F_r = 0,$$

wenn man berücksichtigt, dass diese Gleichung ein Integral des Systems (1) ist, durch totale Differentiation nach x_1, wenn man noch die Werthe der Differentialquotienten von $x_2 \cdots x_n$, $p_2 \cdots p_n$ aus (1) und diejenigen von $p_2 \cdots p_k$ aus (18) einsetzt:

---

*) Es versteht sich von selbst, dass auch hier die p und x mit einander vertauscht werden können.

$$(21)\quad -\frac{\partial F_r}{\partial x_1}-\frac{\partial F_r}{\partial x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]-\cdots-\frac{\partial F_r}{\partial x_k}\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]-$$
$$-\frac{\partial F_r}{\partial x_{k+1}}\left[\frac{\partial H}{\partial p_{k+1}}\right]-\cdots-\frac{\partial F_r}{\partial x_n}\left[\frac{\partial H}{\partial p_n}\right]-$$
$$-\left[\frac{\partial H}{\partial x_r}\right]+\frac{\partial F_r}{\partial p_{k+1}}\left[\frac{\partial H}{\partial x_{k+1}}\right]+\cdots+\frac{\partial F_r}{\partial p_n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_n}\right]=0,$$

wo die eckige Klammer wieder andeutet, dass in dem eingeschlossenen Ausdruck $p_2\cdots p_k$ durch $F_2\cdots F_k$ zu ersetzen sind. Man sieht leicht, dass die jedenfalls richtige Gleichung (21) identisch bestehen muss, da sonst eine der Grössen $x_2\cdots x_n, p_{k+1},\cdots,p_n$ als Function der übrigen ohne neue Constante bestimmt wäre, oder eine Relation ausschliesslich zwischen x_1 und den Constanten $a_2\cdots a_k$ bestände, was beides unmöglich ist.

Die Identität (21) kann wieder mittels der Relationen:

$$(22)\quad \frac{\partial[H]}{\partial v}=\left[\frac{\partial H}{\partial v}\right]+\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F_2}{\partial v}+\cdots+\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]\frac{\partial F_k}{\partial v}$$

umgeformt werden und wird so:

$$-\frac{\partial F_r}{\partial x_1}-\frac{\partial F_r}{\partial x_2}\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]-\cdots-\frac{\partial F_r}{\partial x_k}\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]$$
$$-\sum_{t=k+1}^{t=n}\frac{\partial F_r}{\partial x_t}\left(\frac{\partial[H]}{\partial p_t}-\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F_2}{\partial p_t}-\cdots-\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]\frac{\partial F_k}{\partial p_t}\right)$$
$$-\frac{\partial[H]}{\partial x_r}+\frac{\partial F_2}{\partial x_r}\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]+\cdots+\frac{\partial F_k}{\partial x_r}\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]$$
$$+\sum_{t=k+1}^{t=n}\frac{\partial F_r}{\partial p_t}\left(\frac{\partial[H]}{\partial x_t}-\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F_2}{\partial x_t}-\cdots-\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]\frac{\partial F_k}{\partial x_t}\right)=0.$$

Vereinigt man hier die mit

$$\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right],\cdots,\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]$$

multiplicirten Glieder, so sieht man, dass jede einzelne dieser Grössen mit einem Factor multiplicirt erscheint, der mit einem der auf der linken Seite der Identitäten (19) stehenden Ausdrücke gleich ist, also verschwindet. Man erhält so schliesslich die Identität:

$$(23)\quad -\frac{\partial F_r}{\partial x_1}-\frac{\partial F_r}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial[H]}{\partial p_{k+1}}-\cdots-\frac{\partial F_r}{\partial x_n}\frac{\partial[H]}{\partial p_n}$$
$$-\frac{\partial[H]}{\partial x_r}+\frac{\partial F_r}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial[H]}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\frac{\partial F_r}{\partial p_n}\frac{\partial[H]}{\partial x_n}=0$$

und hieraus wieder, wenn man nach irgend einer der Grössen v differenzirt:

$$(24)\quad -\frac{\partial^2 F_r}{\partial v \partial x_1} - \frac{\partial^2 F_r}{\partial v \partial x_{k+1}}\frac{\partial [H]}{\partial p_{k+1}} - \cdots - \frac{\partial F_r}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial^2 [H]}{\partial v \partial p_{k+1}} - \cdots$$
$$-\frac{\partial^2 [H]}{\partial v \partial x_r} + \frac{\partial^2 F_r}{\partial v \partial p_{k+1}}\frac{\partial [H]}{\partial x_{k+1}} + \cdots + \frac{\partial F_r}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial^2 [H]}{\partial v \partial x_{k+1}} + \cdots = 0.$$

2. Führt man nun wieder die Werthe von $p_2, \cdots, p_k$ in die Gleichungen des Systems ein, und lässt dementsprechend diejenigen fort, die $\frac{dp_2}{dx_1}, \cdots, \frac{dp_k}{dx_1}$ geben und jetzt eine Folge der andern werden, so erhält man:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right],$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_k}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right],$$
$$\frac{dx_i}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right], \quad \frac{dp_i}{dx_1} = -\left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right],$$
$$(i = k+1, \cdots, n),$$

oder mit Hülfe der Formeln (22) transformirt:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right], \cdots, \frac{dx_k}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right],$$
$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial [H]}{\partial p_i} - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F_2}{\partial p_i} - \cdots - \left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]\frac{\partial F_k}{\partial p_i},$$
$$\frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial [H]}{\partial x_i} + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \cdots + \left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]\frac{\partial F_k}{\partial x_i},$$
$$(i = k+1, \cdots, n).$$

3. Die Aufgabe der Integration dieses Systems kann nun auch folgendermassen gefasst werden: Es sollen $x_{k+1}, p_{k+1}; \cdots; x_n, p_n$ als Functionen von $x_1 \cdots x_k$, und dann $x_2 \cdots x_k$ als Functionen von x_1 bestimmt werden. Die so festgesetzte Form der Integralgleichungen ist bekanntlich immer vorhanden. In dieser Auffassung ist das zu integrirende System:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right], \cdots, \frac{dx_k}{dx_1} = \left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right],$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x_i}{\partial x_1}+\frac{\partial x_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dx_1}\\
&=\frac{\partial[H]}{\partial p_i}-\frac{\partial F_2}{\partial p_i}\frac{dx_2}{dx_1}-\cdots-\frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{dx_k}{dx_1},\\
&\frac{\partial p_i}{\partial x_1}+\frac{\partial p_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dx_1}\\
&=-\frac{\partial[H]}{\partial x_i}+\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\frac{dx_2}{dx_1}+\cdots+\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\frac{dx_k}{dx_1}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Wenn es nun möglich ist $x_{k+1}, p_{k+1}; \cdots; x_n, p_n$ *so als Functionen von* $x_1 \cdots x_k$ *zu bestimmen, dass unabhängig von dem Zusammenhang dieser Grössen:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x_i}{\partial x_1}=+\frac{\partial[H]}{\partial p_i},\quad \frac{\partial x_i}{\partial x_2}=-\frac{\partial F_2}{\partial p_i},\ \cdots,\ \frac{\partial x_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial F_k}{\partial p_i},\\
&\frac{\partial p_i}{\partial x_1}=-\frac{\partial[H]}{\partial x_i},\quad \frac{\partial p_i}{\partial x_2}=\frac{\partial F_2}{\partial x_i},\ \cdots,\ \frac{\partial p_i}{\partial x_k}=\frac{\partial F_k}{\partial x_i},\\
&(i=k+1,\cdots,n),
\end{aligned}
\tag{26}
$$

so sind die in der zweiten und dritten Zeile des Systems (25) stehenden Gleichungen befriedigt, wie immer auch $x_2, \cdots, x_k$ als Functionen von x_1 bestimmt werden. Setzt man also die Werthe von x_{k+1}, $p_{k+1}, \cdots, x_n, p_n$ in der angegebenen Weise als Functionen $x_1 \cdots x_k$ bestimmt, in die Gleichungen

$$
\frac{dx_2}{dx_1}=\left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\right],\ \cdots,\ \frac{dx_k}{dx_1}=\left[\frac{\partial H}{\partial p_k}\right]
\tag{27}
$$

ein, so erhält man $x_2, \cdots, x_k$ als Functionen von x_1, und die Integration ist in der angegebenen Form geleistet.

Nun bildet (26) *ein Mayer'sches unbeschränkt integrables System.* Man kann also die Integration auf dem angegebenen Wege ausführen und erhält dabei die *allgemeine Lösung;* denn die Gleichungen (25) und (26) enthalten aus (18) die Constanten $a_2, \cdots, a_k$, (25) ergiebt weitere $2(n-k)$ Constanten, und (27) schliesslich $k-1$ Constanten, also schliesslich, wie diess der Fall sein muss, $2n-2$ Constanten.

Dass (26) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, ist leicht zu sehen. Diese Bedingungen können in den Formen:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial F_r}{\partial v}\right)-\frac{d}{dx_r}\left(\frac{\partial[H]}{\partial v}\right)=0,\\
&\frac{d}{dx_r}\left(\frac{\partial F_s}{\partial v}\right)-\frac{d}{dx_s}\left(\frac{\partial F_r}{\partial v}\right)=0,\\
&(r=2,\cdots,k),\\
&(v=x_{k+1}, p_{k+1}, \cdots, x_n, p_n)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

vereinigt werden. Nun ist aber:

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial [H]}{\partial p_{k+1}} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial [H]}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial [H]}{\partial x_{k+1}} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial [H]}{\partial x_n},$$

$$\frac{df}{dx_r} = \frac{\partial f}{\partial x_r} - \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial F_r}{\partial p_{k+1}} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial F_r}{\partial p_n} + \frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial F_r}{\partial x_{k+1}} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial F_r}{\partial x_n},$$

$$(r = 2, \cdots, k).$$

Schreibt man die Integrabilitätsbedingungen in entwickelter Form, so gelangt man zu den Gleichungen (24) und (20), die in der That identisch befriedigt sind.

Um nun das System (26) aufzulösen, hat man wieder das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(29)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial [H]}{\partial p_i} - y_2\frac{\partial F_2}{\partial p_i} - \cdots - y_k\frac{\partial F_k}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial x_1} &= -\frac{\partial [H]}{\partial x_i} + y_2\frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \cdots + y_k\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \end{aligned}$$

zu bilden, wo nur in $[H], F_2, \cdots, F_k$, die Grössen $x_2, \cdots, x_k$ mit Hülfe der Substitutionen:

$$(30)\qquad \begin{aligned} x_2 - x_2^0 &= (x_1 - x_1^0)\, y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_k - x_k^0 &= (x_1 - x_1^0)\, y_k \end{aligned}$$

durch $y_2 \cdots y_k$ zu ersetzen sind. Wenn man nach der Integration die willkürlichen Constanten durch die von $y_2 \cdots y_k$ unabhängig zu wählenden Anfangswerte $x_{k+1}^0, p_{k+1}^0, \cdots, x_n^0, p_n^0$ ausdrückt und $y_2 \cdots y_k$ mit Hülfe von (30) durch $x_2 \cdots x_k$ ersetzt, so hat man zugleich die allgemeinen Integralgleichungen des Systems (26) erhalten.

Um das vorgelegte Hamilton'sche System vollständig zu integriren, hat man nun noch die Differentialgleichungen (27) zu integriren. Diese letztere Aufgabe reducirt sich aber, wie noch gezeigt werden soll, auf blosse Quadraturen.

Abermals hat aber (29) die Form eines Hamilton'schen Systems mit $2(n-k)$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial p_i}([H] - y_2 F_2 - \cdots - y_k F_k), \\ \frac{\partial p_i}{\partial x_1} &= -\frac{\partial}{\partial x_i}([H] - y_2 F_2 - \cdots - y_k F_k). \end{aligned}$$

Die Integration eines Hamilton'schen Systems $2(n-1)$ter Ordnung reducirt sich demnach, wenn $k-1$ erste Integrale, die den Jacobi'schen Bedingungen genügen, bekannt sind, auf die Integration eines neuen Hamilton'schen Systems, das nur von der Ordnung $2(n-k)$ ist.

III.

1. Wir haben nun noch den Nachweis zu führen, dass nach Integration des Systems (26) oder (29) die Integrale des zurückgebliebenen Systems (27), oder, wie wir den Satz auch aussprechen können, sämmtliche Integrale des ursprünglich vorgelegten Hamilton'schen Systems durch blosse Quadraturen bestimmt werden können. Für den einfachsten Fall, $k=2$, ist der Satz nichts anderes als das Princip des letzten Multiplicators für das Hamilton'sche System. Es wird demnach genügen, seine Richtigkeit für ein beliebiges k vorauszusetzen und zu zeigen, dass er dann auch für $k+1$ gültig bleibt. Die Ausführung dieses Beweises enthält zugleich die Anweisung für die Berechnung der noch fehlenden Integrale.

Das mit Hülfe der $k-1$ ersten Integrale (17) erhaltene System (26) soll in der Folge kurz als *k-tes reducirtes System* bezeichnet werden, so dass das *erste* reducirte System mit dem ursprünglich vorgelegten Hamilton'schen Systeme zusammenfällt.

Die Reduction mit Hülfe von k ersten Integralen:

$$\Phi_2 = a_2, \cdots, \Phi_k = a_k, \quad \Phi_{k+1} = a_{k+1} \tag{31}$$

kann in zwei Schritte zerlegt werden, indem zuerst diese Integrale, mit Ausschluss des letzten gerade so benutzt werden, wie im vorigen Abschnitte.

Die Integrale (31) geben nach $p_2 \cdots p_k$, p_{k+1} aufgelöst:

$$p_2 - \overline{F}_2 = 0, \cdots, p_k - \overline{F}_k = 0, \quad p_{k+1} - \overline{F}_{k+1} = 0, \tag{32}$$

wo $\overline{F}_2, \cdots, \overline{F}_k$ aus den in (18) enthaltenen $F_2 \cdots F_k$ entstehen, wenn p_{k+1} durch $\overline{F}_{k+1}$ ersetzt wird*). Die $\overline{F}$ sind demnach Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_{k+2} \cdots p_n$, $a_2 \cdots a_{k+1}$.

Die Bedingungen (19) sind der Annahme nach identisch erfüllt, also auch dann, wenn zuletzt p_{k+1} durch F_{k+1} ersetzt wird. Nun ist aber (ebenso, wie unter (8))

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial v} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial v}.$$

Setzt man also in (19) überall F_{k+1} für p_{k+1}, so erhält man:

*) Der horizontale Strich soll im Folgenden immer die Ausführung der Substitution $p_{k+1} = \overline{F}_{k+1}$ andeuten.

$$\frac{\partial \overline{F}_s}{\partial x_r} - \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial x_s} + \sum_{t=k+2}^{t=n} \left(\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial x_t} \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial p_t} - \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial x_t} \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_t} \right)$$

$$- \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_r} + \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_p} + \left(\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \right) \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial p_{k+1}}$$

$$- \left(\frac{\partial \overline{F}_s}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \right) \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+1}} -$$

$$- \sum_{t=k+2}^{t=n} \left(\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_t} \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial p_t} + \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial p_t} \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial x_t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_t} \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_t} - \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial p_t} \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial x_t} \right) = 0,$$

oder kürzer geschrieben:

$$(p_r - \overline{F}_r,\ p_s - \overline{F}_s) - \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial p_{k+1}} (p_r - \overline{F}_r,\ p_{k+1} - \overline{F}_{k+1})$$

$$+ \frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+1}} (p_s - \overline{F}_s,\ p_{k+1} - \overline{F}_{k+1}) = 0.$$

Genügt demnach das neu hinzutretende Integral den Bedingungen:

$$(p_r - \overline{F}_r,\ p_{k+1} - \overline{F}_{k+1}) = 0, \tag{33}$$
$$(r = 2, \cdots, k),$$

so sind mit den Relationen (19) auch die folgenden:

$$(p_r - \overline{F}_r,\ p_s - \overline{F}_s) = 0,$$
$$(r, s = 2, \cdots, k)$$

identisch befriedigt.

Die Gleichungen (33) *sind aber die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass* $p_{k+1} - \overline{F}_{k+1} = 0$ (das aus dem ersten Integrale $\Phi_{k+1} = a_{k+1}$ durch Einsetzen der Werthe von $p_2 \cdots p_k$ aus den vorhergehenden Gleichungen und Auflösung nach p_{k+1} entsteht) *auch ein Integral des* k*-ten reducirten Systems* (26) *sei.* Es muss dann wieder der vollständige Differentialquotient von $p_{k-1} - \overline{F}_{k+1}$ nach $x_1, x_2, \cdots, x_k$, wenn man die Werthe der Differentialquotienten von $x_{k+1}, p_{k+1}, \cdots, x_n p_n$ aus (26) einsetzt, und $p_{k+1} = \overline{F}_{k+1}$ berücksichtigt, identisch verschwinden.

Differenzirt man nach x_1, so erhält man:

$$-\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_1}-\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial p_{k+1}}-\cdots-\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_n}\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial p_n}$$

$$-\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial F_{k+1}}{\partial p_{k+2}}\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial x_{k+2}}+\cdots+\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial p_n}\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial x_n}=0.$$

Nun ist wieder:

$$\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial v}=\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial v}-\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial v},$$

wodurch die erhaltene Bedingung in (23) übergeht, wenn dort $k+1$ statt k, und dann $k+1$ für r gesetzt wird, also die Bedingung dafür giebt, dass $p_{k+1}-\overline{F}_{k+1}=0$ ein Integral des ursprünglichen Hamilton'schen Systems sei.

Differenzirt man nun nach x_r, so erhält man:

$$-\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_r}+\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+1}}+\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_{k+2}}\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+2}}+\cdots+\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_n}\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_n}$$

$$+\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial x_{k+1}}-\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_{k+2}}\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial x_{k+2}}-\cdots-\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_n}\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_n}=0.$$

Berücksichtigt man wieder

$$\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial v}=\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial v}-\frac{\partial \overline{F}_r}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial v},$$

so wird die eben erhaltene Relation in der That:

$$(p_r-\overline{F}_r,\ p_{k+1}-\overline{F}_{k+1})=0,$$

womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Nachdem wir diese einfache Bedeutung der Jacobi'schen Bedingungen festgestellt haben, ist der Uebergang von den Integralen der reducirten Systeme zu denen des ursprünglichen Systems sehr leicht zu bewerkstelligen.

Das Integral $p_{k+1}-\overline{F}_{k+1}=0$ genügt dem System (26), also auch dem System (29), wenn $x_2\cdots x_k$ mit Hülfe der in (30) angegebenen Substitution durch $y_2\cdots y_k$ ersetzt werden. Reducirt man nun dieses System mit Hülfe dieses bekannten Integrals, so wird das neue reducirte System auf die Integration des Systems:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_1}=\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial p_i}-y_2\frac{\partial \overline{F}_2}{\partial p_i}-\cdots-y_{k+1}\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1}=-\frac{\partial [\overline{H}]}{\partial x_i}+y_2\frac{\partial \overline{F}_2}{\partial x_i}+\cdots+y_{k+1}\frac{\partial \overline{F}_{k+1}}{\partial x_i}$$

zurückgeführt werden. Dieses ist aber das gewöhnliche Hamilton'sche System, dessen Integration mit derjenigen des $\overline{k+1}$-ten reducirten Systems äquivalent ist.

Kennt man demnach alle Integrale des $k+1$-ten reducirten Systems, so wird man das noch fehlende erste Integral des k-ten reducirten Systems mit Hülfe des Princips des letzten Multiplicators bestimmen können, von diesem ebenso zum $k-1$-ten System übergehen, und so schliesslich alle noch fehlenden Integrale des vorgelegten Hamilton'schen Systems durch Quadraturen erhalten.

---

2. Nach vollständiger Integration des mittels der Integrale (18) reducirten k-ten Systems kann man sämmtliche Integrale des ursprünglichen Systems auch auf einem — wenigstens scheinbar — directeren Wege erlangen, der hier jedoch nur in zweiter Reihe kurz erwähnt werden soll, weil dieser die Darstellung der Integrale eines Hamilton'schen Systems mit Hülfe der Hamilton'schen Fundamentalfunction voraussetzt.

Die Integrale des Systems (29) lassen sich bekanntlich in der Form

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial W_k}{\partial p_i^0} = x_i^0, \quad (i = k+1, \cdots, n)$$

schreiben, und diese Gleichungen geben auch, ohne ihre Gestalt zu ändern, bei Anwendung der Substitution (30) die Integrale des Systems (26).

Dann sieht man aber auch aus den vorstehenden Erörterungen, dass

$$p_r = F_r, \quad (r = 2, \cdots, k),$$
$$\frac{\partial W_k}{\partial x_i} = p_i, \quad (i = k+1, \cdots, n)$$

jene $n-1$ Integrale des ursprünglichen Systems geben, aus denen die Fundamentalfunction des ursprünglichen Hamilton'schen Systems, und damit auch die übrigen $n-1$ Integrale des Systems durch Quadraturen bestimmt werden können *).

IV.

Genau nach den bisher angewandten Methoden lässt sich die Integration des allgemeineren Systems $n$ter Ordnung:

---

*) Siehe zum Beispiel Imschenetsky's Abhandlung in Grunert's Archiv, Bd. 50, pag. 433 u. f.

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = P_1, \cdots, \frac{\partial z_k}{\partial x} = P_k,$$
$$\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x} = Q_{k+1} + Q_{k+1,1} P_1 + \cdots + Q_{k+1,k} P_k$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = Q_n + Q_{n,1} P_1 + \cdots + Q_{n,k} P_k,$$

in die aufeinanderfolgende Integration eines Systems $n - k$-ter und eines k-ter Ordnung zerlegen, wenn die Functionen Q den folgenden Bedingungen genügen:

$$\frac{dQ_{k+i}}{dz_j} = \frac{dQ_{k+i,j}}{dx}, \qquad \frac{dQ_{k+i,j}}{dz_l} = \frac{dQ_{k+i,l}}{dz_j}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, n-k \\ j, l = 1, \cdots, k \end{pmatrix},$$

wo die Operationen $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dz_j}$ folgende Bedeutung haben:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + Q_{k+1} \frac{\partial}{\partial z_{k+1}} + Q_{k+2} \frac{\partial}{\partial z_{k+2}} + \cdots + Q_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$
$$\frac{d}{dz_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + Q_{k+1,j} \frac{\partial}{\partial z_{k+1}} + Q_{k+2,j} \frac{\partial}{\partial z_{k+2}} + \cdots + Q_{n,j} \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Die Bedingungen sind z. B. im einfachsten Falle erfüllt, wenn sämmtliche Q von den x und z unabhängige, constante Werthe besitzen.

Ueber die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen.

Von

Julius König in Budapest.

Das Fundamentalproblem der Theorie der partiellen Differentialgleichungen verlangt die Integration eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchem die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der unbekannten Functionen ist. Ist die Anzahl der Gleichungen grösser, so hat man es mit einem dieser Theorie eigenthümlichen Eliminationsproblem zu thun. Es sind zuerst die Bedingungen aufzustellen, dass die Gleichungen des Systems überhaupt gemeinschaftliche Lösungen besitzen, und zweitens Methoden anzugeben, mittels welcher die gemeinsamen Lösungen gefunden werden können. Für die so charakterisirten Probleme ist die Untersuchung des im folgenden aufgestellten Systems für den Fall der „unbeschränkten Integrabilität" von grundlegender Bedeutung. Die allgemeine Definition der unbeschränkten Integrabilität steht im engen Anschluss an jenen Fall, für welchen A. Mayer diesen wichtigen Begriff zuerst eingeführt hat.

Die Theorie der unbeschränkt integrabeln Systeme simultaner partieller Differentialgleichungen geht in den zwei einfachsten Fällen einerseits in die von A. Mayer entwickelte Theorie unbeschränkt integrabler Systeme totaler Differentialgleichungen, andrerseits in die von Lie gegebene Theorie der Jacobi'schen Systeme über. Die Methode, die im folgenden angewendet wird, ist wesentlich verschieden von denjenigen, die Mayer und Lie gegeben, und giebt für diese bekannten Sätze neue und einfache Beweise.

1. Es sollen im folgenden

$$z_1, z_2, \ldots, z_m$$

die abhängigen, ferner

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

die unabhängigen Variabeln bezeichnen, für die Differentialquotienten die Bezeichnung

$$p_{ik} = \frac{dz_i}{dx_k}$$

gebraucht werden.

Wir betrachten ein System von rm simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches nur an die Beschränkung gebunden ist, nach den Grössen

$$p_{11}, \ldots, p_{1r},$$
$$\ldots\ldots$$
$$p_{m1}, \ldots, p_{mr}$$

auflösbar zu sein. Die Untersuchung soll an dem in aufgelöster Form geschriebenen System geführt werden, dessen Gleichungen demnach die allgemeine Form:

$$(1)\quad p_{ij} - F_{ij}(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m; p_{1,r+1}, \ldots, p_{1,n}; \ldots; p_{m,r+1}, \ldots, p_{m,n}) = 0$$
$$i = 1, \ldots, m,$$
$$j = 1, \ldots, r$$

besitzen. Des kürzeren Ausdrucks wegen sollen jene Gleichungen des Systems, in denen der Index j gleich ist, zusammen als j-tes Untersystem, S_j, bezeichnet werden, und ferner als System Σ_j die Gesammtheit aller Gleichungen, in denen der zweite Index der Grössen p grösser oder gleich j ist.

Man sieht zuerst leicht ein, dass das System (1) *höchstens ein* bestimmtes Lösungssystem

$$z, z_2, \ldots, z_m$$

zulässt, das zugleich der Bedingung genügt, für das beliebig gewählte System von Anfangswerthen

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_r = x_r^0$$

in das beliebig gewählte System von Anfangswerthen

$$z_1^{(r)}, z_2^{(r)}, \ldots, z_m^{(r)}$$

überzugehen. Der Uebersichtlichkeit wegen schreiben wir kurz

$$f^{(k)} = (f)_{x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, x_k = x_k^0}.$$

Setzt man nämlich in dem letzten Untersystem S_r die Anfangswerthe der ersten $r - 1$ Variabeln ein, so wird dieses, da Differentiationen nach diesen Variabeln nicht vorkommen:

$$p_{ir}^{(r-1)} = F_{ir}^{(r-1)},$$

wenn wir wieder

$$\frac{d[z_i^{(r-1)}]}{dx_r} = p_{ir}^{(r-1)}$$

setzen, und man erhält die $z_i^{(r-1)}$ aus diesem System $S_r^{(r-1)}$ nach dem

Fundamentalsatze der Theorie der partiellen Differentialgleichungen*), als völlig bestimmte Functionen von $x_r, \ldots, x_n$.

Geht man nun auf das vorhergehende Untersystem S_{r-1} über und setzt in diesem

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0, \ldots, x_{r-2} = x_{r-2}^0$$

so ergeben sich aus $S_{r-1}^{(r-2)}$ wieder die $z_i^{(r-2)}$ als völlig bestimmte Functionen von $x_{r-1}, \ldots, x_n$. Fährt man in dieser Weise fort, so hat man schliesslich aus dem ersten Untersystem S_1 die z_i so zu bestimmen, dass

$$(z_i)_{x_1 = x_1^0} = z_i^{(1)}$$

wird, und erhält also ein einziges bestimmtes Lösungssystem z_i, das der gestellten Bedingung genügen kann. Umgekehrt ist es aber keineswegs eine Consequenz dieser Bestimmungsweise, dass die aus dem System S_j^{j-1} in dieser Weise erhaltenen Lösungen $z_i^{(j-1)}$ auch die Systeme $S_{j+k}^{(j-1)}$ befriedigen. Und dann hat das ganze System (1) überhaupt keine Lösungen, die den gestellten Nebenbedingungen genügen.

Das System (1) *soll unbeschränkt integrabel heissen, wenn es in der That möglich ist, ein System von Lösungen zu bestimmen, das für ein im Allgemeinen* (*d. h. mit Ausschluss einer* $(r-1)$*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit*) *beliebig gewähltes System von Anfangswerthen*

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_r = x_r^0$$

in das bestimmte Functionensystem

$$z_1^{(r)}, \ldots, z_m^{(r)}$$

übergeht.

2. *Die Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität* können nach einer sehr einfachen Methode entwickelt werden.

Bei dem Uebergang von dem Systeme Σ_j zu dem aus S_{j-1} und Σ_j bestehenden Systeme Σ_{j-1} ist es gleichgültig, ob wir $x_1, \ldots, x_{j-2}$ oder $x_1^0, \ldots, x_{j-2}^0$ schreiben, da diese Variabeln nur als Parameter vorkommen. Die aus S_{j-1} bestimmten Lösungen genügen dem System Σ_j, wenn x_{j-1}^0 in diesem für x_{j-1} gesetzt wird. Ist nun irgend eine dieser Gleichungen $\sigma = 0$, so muss auch identisch

$$\frac{d\sigma}{dx_{j-1}} = 0$$

aus den Gleichungen S_{j-1}, den aus diesen durch Differentiation

*) Kowalewsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Borchardt, Journal, Bd. 80. — Auf die Voraussetzungen dieses Satzes braucht hier nicht eingegangen zu werden. Wir wollen annehmen, dass die F solche Functionen sind, für welche der Satz gilt, und dass die Anfangswerthe $x_1^0, \ldots, x_r^0$ nicht aus jener höchstens $r-1$-fachen Mannigfaltigkeit entnommen sind, für welche Ausnahmen stattfinden.

erhaltenen und den Gleichungen S_j folgen, und ist dies der Fall, so ändert sich σ nicht, wenn x_{j-1} sich ändert, und das aus S_{j-1} bestimmte System von Lösungen genügt auch der Gleichung $\sigma = 0$.

Die notwendige und hinreichende Bedingung der unbeschränkten Integrabilität für das System (1) kann demnach so ausgesprochen werden, dass die Gleichungen

$$\frac{d(p_{ij} - F_{ij})}{dx_\varrho} = 0, \qquad (\varrho < j) \tag{2}$$

mit Berücksichtigung der Gleichungen $S_1, \ldots, S_{j-1}$, den aus diesen durch Differentiation folgenden und den Gleichungen S_j identisch erfüllt sein müssen, wobei natürlich noch die Relationen

$$\frac{dp_{ik}}{dx_l} = \frac{dp_{il}}{dx_k},$$

die nur zwei Benennungen derselben Grösse geben, zu berücksichtigen sein werden.

Die Entwicklung des in (2) stehenden Ausdrucks giebt

$$\frac{d(p_{ij} - F_{ij})}{dx_\varrho} = \frac{dp_{ij}}{dx_\varrho} - \frac{dF_{ij}}{dx_\varrho} = \frac{dp_{i\varrho}}{dx_j} - \frac{dF_{ij}}{dx_\varrho}$$
$$= \frac{dF_{i\varrho}}{dx_j} - \frac{dF_{ij}}{dx_\varrho}.$$

Weiter ist:

$$\frac{dF_{i\varrho}}{dx_j} = \frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial x_j} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial z_\lambda} p_{\lambda j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=r+1}^{\nu=n} \frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_\mu} \frac{dp_{\mu\nu}}{dx_j}.$$

Hier kann man für $p_{\lambda j}$ nach den vorhergehenden Gleichungen $F_{\lambda j}$ setzen, ferner ist:

$$\frac{dp_{\mu\nu}}{dx_j} = \frac{dp_{\mu j}}{dx_\nu} = \frac{dF_{\mu j}}{dx_\nu}$$
$$= \frac{\partial F_{\mu j}}{\partial x_\nu} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial F_{\mu j}}{\partial z_\lambda} p_{\lambda\nu} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} \sum_{\tau=\varrho+1}^{\tau=n} \frac{\partial F_{\mu j}}{\partial p_{\sigma\tau}} \frac{dp_{\sigma\tau}}{dx_\nu}$$

und man erhält schliesslich

$$\frac{dF_{i\varrho}}{dx_j} = \frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial x_j} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial z_\lambda} F_{\lambda j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=r+1}^{\nu=n} \frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu j}}{\partial x_\nu}$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=r+1}^{\nu=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu j}}{\partial z_\lambda} p_{\lambda\nu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=r+1}^{\nu=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} \sum_{\tau=r+1}^{\tau=n} \frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}} \frac{\partial F_{\mu j}}{\partial p_{\sigma\tau}} \frac{dp_{\sigma\tau}}{dx_\nu}$$

oder, wenn man noch die kürzeren Bezeichnungen

$$\left(\frac{dF_{i\varrho}}{dx_j}\right)=\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial x_j}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial z_\lambda}F_{\lambda j},\quad \left(\frac{dF_{\mu j}}{dx_\nu}\right)=\frac{\partial F_{\mu j}}{\partial x_\nu}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}\frac{\partial F_{\mu j}}{\partial z_\lambda}p_{\lambda\nu},$$

einführt.

$$\frac{dF_{i\varrho}}{dx_j}=\left(\frac{dF_{i\varrho}}{dx_j}\right)+\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{\nu=r+1}^{\nu=n}\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}}\left(\frac{dF_{\mu j}}{dx_\nu}\right)$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{\nu=r+1}^{\nu=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=m}\sum_{\tau=r+1}^{\tau=n}\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}}\frac{\partial F_{\mu j}}{\partial p_{\sigma\tau}}\frac{dp_{\sigma\tau}}{dx_\nu}$$

und es wird demnach aus (2)

$$(3)\qquad \frac{d(p_{ij}-F_{ij})}{dx_\varrho}=\frac{dF_{i\varrho}}{dx_j}-\frac{dF_{ij}}{dx_\varrho}$$

$$=\left(\frac{dF_{i\varrho}}{dx_j}\right)-\left(\frac{dF_{ij}}{dx_\varrho}\right)+\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{\nu=r+1}^{\nu=n}\left\{\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}}\left(\frac{dF_{\mu j}}{dx_\nu}\right)-\frac{\partial F_{ij}}{\partial p_{\mu\nu}}\left(\frac{dF_{\mu\varrho}}{dx_\nu}\right)\right\}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{\nu=r+1}^{\nu=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=m}\sum_{\tau=r+1}^{\tau=n}\left(\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}}\frac{\partial F_{\mu j}}{\partial p_{\sigma\tau}}-\frac{\partial F_{ij}}{\partial p_{\mu\nu}}\frac{\partial F_{\mu\varrho}}{\partial p_{\sigma\tau}}\right)\frac{dp_{\sigma\tau}}{dx_\nu}=0.$$

Hier muss aber der in der ersten Zeile stehende Ausdruck, sowie jeder Coefficient der Grössen

$$\frac{dp_{\sigma\tau}}{dx_\nu}=\frac{dp_{\sigma\nu}}{dx_\tau}$$

für sich und zwar identisch verschwinden, da aus den Systemen $S_1,\ldots,S_{j-1}$ — auch durch Differentiationen — keine Relationen zwischen den Grössen

$$p_{\sigma\tau},\quad \frac{dp_{\sigma\tau}}{dx_\nu}\quad(\sigma=1,\ldots,m;\ \tau,\nu=r+1,\ldots,n)$$

abgeleitet werden können. Uebrigens sieht man auch unmittelbar, dass im entgegengesetzten Falle, dadurch, dass man in (3) für $x_1,\ldots,x_r$ die beliebigen Anfangswerthe $x_1^0,\ldots,x_r^0$ setzt, (3) eine Relation zwischen den Anfangswerthen der z geben würde, also die Bedingung der unbeschränkten Integrabilität nicht erfüllt wäre.

Dass die entwickelte Bedingung auch hinreichend ist, erhellt aus dem Gange der Entwicklung selbst.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die unbeschränkte Integrabilität des Systems

$$p_{ij}=F_{ij}(x_1,\ldots,x_n;\ z_1,\ldots z_m;\ p_{1,r+1},\ldots,p_{1n};\ldots;p_{m,r+1},\ldots,p_{mn})$$
$$(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,r)$$

sind demnach

$$\left(\frac{dF_{i\varrho}}{dx_j}\right)-\left(\frac{dF_{ij}}{dx_\varrho}\right)+\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{\nu=r+1}^{\nu=n}\left\{\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}}\left(\frac{dF_{\mu j}}{dx_\nu}\right)-\frac{\partial F_{ij}}{\partial p_{\mu\nu}}\left(\frac{dF_{\mu\varrho}}{dx_\nu}\right)\right\}=0,$$

$$(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,r;\ \varrho<j),$$

(4)

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=m}\left(\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\nu}}\frac{\partial F_{\mu j}}{\partial p_{\sigma\tau}}-\frac{\partial F_{ij}}{\partial p_{\mu\nu}}\frac{\partial F_{\mu\varrho}}{\partial p_{\sigma\tau}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F_{i\varrho}}{\partial p_{\mu\tau}}\frac{\partial F_{\mu j}}{\partial p_{\sigma\mu}}-\frac{\partial F_{ij}}{\partial p_{\mu\tau}}\frac{\partial F_{\mu\varrho}}{\partial p_{\sigma\nu}}\right)=0$$

$$i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,r;\ \varrho=j,$$

$$\nu,\ \tau=r+1,\ldots,n,$$

welchen Gleichungen die F identisch genügen müssen.

Die Eigenschaft des Systems (1), welche wir kurz als unbeschränkte Integrabilität bezeichnen, kann nun auch folgendermassen gefasst werden:

Es giebt keine Relation zwischen den Grössen

$$x_1,\ldots,x_n;\ z_1,\ldots,z_m,$$
$$p_{i\nu},\ (i=1,\ldots,m;\ \nu=r+1,\ldots,n)$$

— weder in Form einer gewöhnlichen, noch in der einer Differentialgleichung —, welcher sämmtliche Lösungssysteme des vorgelegten Systems genügen. Diese Eigenschaft des Systems (1) ist in der That eine nothwendige und hinreichende Bedingung der unbeschränkten Integrabilität; nothwendig, weil jede solche Relation zugleich eine Relation zwischen den willkürlich zu wählenden Anfangswerthen der z zur Folge hätte; und auch hinreichend, weil die Relation (3) immer aus den Gleichungen des Systems folgt, und also nur dann keinen wirklichen Zusammenhang zwischen den betrachteten Grössen ergiebt, wenn die Gleichungen (4) identisch erfüllt sind.

3. Eine Transformation, die für den einfachsten Fall von P. Du Bois-Reymond angegeben, und verallgemeinert in Mayer's und Lie's Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt, führt auch hier die Integration des unbeschränkt integrabeln Systems simultaner partieller Differentialgleichungen auf die des ersten Untersystems zurück.

Führt man nämlich mittels der Festsetzungen

$$x_2-x_2^0=(x_1-x_0)\,\xi_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_r-x_r^0=(x_1-x_0)\,\xi_r$$

statt $x_2,\ldots,x_r$ die Variabeln $\xi_2,\ldots,\xi_r$ ein und bezeichnet die Differentialquotienten von z_i und z_j durch π_{ij}, so erhält man das folgende transformirte System:

$$p_{i1} = F_{i1} + \xi_2 F_{i2} + \cdots + \xi_r F_{ir}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$
$$\pi_{ij} = (x_1 - x_0) F_{ij}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 2, \ldots, r \end{pmatrix},$$

welches, wie leicht ersichtlich, mit dem ursprünglichen System zugleich unbeschränkt integrabel ist. Man erhält seine Lösung, wenn man das System

$$p_{i1} = F_{i1} + \xi_2 F_{i2} + \cdots + \xi_r F_{ir}$$

mit jenen Anfangswerthen $z_i^{(1)}$ integrirt, die man aus

$$\pi_{ij}^{(1)} = 0$$

erhält, wo nur x_1^0 so gewählt sein muss, dass keine der Functionen $F_{ij}^{(1)}$ unendlich wird. D. h. *die Anfangswerthe* $z_i^{(1)}$ *sind von* $\xi_2, \ldots, \xi_r$ *unabhängig, als blosse Functionen von* $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *zu wählen*, und jede solche Lösung des ersten Untersystems genügt auch dem System aller Differentialgleichungen, also auch dem zuerst gegebenen Systeme (1), wenn $\xi_2 \ldots \xi_r$ wieder durch $x_2 \ldots x_r$ ersetzt werden.

4. Es soll noch kurz hervorgehoben werden, wie das betrachtete System die Mayer'schen Systeme unbeschränkt integrabler totaler Differentialgleichungen, und die Jacobi'schen Systeme simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Function als einfachste Fälle enthält.

Man erhält die Mayer'schen Systeme, wenn $r = n$; in diesem Falle enthalten die F die p nicht; und von den Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität (4) fallen diejenigen zweiter Form ganz fort, und die ersten gehen in die bekannten Gleichungen über.

Im zweiten Falle ist $m = 1$, und die Summen nach μ und σ ziehen sich in je ein Glied zusammen; auch dann sind die Integrabilitätsbedingungen zweiter Form identisch befriedigt. Die Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität sind dann keine andern, als die Bedingungen dafür, dass die gegebenen Differentialgleichungen ein „Jacobi'sches System" bilden, und der oben aufgestellte Satz geht in diesem speciellen Falle in das Lie'sche Theorem über.

Détermination du genre d'une courbe algébrique

par

L. Raffy à Paris.*)

1. La notion de *genre* est due à Riemann. Elle a été introduite par Clebsch dans la théorie des courbes et n'a pas moins d'importance en Géométrie qu'en Analyse. En Géométrie, la définition précise du genre d'une courbe à singularités supérieures présente des difficultés sérieuses. Elle a donné lieu à d'importants travaux, qui sont résumés dans les *Leçons de Géométrie* de Clebsch (t. II, Chap. I.)

En Analyse, le genre de la fonction y définie par une équation algébrique $f(x, y) = 0$, ou le genre de la courbe représentée par cette équation, est le nombre des intégrales abéliennes de première espèce $\int \varphi(x, y)\, dx$ relatives à l'équation $f(x, y) = 0$. Cette définition n'est pas identique à celle adoptée par Riemann, mais elle lui est équivalente. De cette définition on déduit très facilement que *si deux courbes algébriques se correspondent point par point (c'est-à-dire si les coordonnées de tout point de l'une sont des fonctions rationnelles des coordonnées d'un point de l'autre), ces deux courbes sont du même genre.* Cette proposition a de nombreuses applications géométriques. En outre, elle permet d'énoncer, sans aucune restriction, le théorème suivant, qui est capital, et que Riemann a découvert:

Théorème. *Étant donnée une équation algébrique $f(x, y) = 0$, irréductible et de degré m par rapport à y, le genre de la fonction y, définie par cette équation, est égal à la demi-somme des ordres des points de ramification de cette fonction, diminuée de $m - 1$.*

*) Les pages qu'on va lire sont détachées d'un Mémoire intitulé ***Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes***, que j'ai présenté comme Thèse de doctorat à la Faculté des Sciences de Paris, le 12 Décembre 1882, et qui a paru dans les *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* en Mars-Juin 1883.

Je tiens à remercier ici M. Nöther des observations qu'il a bien voulu m'adresser à propos de mes recherches. Je dois à l'éminent géomètre d'Erlangen d'avoir pu faire disparaitre quelques imperfections et obscurités qui s'étaient glissées dans le texte primitif. L. R.

En d'autres termes, *le genre est égal à la moitié du nombre des lacets binaires relatifs aux points critiques de la fonction y, diminuée de m — 1.*

Désignons par p le genre, par N le nombre des lacets binaires. Le théorème précédent s'exprime par l'égalité

$$2(p + m - 1) = N,$$

qu'on peut écrire

$$2(p + m - 1) = \Sigma(r - 1),$$

en désignant par r le nombre des racines y qui forment l'un des systèmes circulaires relatifs à un point critique de la fonction y. Cette relation a lieu, quelles que soient les singularités de la courbe $f(x, y) = 0$: la sommation indiquée au second membre s'étend à tous les points critiques de la fonction y, tant à ceux situés à l'infini qu'à ceux situés à distance finie, et à tous les systèmes circulaires formés par les valeurs finies ou infinies que prend y en chacun de ces points critiques.

D'après cela, la détermination du genre d'une courbe algébrique revient à celle du nombre $\Sigma(r-1)$. Nous allons exposer une méthode qui permet d'obtenir ce nombre $\Sigma(r-1)$, et par suite le genre p, sans qu'il soit nécessaire de connaître les points critiques de la fonction y, ni les valeurs qu'elle prend en ces points.

2. Cette méthode consiste à ramener le problème proposé au problème suivant, que nous allons résoudre:

Étant donnée une équation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$, on sait que pour $x = a$ plusieurs valeurs finies de y deviennent égales; on ne connaît ni leur nombre ni leur valeur commune: on demande combien de ces valeurs sont des fonctions non uniformes de x aux environs du point $x = a$.

Désignons par b la valeur inconnue des racines y qui deviennent égales au point $x = a$. Les racines y, qui ne sont pas uniformes aux environs de ce point, se distribuent en systèmes circulaires dont chacun est représenté par un développement tel que

$$y = b + h(x-a)^{\frac{q}{p}} + h_1(x-a)^{\frac{q+1}{p}} + h_2(x-a)^{\frac{q+2}{p}} + \cdots;$$

p est le nombre des racines qui composent le système circulaire: c'est un entier au moins égal à 2; q est un entier positif quelconque, qui peut être un multiple de p. Certains des coefficients $h_1, h_2, \ldots$ peuvent être nuls, de sorte que le développement peut commencer par plusieurs termes à exposants entiers; mais il contient nécessairement un terme au moins à exposant fractionnaire irréductible de dénominateur p, et il peut contenir des termes à exposants fractionnaires irréductibles dont les dénominateurs soient des sous-multiples de p. Soit

$h'(x-a)^{\frac{q_1}{p_1}}$ celui des termes à exposant fractionnaire irréductible qui a le plus petit exposant, et soit μ_1 le plus petit entier supérieur à $\frac{q_1}{p_1}$. Prenons les dérivées d'ordre μ_1 des deux membres de l'égalité précédente; les termes qui précèdent le terme en $(x-a)^{\frac{q_1}{p_1}}$ forment un polynôme entier de degré au plus égal à $\mu_1 - 1$: la dérivée d'ordre μ_1 de ce polynôme est nulle, et il reste

$$\frac{d^{\mu_1} y}{dx^{\mu_1}} = h''(x-a)^{\frac{q_1}{p_1}-\mu_1} + h_1''(x-a)^{\frac{q_1}{p_1}-\mu_1+1} + \cdots;$$

par hypothèse, l'exposant $\frac{q_1}{p_1} - \mu_1$ est négatif: la dérivée $\frac{d^{\mu_1} y}{dx^{\mu_1}}$ est infinie pour $x = a$, ainsi que toutes les dérivées d'ordre supérieur à μ_1; toutes les dérivées d'ordre inférieur à μ_1 restent finies pour $x = a$. Supposons formée l'équation qui lie x et $\frac{d^{\mu_1} y}{dx^{\mu_1}}$: pour $x = a$, cette équation aura p racines infinies, puisque le développement de $\frac{d^{\mu_1} y}{dx^{\mu_1}}$ a, comme celui de y, p valeurs en chaque point.

Supposons qu'il y ait un autre système circulaire de racines égales à b pour $x = a$; soient p' le nombre des racines de ce système et μ_2 le plus petit entier supérieur au plus petit exposant fractionnaire qui figure dans son développement: μ_2 sera, par exemple, égal à 3, et μ_1 égal à 2. Si l'on forme l'équation entre x et $\frac{d^2 y}{dx^2}$, cette équation aura p racines infinies pour $x = a$ et pourra n'en avoir que p, tandis qu'il y a au moins $p + p'$ racines y qui ne sont pas uniformes aux environs du point $x = a$. Au contraire, si l'on forme l'équation entre x et $\frac{d^3 y}{dx^3}$, cette équation aura au moins $p + p'$ racines infinies pour $x = a$.

Nous allons assigner un nombre entier k tel que le nombre des racines infinies que l'équation entre x et $\frac{d^k y}{dx^k}$ admet pour $x = a$ soit exactement égal au nombre des racines y qui ne sont pas uniformes aux environs du point $x = a$.

3. Lemme. — *Soit* $f(x, y) = 0$ *une équation algébrique irréductible du degré* m *en* y; *soit*

$$R(x) = f_y'(x, y_1) f_y'(x, y_2) \ldots f_y'(x, y_m)$$

le discriminant de cette équation; soit $x = a$ *une racine d'ordre* α *de ce discriminant, et soit* k *le plus petit entier supérieur à* $\frac{\alpha}{2}$. *On forme l'équation qui lie* x *et* $\frac{d^k y}{dx^k}$. *Si, pour* $x = a$ *cette équation admet* n

racines infinies, parmi les valeurs finies de y qui deviennent égales au point $x = a$, il y en a n et n seulement qui ne sont pas des fonctions uniformes de x aux environs de ce point. Si cette équation n'admet pour $x = a$ aucune racine infinie, les valeurs finies de y qui deviennent égales au point $x = a$ sont toutes des fonctions uniformes aux environs de ce point.

Considérons les développements en série suivant les puissances de $x - a$ qui représentent les différents systèmes circulaires formés par les racines y qui deviennent égales au point $x = a$, mais ne sont pas uniformes aux environs de ce point: soient $\frac{q_1}{p_1}$, $\frac{q_2}{p_2}$, $\frac{q_3}{p_3}$, $\cdots$ les plus petits exposants fractionnaires qui figurent dans ces différents développements. Notre lemme sera établi, si nous prouvons que k est supérieur à tous les nombres $\frac{q_1}{p_1}$, $\frac{q_2}{p_2}$, $\cdots$.

Pour le prouver, nous n'avons qu'à nous reporter à l'exposition de la méthode de M. Puiseux qu'on trouve au Livre I, Chapitre II, de la *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet.

Supposons d'abord les racines séparées dès la première approximation. L'un des systèmes circulaires est représenté par la formule

$$y = b + (x-a)^{\frac{q}{p}}\left[v_1 + h_1(x-a)^{\frac{1}{p}} + h_2(x-a)^{\frac{2}{p}} + \cdots\right],$$

où q et p sont premiers entre eux: le système se compose de p racines, et l'exposant $\frac{q_1}{p_1}$ n'est autre que $\frac{q}{p}$. Parmi les p valeurs distinctes de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$, j'en considère deux dont les arguments diffèrent de $2\frac{l\pi}{p}$, l n'étant pas un multiple de p: il est certain qu'il y a au moins deux valeurs telles de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$, puisque p est au moins égal à 2. A ces deux valeurs distinctes de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$ correspondent deux racines distinctes y_1 et y_2 appartenant au système circulaire. Les deux différences $(y_1 - y_2)$ et $(y_2 - y_1)$ sont de l'ordre de $(x-a)^{\frac{q}{p}}$; leur produit est de l'ordre de $(x-a)^{2\frac{q}{p}}$. Or on sait que le produit des différences deux à deux des racines y de l'équation $f(x, y) = 0$ est égal, au signe près, au discriminant $R(x)$: ainsi $R(x)$ contient le facteur $(x - a)$ à une puissance entière α certainement supérieure ou égale à $2\frac{q}{p}$; on a donc

$$2\frac{q}{p} \leq \alpha;$$

d'où résulte

$$\frac{q}{p} \leq \frac{\alpha}{2} < k,$$

et, comme $\frac{q_1}{p_1}$ est égal à $\frac{q}{p}$, on a bien $\frac{q_1}{p_1} < k$.

Supposons maintenant que les racines ne soient séparées qu'à la seconde approximation. L'un des systèmes circulaires sera composé de pp' racines et représenté par la formule

$$y = b + (x-a)^{\frac{q}{p}} \left\{ v_1 + (x-a)^{\frac{q'}{pp'}} \left[v_1' + h_1 (x-a)^{\frac{1}{pp'}} + h_2 (x-a)^{\frac{2}{pp'}} + \cdots \right] \right\}.$$

Ici p et q ne sont plus nécessairement premiers entre eux; p peut être égal à 1 ou bien diviser q. Si $\frac{q}{p}$ n'est pas entier, l'exposant $\frac{q_1}{p_1}$ est égal à $\frac{q}{p}$; sinon, il est égal à $\frac{qp'+q'}{pp'}$, qui n'est certainement pas un entier, puisque p', premier avec q', ne peut pas diviser $qp'+q'$.

Parmi les pp' valeurs de $(x-a)^{\frac{1}{pp'}}$, j'en considère deux dont les arguments diffèrent de $2\frac{l\pi}{pp'}$, l étant un multiple de p, mais non un multiple de pp'. A ces deux valeurs distinctes de $(x-a)^{\frac{1}{pp'}}$ correspondent deux racines y_1 et y_2 qui ont les deux mêmes premiers termes $b + v_1 (x-a)^{\frac{q}{p}}$; mais le terme $v_1' (x-a)^{\frac{qp'+q'}{pp'}}$ n'a plus la même valeur dans le développement de l'une que dans le développement de l'autre. Le produit des deux différences $(y_1 - y_2)$ et $(y_2 - y_1)$ est de l'ordre de $(x-a)^{2\frac{qp'+q'}{pp'}}$, et il résulte du raisonnement précédent que l'on a

$$\frac{qp'+q'}{pp'} < k.$$

Or $\frac{q_1}{p_1}$ est inférieur ou égal à $\frac{qp'+q'}{pp'}$. On a donc bien encore $\frac{q_1}{p_1} < k$.

Il est clair que les mêmes conclusions subsistent, quel que soit l'ordre de l'approximation qui sépare les racines y. Supposons, par exemple ce soit la quatrième. L'un des systèmes circulaires sera représenté par un développement tel que

$$y = b + v_1 (x-a)^{\frac{q}{p}} + v_1' (x-a)^{\frac{q}{p} + \frac{q'}{pp'}} + v_1'' (x-a)^{\frac{q}{p} + \frac{q'}{pp'} + \frac{q''}{pp'p''}} + v_1''' (x-a)^{\frac{q}{p} + \frac{q'}{pp'} + \frac{q''}{pp'p''} + \frac{q'''}{pp'p''p'''}} + \cdots$$

et il se composera de $pp'p''p'''$ racines. A deux valeurs de $(x-a)^{\frac{1}{pp'p''p'''}}$ dont les arguments diffèrent de $2\frac{l\pi}{pp'p''p'''}$, l étant un multiple de

$pp'p''$, mais non de $pp'p''p'''$, correspondent deux racines y_1 et y_2 dont les développements ont les quatre mêmes premiers termes, mais diffèrent par le terme dont l'exposant est $\frac{q}{p}+\frac{q'}{pp'}+\frac{q''}{pp'p''}+\frac{q'''}{pp'p''p'''}$. Désignant pour abréger par N cet exposant, on a l'inégalité

$$N < k,$$

et comme l'exposant $\frac{q_1}{p_1}$ est égal, soit à N, soit à un des trois exposants précédents, on a encore

$$\frac{q_1}{p_1} < k,$$

ce qui démontre le lemme.

On voit immédiatement que, si l'équation entre x et $\frac{d^k y}{dx^k}$ n'admet aucune racine infinie pour $x = a$, toutes les valeurs finies de y qui deviennent égales au point $x = a$ sont des fonctions uniformes aux environs de ce point; car, s'il y en avait qui ne fussent pas uniformes, le développement d'un des systèmes circulaires qu'elles formeraient contiendrait un terme à exposant fractionnaire $\frac{q_1}{p_1}$ moindre que k, et $\frac{d^k y}{dx^k}$ serait infini pour $x = a$, contrairement à l'hypothèse.

Il suffit d'appliquer ce Lemme pour résoudre le problème énoncé au n° 2.

4. Marche à suivre. — Nous supposerons, comme on le fait toujours dans la théorie des intégrales abéliennes, que le point $x=\infty$ est un point ordinaire de la courbe $f(x, y) = 0$ dont on cherche le genre. S'il n'en est pas ainsi, on ramènera l'équation proposée à la forme voulue au moyen d'une transformation homographique. En vertu d'un théorème énoncé au n° 1, le genre de la courbe transformée est le même que celui de la courbe proposée.

De plus, nous supposerons (ce qui revient à une simple transformation de coordonnées) qu'en tout point critique $x = a$ la fonction y n'a pas plus d'un groupe de valeurs égales, c'est-à-dire que l'équation $f(a, y) = 0$ n'a qu'une *seule* racine multiple.

En vertu de cette hypothèse, si $x = a$ est une racine de l'équation

$$R(x) = f'_y(x, y_1)\, f'_y(x, y_2) \ldots f'_y(x, y_m) = 0$$

l'unique racine multiple b de l'équation $f(a, y) = 0$, étant l'unique racine commune aux deux équations $f(a, y) = 0$ et $f'_y(a, y) = 0$, sera une fonction rationnelle de a, que l'on sait trouver par la théorie de l'élimination: nous poserons $b = \varphi(a)$.

Remplaçons y par $\varphi(x)$ dans les diverses équations

$$f(x, y) = 0,\ f'_y(x, y) = 0,\ f''_{y^2}(x, y) = 0,\ \ldots,\ f^{(m-1)}_{y^{m-1}}(x, y) = 0,$$

et soient

$$R(x) = 0,\ R_1(x) = 0,\ R_2(x) = 0,\ \ldots,\ R_{m-1}(x) = 0,$$

ce que deviennent ces équations mises sous forme entière. Les valeurs de x qui annulent à la fois R et R_1, mais pas R_2, donnent des points critiques où deux valeurs de y et deux seulement deviennent égales; les valeurs de x qui annulent à la fois les j fonctions $R, R_1, R_2, \ldots, R_{j-1}$, mais pas R_j donnent des points critiques où j valeurs de y et j seulement deviennent égales.

Cela posé, nous mettrons le discriminant $R(x)$ sous la forme bien connue

$$R(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \ldots X_l^l \ldots X_n^n$$

où X_l est le premier membre de l'équation qui fait connaître les racines d'ordre l de l'équation $R(x) = 0$.

Nous allons calculer successivement les diverses parties de la somme $\Sigma(r-1)$ relation aux points critiques donnés par les diverses équations $X_l = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$.

On sait que les racines de l'équations $X_1 = 0$, ou les racines simples de l'équation $R(x) = 0$, donnent des points critiques spéciaux, où deux valeurs de y deviennent égales et forment un système circulaire. Pour chacun de ces systèmes, la différence $r - 1$ est égale à 1. Si donc δ est le degré du polynôme X_1, la partie de la somme $\Sigma(r-1)$ qui correspond aux points critiques donnés par l'équation $X_1 = 0$ est égale à δ.

5. Passons à l'équation $X_l = 0$. Calculons le plus grand commun diviseur de X_l et de R_1, et soit ξ_2 ce polynôme; soit de même ξ_3 le plus grand commun diviseur de X_l, de R_1 et de R_2; soit en général ξ_i le plus grand commun diviseur de X_l, R_1, R_2, ... et de R_{l-1}. Nous pouvons remplacer l'équation $X_l = 0$ par les équations

$$\xi_2 = 0,\ \xi_3 = 0, \ldots, \xi_i = 0, \ldots, \xi_q = 0.$$

En chacun des n_i points critiques donnés par les n_i racines de l'équation $\xi_i = 0$, i valeurs de y et i seulement deviennent égales.

Nous avons maintenant à considérer les diverses équations telles que $\xi_i = 0$ (qui pourrait n'être autre que l'équation $X_l = 0$ elle-même).

Désignons par k le plus petit entier supérieur à $\frac{l}{2}$: on formera $\frac{d^2y}{dx^2}$ au moyen de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'}{f_y'};$$

remplaçant par sa valeur $\frac{dy}{dx}$ qui figure dans l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on

obtiendra $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction rationnelle de x et y. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait exprimé $\frac{d^k y}{dx^k}$ en fonction rationnelle de x et y:

$$z = \frac{d^k y}{dx^k} = \psi(x, y),$$

puis on éliminera y entre cette équation et l'équation $f(x, y) = 0$. On obtiendra ainsi une équation du degré m par rapport à z et dont les coefficients seront des fonctions entières de x:

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_{m-1} z + A_m = 0.$$

Comme l est l'exposant avec lequel chacun des facteurs binômes de ξ_i figure dans le polynôme $R(x)$, cette équation est celle que concerne le lemme établi plus haut.

Si aucune racine de l'équation $\xi_i = 0$ n'annule A_0, les in_i valeurs de y qui correspondent aux n_i racines de cette équation seront toutes des fonctions uniformes aux environs des points critiques où elles deviennent égales: la partie correspondante de la somme $\Sigma(r - 1)$ sera nulle.

Si, au contraire, toutes les racines de l'équation $\xi_i = 0$ annulent les coefficients des i premiers termes de l'équation en z, aucune des in_i racines y qui correspondent aux racines considérées n'est fonction uniforme de x aux environs de points critiques où ces racines deviennent égales.

Ce sont là deux cas extrêmes: dans le cas général, on formera par la méthode du plus grand commun diviseur diverses équations

$$\xi_0' = 0,\ \xi_1' = 0,\ \ldots,\ \xi_h' = 0,\ \ldots,\ \xi_{i-2}' = 0,\ \xi_i' = 0,$$

telles, qu'en tout point critique donné par l'équation $\xi_h' = 0$, h racines y, et h seulement, soient uniformes.

6. Nous sommes ainsi ramenés à traiter l'équation $\xi_h' = 0$. Il peut arriver qu'on sache trouver ses racines: soit a l'une d'elles; $b = \varphi(a)$ sera l'ordonnée du point multiple correspondant. Si, ayant transporté l'origine au point $x = a$, $y = b$, on peut effectuer les résolutions d'équations qu'exige la méthode pour obtenir les systèmes circulaires, on aura la partie de la somme $\Sigma(r - 1)$ qui correspond aux racines de l'équation $\xi_h' = 0$. Si l'on ne peut pas effectuer ces résolutions d'équations, on posera $(x - a)^{\frac{1}{2}} = x'$ ou bien $x = a + x'^2$, et l'on cherchera combien de racines y sont fonctions uniformes de x' aux environs du point $x' = 0$, c'est-à-dire combien de racines y sont fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{2}}$. Pour cela, on n'aura qu'à calculer la dérivée $\frac{d^k y}{dx'^k}$ (k étant le plus petit entier supérieur à $2\frac{l}{2}$ ou l)

définie par l'équation $f(a + x'^2, y) = 0$, et à éliminer y entre l'équation qui fournit cette dérivée et l'équation $f(a + x'^2, y) = 0$. On obtiendra ainsi une équation du degré m qui aura, pour $x' = 0$, un certain nombre $i - n_2'$ de racines infinies: en vertu du lemme établi au n° 3, n_2' des i racines y qui deviennent égales pour $x = a$ sont des fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{2}}$; mais dans ce nombre figurent les h racines qui sont des fonctions uniformes de $x - a$; il reste donc $n_2' - h$ racines y qui ne sont pas des fonctions uniformes de $(x - a)$, mais sont des fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{2}}$; leur nombre est nécessairement nul ou pair: elles se distribuent en $\frac{n_2' - h}{2}$ systèmes circulaires formés chacun de deux racines.

Si l'on n'a pas obtenu, par cette opération, toutes les i racines y qui deviennent égales au point $x = a$ (c'est-à-dire si l'on n'a pas $i - n_2' = 0$), on posera $(x - a)^{\frac{1}{3}} = x'$, et, désignant par k le plus petit entier supérieur à $\frac{3l}{2}$, on formera l'équation entre x' et $\frac{d^k x}{dx'^k}$: par ce moyen on comptera combien de racines y sont des fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{3}}$, ou, ce qui revient au même, combien de racines y se distribuent autour du point $x = a$ en systèmes circulaires formés de trois racines.

Si par ces deux opérations, on n'a pas obtenu toutes les i racines y qui deviennent égales au point $x = a$, on posera $(x - a)^{\frac{1}{4}} = x'$, et désignant par k le plus petit entier supérieur à $\frac{4l}{2}$ (c'est-à-dire $2l + 1$), on formera l'équation qui lie x' et $\frac{d^k y}{dx'^k}$. On trouvera que $i - n_4'$ valeurs de y sont des fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{4}}$. Mais dans ce nombre figurent les n_2'-racines qui sont des fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{2}}$: il reste donc $n_4' - n_2'$ racines qui ne sont pas des fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{2}}$, mais tout des fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{4}}$. Elles se distribuent en $\frac{n_4' - n_2'}{4}$ systèmes circulaires formés chacune de quatre racines.

En continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait posé, s'il y a lieu, $(x - a)^{\frac{1}{i - k - 1}} = x'$ et formé l'équation en $\frac{d^k y}{dx'^k}$ correspondante, on

déterminera tous les systèmes circulaires formés par les i valeurs de y qui deviennent égales au point $x = a$, et l'on connaîtra la partie de la somme $\Sigma(r-1)$ qui correspond à ce point critique.

7. Etudions maintenant le cas où l'on ne saurait pas résoudre l'équation $\xi_h' = 0$. Désignons par a l'une de ses racines, et posons $(x-a)^{\frac{1}{n}} = x'$ ou bien $x = a + x'^n$. Soit k le plus petit entier supérieur à $\frac{nl}{2}$. La dérivée $z = \frac{d^k y}{dx'^k}$ est une fonction linéaire de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^k y}{dx^k}$, dont les coefficients dépendent de x'. L'équation $f(x, y) = 0$ permet d'exprimer $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx_2} \cdots \frac{d^k y}{dx^k}$ en fonction rationnelle de x et y. On aura donc z exprimé en fonction rationnelle de x', de x et de y. Cette expression de z a pour numérateur un polynôme entier en x, y et x', et pour dénominateur une puissance entière de $f_y'(x, y)$. Il suit de là que x, y et x' restant finis, z ne peut devenir infini que quand $f_y'(x, y)$ et par suite $R(x)$ est nul. Eliminant y au moyen de l'équation $f(x, y) = 0$, on arrive à une équation entre z, x et x'. Cette équation est du degré m en z.

Quand elle est mise sous forme entière, le coefficient de z^m, d'après ce qui vient d'être dit, ne dépend que de x et ne s'annule que pour des valeurs annulant le discriminant $R(x)$. Ce coefficient est donc de la forme $Q_m(x)[\xi_h'(x)]^{\alpha_m}$, le polynôme $Q_m(x)$ ne pouvant avoir d'autres racines que les valeurs de x qui annulent $R(x)$ sans annuler ξ_h' *). Le coefficient de z^{m-i} sera de la forme $Q_{m-i}(x)[\xi_h'(x)]^{\alpha_{m-i}} P_{m-i}(x, x')$, $Q_{m-i}(x)$ étant un polynôme défini comme $Q_m(x)$, et $P_{m-i}(x, x')$ une fonction entière de x et de x'.

D'après cela, l'équation qui lie z et x', se déduisant de la précédente par le changement de x en $a + x'^n$, se mettra sous la forme

$$Q_m(a+x'^n)\left[\xi_h'(a) + x'^n \frac{d\xi_h'}{da} + \frac{x'^{2n}}{1\cdot 2}\frac{d^2\xi_h'}{da^2} + \cdots\right]^{\alpha_m} z^m$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=m} Q_{m-i}(a+x'^n)\left[\xi_h'(a) + x'^n \frac{d\xi_h'}{da} + \frac{x'^{2n}}{1\cdot 2}\frac{d^2\xi_h'}{da^2} + \cdots\right]^{\alpha_{m-i}}$$

$$\cdot P_{m-i}(a + x'^n, x')\, z^{m-i} = 0.$$

*) En fait, ce coefficient pourrait être un produit tel que $Q_m(x)[\zeta_1(x)]^{\alpha_m}[\zeta_2(x)]^{\beta_m}[\zeta_3(x)]^{\gamma_m}\cdots$, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots$ étant des diviseurs de ξ_h'. Ce qui suit s'applique alors sans modification, en faisant représenter successivement au symbole ξ_h' qui figure dans le texte les divers polynômes $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \cdots$, et aux symboles $Q_{m-i}(x)$ les produits $Q_{m-i}(x)[\zeta_1(x)]^{\alpha_m - i}[\zeta_2(x)]^{\beta_m - i}[\zeta_3(x)]^{\gamma_m - i}\cdots$, divisés successivement par $[\zeta_1(x)]^{\alpha_m - i}$, $[\zeta_2(x)]^{\beta_m - i}\cdots$ etc.

Si l'on fait représenter à a l'une quelconque des racines de l'équation $\xi_h' = 0$ le premier terme écrit ci-dessus devient

$$x'^{n\alpha_m} Q_m(a + n'^n)\left[\frac{d\xi_h'}{da} + \frac{x'^n}{1\cdot 2}\frac{d^2\xi_h'}{da^2} + \cdots\right]^{\alpha_m} z^m.$$

Comme l'équation $\xi_h' = 0$ n'a que des racines simples, $\frac{d\xi_h'}{da}$ est différent de zéro. Donc si l'on fait $x' = 0$, la quantité entre parenthèses ne s'annulera pas. De plus, $Q_m(a)$ est différent de zéro. D'où cette conclusion: quand on fait $x' = 0$ et qu'on prend pour a l'une quelconque des racines de l'équation $\xi_h' = 0$, le coefficient de z^m ne s'annule que par le fait du facteur $x'^{n\alpha_m}$. Cette conclusion subsiste, abstraction faite des polynômes P, pour les coefficients de toutes les autres puissances de z.

Nous avons à nous occuper des racines infinies que peut acquérir l'équation en z considérée, quand x' est nul et que a prend les diverses valeurs qui annulent ξ_h'. Dans cette hypothèse on peut écrire plus simplement l'équation en z, de la manière suivante

$$\mathrm{A}^{\alpha_m} Q_m(a)\, x'^{n\alpha_m} z^m + \sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{A}^{\alpha_{m-i}} Q_{m-i}(a) x'^{n\alpha_{m-i}} P_{m-i}(a + x'^n, x') z^{m-i} = 0$$

en désignant par A la dérivée $\frac{d\xi_h'}{da}$, qui est différente de zéro, ainsi que tous les polynômes $Q(a)$. Nous avons laissé figurer x' dans les termes qui s'annulent avec x' et dans les polynômes P. Ordonnons ces polynômes par rapport aux puissances croissantes de x'. Chaque puissance de x' aura pour coefficient un polynôme entier en a.

On cherchera les diviseurs comment à ξ_h' et à ces divers polynômes. Soit $\chi(a)$ un polynôme qui divise ξ_h' et certains de ces coefficients. Attribuons à a l'une des valeurs qui annulent $\chi(a)$. Certains termes disparaissent dans les coefficients des puissances telles que z^{m-i}, et ces puissances de z se trouvent multipliées par des puissances de x'. Si une même puissance de x' multiplie tous les termes de l'équation, ou la supprime.

Si cette puissance de x' est précisément $x'^{n\alpha_m}$, le coefficient de z^m ne s'annule plus avec x'. On en conclut que, pour toutes les racines de l'équation $\chi(a) = 0$, z reste fini, c'est-à-dire que les i valeurs de y qui deviennent égales en chacun des points $x = a$, a étant une racine quelconque de l'équation $\chi(a) = 0$, sont aux environs de ces points des fonctions uniformes de $(x - a)^{\frac{1}{n}}$.

Si des puissances de x' restent en facteur dans les s premiers termes de l'équation en z, s valeurs de z deviennent infinies pour $x' = 0$: c'est à dire que s des i valeurs de y qui deviennent égales

en chacun des points $x = a$ pour lesquels $\chi(a)$ est nul sont aux environs de ces points des fonctions non uniformes de $(x-a)^{\frac{1}{n}}$. Par suite, $i-s$ de ces valeurs sont des fonctions uniformes de $(x-a)^{\frac{1}{n}}$.

En donnant à n successivent les valeurs $2, 3 \ldots$ jusqu'à $i-h-1$ s'il y a lieu, et tenant compte des règles posées dans ce n° et dans le n° 6, on déterminera tous les systèmes circulaires formés par les racines y qui deviennent égales aux points critiques donnés par l'équation $\xi_h' = 0$.

En réunissant toutes les parties de la somme $\Sigma(r-1)$ relatives aux diverses équations $\xi_h' = 0$, on obtiendra la partie de cette somme relative à l'équation $\xi_i = 0$. On réunira les parties relatives aux diverses équations $\xi_i = 0$, ce qui donnera la partie relative à l'équation $X_i = 0$. Réunissant enfin les parties relatives aux diverses équations $X_i = 0$ avec la partie relative à l'équation $X_1 = 0$, on aura la somme cherchée $\Sigma(r-1)$, et le genre sera fourni par la relation posée au début

$$2(p+m-1) = \Sigma(r-1).$$

8. *Conclusion.* — La méthode qui vient d'être exposée permet de trouver le genre de toutes les courbes algébriques, quelles que soient leurs singularités. Cette méthode ne comporte qu'un nombre limité d'opérations, qui sont toutes possibles, puisque ce sont de simples divisions et éliminations. Mais elle peut conduire à des calculs très longs. C'est pourquoi, si quelques-unes des opérations partielles que nous avons indiquées peuvent être remplacées par les opérations correspondantes de la méthode connue pour obtenir les systèmes circulaires, on suivra de préférence cette dernière méthode. D'ailleurs en faisant des applications de notre méthode, on y apportera facilement les simplifications que suggèrent les exemples à traiter. Pour ne pas allonger d'avantage cette Note, je ne donnerai aucun exemple. On en trouvera plusieurs dans les *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* t. XII, 1883; p. 168 et suivantes.

Paris, 20. Décembre 1883.

Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form.

Von

F. Klein in Leipzig.*)

Ein Liniencomplex des n. Grades umfasst eine dreifach unendliche Anzahl gerader Linien, welche im Raume in einer solchen Art vertheilt sind, dass diejenigen geraden Linien, welche durch einen festen Punkt gehen, einen Kegel der n. Ordnung bilden, oder, was dasselbe sagt, dass diejenigen geraden Linien, welche in einer festen Ebene liegen, eine Curve der n. Classe umhüllen.

Seine analytische Darstellung findet ein derartiges Gebilde durch die von Pluecker in die Wissenschaft eingeführten Coordinaten der geraden Linie im Raume**). Nach Pluecker erhält die gerade Linie

---

*) Anschliessend an den Wiederabdruck einiger meiner älteren Arbeiten in Bd. XXII dieser Annalen publicire ich hier erneut meine Inauguraldissertation (Bonn, 1868), eine Mittheilung von Lie und mir an die Berliner Akademie vom Dec. 1870 (siehe Monatsberichte) und eine Note über Differentialgleichungen dritter Ordnung, welche ich vor Jahresfrist der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vorlegte (letztere Note mit einem nun erst hinzugefügten Anhange). Die Mathematischen Annalen enthalten hiermit die Gesammtheit meiner bisherigen Publicationen mit alleiniger Ausnahme der wenigen, die gesondert im Buchhandel erschienen sind, und solcher vorläufiger Mittheilungen, die durch spätere Ausführung überflüssig geworden sind. — Zusätze, welche ich beim Wiederabdrucke hinzugefügt habe, sind wieder (wie in Bd. XXII) durch das in eckiger Klammer beigesetzte Datum [Januar 1884] bezeichnet worden; beim Wiederabdruck meiner Dissertation sind einige Incorrectheiten beseitigt worden, auf welche mich Hr. Segre (Turin) aufmerksam zu machen die Güte hatte.

Klein. [Jan. 1884].

**) Proceedings of the Royal Soc. 1865; Phil. Transactions 1865, p. 725, übersetzt in Liouv. Journal, 2. Série, t. XI; Les Mondes, par Moigno, 1867, p. 79; Annali di matematica, Ser. II, t. I; Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, erste Abtheilung, Leipzig 1868, bei B. G. Teubner. (Man vgl. hierzu die historischen Notizen über Ent-

sechs homogene Coordinaten, welche eine Bedingungsgleichung zweiten Grades erfüllen. Vermöge derselben wird die gerade Linie mit Bezug auf ein Coordinatentetraeder bestimmt. Eine homogene Gleichung des n. Grades zwischen diesen Coordinaten stellt einen Complex des n. Grades dar.

In dem Folgenden ist es unsere Absicht, die Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten, einer Verwandlung des Coordinatentetraeders entsprechend, auf eine canonische Form zu transformiren. Wir geben zunächst die allgemeinen Formeln, welche bei einer derartigen Transformation überhaupt in Anwendung kommen. Auf Grund derselben behandelt sich das Problem algebraisch als die simultane lineare Transformation der Complexgleichung auf eine canonische Gestalt und der Bedingungsgleichung des zweiten Grades, welcher die Liniencoordinaten genügen müssen, in sich selbst. Bei der Durchführung dieser Transformation gelangen wir insbesondere zu einer Eintheilung der Complexe des zweiten Grades in unterschiedene Arten.

I.

Ueber Liniencoordinaten im Allgemeinen.

1. Wenn wir die homogenen Coordinaten zweier, beliebig auf einer gegebenen geraden Linie angenommener Punkte bezüglich mit

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

und

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

bezeichnen, so erhält die gegebene gerade Linie, welche geometrisch als Verbindungslinie der beiden Punkte (x) und (y) bestimmt ist, *die folgenden sechs, ebenfalls homogenen Coordinaten:*

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1 = x_1y_2 - x_2y_1, & p_4 = x_3y_4 - x_4y_3, \\ p_2 = x_1y_3 - x_3y_1, & p_5 = x_4y_2 - x_2y_4, \\ p_3 = x_1y_4 - x_4y_1, & p_6 = x_2y_3 - x_3y_2. \end{cases}$$

Es sind dies die aus den Elementen

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}$$

---

stehung der Liniengeometrie, welche Clebsch in den Göttinger Abhandlungen von 1872 gegeben hat [Zum Gedächtniss an Julius Pluecker]. Denselben zufolge hat Pluecker seine ersten bez. Ideen 1846 im „Systeme der Geometrie des Raumes" [n. 258] veröffentlicht; aber schon vorher treten, in allerdings ganz anderer Form, die Coordinaten der Raumgeraden in Grassmann's linealer Ausdehnungslehre (Erste Auflage 1844) auf. Man vergleiche ferner Cayley: On a new analytical representation of curves in space (Quarterly Journal, t. III, 1859).

[Jan. 1884].

gebildeten sechs Determinanten zweiten Grades, mit einem derartigen Zeichen genommen, dass eine Verticalreihe der Elemente (in unserer Annahme die erste) ausgezeichnet auftritt.

Zu Folge der Determinantenform behalten die sechs gewählten Coordinaten dieselben relativen Werthe, wenn wir an die Stelle der angenommenen beiden Punkte (x) und (y) irgend zwei andere Punkte der gegebenen geraden Linie setzen. Denn die Coordinaten eines beliebigen solchen Punktes lassen sich auf die Form bringen:

$$\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_4 + \mu y_4,$$

wo λ, μ näher zu bestimmende Constanten bezeichnen, und die Substitution solcher Grössen an Stelle der x und y in die für die Coordinaten p gegebenen Ausdrücke liefert, wie sich sofort ergiebt, Multipla der für die p ursprünglich erhaltenen Werthe.

Die sechs Coordinaten p befriedigen identisch die folgende Relation des zweiten Grades:

$$P \equiv p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0,$$

welche wir auch so schreiben können:

$$\sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3} = 0,$$

indem wir den Index $\varkappa$ von 1 bis 3, oder auch von 1 bis 6 laufen lassen, und dabei unter $\varkappa + 3$ diejenige Zahl verstehen, welche in der continuirlichen Reihenfolge:

$$1, 2, \ldots, 5, 6, 1, 2, \ldots$$

die $(\varkappa + 3)$. Stelle einnimmt.

Vermöge dieser Relation, welcher die *sechs* homogenen Coordinaten p genügen, vertreten dieselben die zu der Bestimmung einer geraden Linie nothwendigen *vier* Constanten.

Für die Gleichungen derjenigen vier Ebenen (Projectionsebenen), welche sich durch die vermöge der beiden Punkte (x) und (y) bestimmte gerade Linie und bezüglich die vier Eckpunkte des Coordinatentetraeders hindurch legen lassen, erhalten wir die folgenden:

$$(2) \qquad \begin{cases} p_4 z_2 + p_5 z_3 + p_6 z_4 = 0, \\ p_4 z_1 - p_3 z_3 + p_2 z_4 = 0, \\ p_5 z_1 + p_3 z_2 - p_1 z_4 = 0, \\ p_6 z_1 - p_2 z_2 + p_1 z_3 = 0, \end{cases}$$

wo wir mit $z_1, \ldots, z_4$ laufende Punktcoordinaten bezeichnen. Es sind somit die Coordinaten p die in die Gleichungen der vier Projectionsebenen eingehenden Constanten. Die Gleichung:

$$P = 0$$

drückt aus, dass sich die fraglichen vier Ebenen nach derselben geraden Linie schneiden. Sie ist also nicht nur die *nothwendige*, sondern auch die *hinreichende* Bedingung, damit sechs beliebig ausgewählte Grössen:

$$p_1, p_2, \cdots, p_6$$

als Liniencoordinaten betrachtet werden können. Die geometrische Construction der durch sie bestimmten geraden Linie wird durch zwei beliebige der Ebenen (2) vermittelt.

Der Coordinatenbestimmung (1) liegt das Princip zu Grunde, die in die Gleichungen der geraden Linie in Punktcoordinaten (2) eingehenden Constanten als Bestimmungsstücke derselben zu betrachten, und dieselben durch die Coordinaten einer Anzahl von Punkten der geraden Linie darzustellen, welche erforderlich und hinreichend ist, um die letztere geometrisch zu definiren.

2. In dem Vorstehenden haben wir die gerade Linie durch zwei ihrer Punkte bestimmt. Wir betrachten in dieser Bestimmungsweise die gerade Linie als einen Ort von Punkten, als einen *Strahl*. Auf vollständig entsprechende Weise können wir die gerade Linie durch zwei ihrer Ebenen bestimmen und betrachten sie dann als von Ebenen umhüllt, als eine *Axe**).

Zwei beliebige Ebenen (t) und (u) der gegebenen geraden Linie seien durch die Coordinaten bestimmt:

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad t_4,$$

und

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4.$$

Dann erhalten wir, ganz dem Früheren entsprechend, als *Coordinaten der gegebenen geraden Linie die folgenden sechs Ausdrücke:*

$$(3) \qquad \begin{cases} q_1 = t_1 u_2 - t_2 u_1, & q_4 = t_3 u_4 - t_4 u_3, \\ q_2 = t_1 u_3 - t_3 u_1, & q_5 = t_4 u_2 - t_2 u_4, \\ q_3 = t_1 u_4 - t_4 u_1, & q_6 = t_2 u_3 - t_3 u_2, \end{cases}$$

welche die folgende Gleichung:

$$Q \equiv \sum_{\varkappa} q_\varkappa \cdot q_{\varkappa+3} = 0$$

identisch befriedigen. Den vier Gleichungen (2) entsprechend erhalten wir für die Durchschnittspunkte der durch die Ebenen (t) und (u) bestimmten geraden Linie mit den vier Seitenflächen des Tetraeders die folgenden vier Gleichungen:

---

*) Vergl. Pluecker's „Neue Geometrie", p. 1.

$$(4)\qquad \begin{cases} q_4 v_2 + q_5 v_3 + q_6 v_4 = 0, \\ q_4 v_1 - q_3 v_3 + q_2 v_4 = 0, \\ q_5 v_1 + q_3 v_2 - q_1 v_4 = 0, \\ q_6 v_1 - q_2 v_2 + q_1 v_3 = 0, \end{cases}$$

wo $v_1, \ldots, v_4$ laufende Ebenencoordinaten bedeuten.

Wenn sich die Strahlencoordinaten p und die Axencoordinaten q auf *dieselbe* gerade Linie beziehen, so hat man zwischen denselben die folgenden Proportionen:

$$(5)\qquad \frac{p_1}{q_4} = \frac{p_2}{q_5} = \frac{p_3}{q_6} = \frac{p_4}{q_1} = \frac{p_5}{q_2} = \frac{p_6}{q_3}.$$

Die Richtigkeit dieser Beziehungen ergiebt sich sofort, wenn wir die Grössen q aus den Coordinaten zweier Ebenen (2) oder die Grössen p aus den Coordinaten zweier Punkte (4) bilden.

Die Coordinaten p sind also von den Coordinaten q nur durch die Anordnung verschieden. Ihrer doppelten geometrischen Bedeutung entsprechend, wird die gerade Linie durch dieselben sechs Grössen dargestellt. Es ist das nicht der geringste Vortheil der Pluecker'schen Coordinatenwahl.

3. Wir wollen die vier Eckpunkte des Coordinatentetraeders mit

$$O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4$$

und die vier gegenüberstehenden Seitenflächen desselben mit

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$$

bezeichnen. Dann sind die sechs Kanten des Tetraeders durch die folgenden Verbindungen der Zeichen O, bez. E bestimmt:

$$O_1 O_2,\ O_1 O_3,\ O_1 O_4,\ O_3 O_4,\ O_4 O_2,\ O_2 O_3,$$
$$E_3 E_4,\ E_4 E_2,\ E_2 E_3,\ E_1 E_2,\ E_1 E_3,\ E_1 E_4.$$

Von den *sechs* Coordinaten einer Kante des Coordinatentetraeders verschwinden fünf, und nur die sechste behält einen endlichen Werth. Es ergiebt sich das sofort, wenn wir in die Ausdrücke (1) oder (3) die Coordinaten zweier Eckpunkte, bez. zweier Seitenflächen des Tetraeders substituiren. Wir wollen, in der vorstehenden Reihenfolge, die Kanten des Coordinatentetraeders mit

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6$$

oder mit

$$Q_4,\ Q_5,\ Q_6,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3$$

bezeichnen. Dann verschwinden für eine beliebig ausgewählte Kante ($P_\varkappa \equiv Q_{\varkappa+3}$) alle Coordinaten bis auf diejenige, welche wir mit $p_\varkappa \equiv q_{\varkappa+3}$ bezeichnet haben.

Die Gruppirung der Tetraederkanten unter sich ist dadurch bestimmt, dass sich P_1, P_2, P_3 (Q_4, Q_5, Q_6) in einem Punkte schneiden, während P_4, P_5, P_6 (Q_1, Q_2, Q_3) in einer Ebene liegen.

Der Kürze wegen werden wir in dem Folgenden nur von der independenten Darstellung der Liniencoordinaten durch Punktcoordinaten Gebrauch machen, und die jedesmal vollständig analogen (reciproken) Entwickelungen, welche sich an die Darstellung derselben durch Ebenencoordinaten anknüpfen, nicht immer wieder ausdrücklich hervorheben. Wir bedienen uns daher in der Folge auch nur der Bezeichnung p für Liniencoordinaten, wenn auch die Beibehaltung der Coordinaten q neben den Coordinaten p manche Formeln übersichtlicher zu schreiben erlaubt.

4. Damit sich zwei gegebene gerade Linien (p) und (p') *schneiden*, müssen ihre Coordinaten die folgende Gleichung befriedigen:

$$\sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p'_{\varkappa+3} = 0. \tag{6}$$

Denn es seien die beiden geraden Linien (p) und (p') bezüglich durch die beiden Punkte (a), (b) und (c), (d) bestimmt. Wenn wir dann in die vorstehende Gleichung für die Coordinaten p, p' ihre Werthe aus (1) in den Coordinaten dieser Punkte einsetzen, so erhalten wir:

$$\sum \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = 0.$$

Das Verschwinden dieser Determinante ist die Bedingung dafür, dass die vier Punkte (a), (b), (c), (d) in einer Ebene liegen; und also schneiden sich die beiden geraden Linien (a, b) und (c, d)*).

Wenn wir in der Gleichung (6):

$$\sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p'_{\varkappa+3} = 0$$

die $p'_{\varkappa+3}$ als fest, die $p_\varkappa$ als veränderlich betrachten, so stellt sie die Gesammtheit aller derjenigen geraden Linien dar, welche die feste gerade Linie (p') schneiden. Insbesondere also genügen der Gleichung:

$$p_{\varkappa+3} = 0$$

die Coordinaten aller derjenigen geraden Linien, welche die Coordinatenkante $P_\varkappa$ schneiden. Wenn für die Kante $P_\varkappa$ selbst alle Coordinaten bis auf die eine, $p_\varkappa$, verschwinden, so ist damit ausgedrückt, dass sie alle Tetraederkanten bis auf die ihr gegenüberliegende schneidet.

Wenn drei gerade Linien (p), (p'), (p'') einander gegenseitig schneiden, so besteht zwischen den Coordinaten je zweier derselben eine Gleichung von der Form (6). Dabei gehen die drei geraden Linien entweder durch einen Punkt oder liegen in einer Ebene. Das Kriterium für den ersten oder zweiten Fall bildet das Verschwinden

*) Vergl. den Aufsatz von Lüroth: Zur Theorie der windschiefen Flächen, Crelle's Journal, LXII. p. 130.

des zweiten oder ersten Factors des unter der gemachten Annahme immer verschwindenden Productes:

$$\sum \pm p_1 p_2' p_3'' \cdot \sum \pm p_4 p_5' p_6'',$$

und der ähnlich gebildeten Producte, welche sich aus dem vorstehenden durch Vertauschung von jedesmal zwei der Indices 1, 2, 3 mit den entsprechenden 4, 5, 6 ergeben.

Den Beweis liefert die Betrachtung der Gleichungen (2) und (4). Wenn sich drei Linien in einem Punkte schneiden, so haben diejenigen drei Ebenen, welche sich durch einen Eckpunkt des Coordinatentetraeders und jedesmal eine der gegebenen geraden Linien hindurchlegen lassen, eine gerade Linie gemein, und umgekehrt, wenn drei Linien in einer Ebene liegen, so sind diejenigen drei Punkte, in welchen eine Seitenfläche des Coordinatentetraeders von den gegebenen geraden Linien geschnitten wird, in gerader Linie.

5. Wir können den sechs Variabeln p, immer unter der Voraussetzung, dass die Bedingungsgleichung

$$\sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3} = 0$$

erfüllt sei, *imaginäre Werthe* ertheilen. Sei also:

$$p_\varkappa = p_\varkappa' + i p_\varkappa''.$$

Wir betrachten die Grössen $p_\varkappa$ als *die Coordinaten einer imaginären geraden Linie.* Diese rein formelle Definition führt zu der folgenden geometrischen. Nach der Gleichung (6) der 4. Nummer wird die gegebene imaginäre gerade Linie, sowie die conjugirt imaginäre von allen reellen geraden Linien geschnitten, deren Coordinaten die folgenden beiden linearen Bedingungsgleichungen befriedigen:

$$\sum_{\varkappa} p_\varkappa' \cdot p_{\varkappa+3} = 0, \quad \sum_{\varkappa} p_\varkappa'' \cdot p_{\varkappa+3} = 0.$$

Durch vier beliebige unter den Linien, deren Coordinaten diesen beiden Gleichungen genügen*), sind die beiden Gleichungen, oder vielmehr ist die von denselben gebildete zweigliedrige Gruppe:

$$\sum_{\varkappa} (\lambda p_\varkappa' + \mu p_\varkappa'') p_{\varkappa+3} = 0$$

bestimmt (ausser, wenn die angenommenen vier geraden Linien derselben Erzeugung eines Hyperboloids angehören.) Eine imaginäre

*) Das System solcher gerader Linien findet man insbesondere betrachtet in dem Aufsatze von O. Hermes: Ueber Strahlensysteme der ersten Ordnung und der ersten Classe. Crelle's Journal LXII, p. 153.

gerade Linie und ihre conjugirte sind somit geometrisch *als die beiden geradlinigen Transversalen vier reeller gerader Linien gegeben.*

Es stimmt das mit der Definition, welche die neuere synthetische Geometrie für die imaginäre gerade Linie im Raume aufstellt, überein.

Im Allgemeinen besitzt eine imaginäre gerade Linie keinen reellen Punkt und keine reelle Ebene. Nur wenn sich die gegebene imaginäre gerade Linie und ihre conjugirte schneiden, ist beiden ein reeller Punkt und eine reelle Ebene gemeinsam. Die imaginäre gerade Linie wird dann von allen reellen Linien geschnitten, welche durch diesen Punkt gehen, bezüglich in dieser Ebene liegen. Sie ist nicht mehr durch vier ihrer reellen geradlinigen Transversalen bestimmt. Man definire sie geometrisch durch den reellen Punkt, die reelle Ebene und einen von dem reellen Punkte ausgehenden Kegel der zweiten Ordnung, oder eine in der reellen Ebene liegende Curve der zweiten Classe.

II.

Transformation der Liniencoordinaten, entsprechend einer Verwandlung des Coordinatentetraeders.

6. In dem Folgenden stellen wir zunächst diejenigen Transformationsformeln für Liniencoordinaten auf, welche einer Verwandlung des Coordinatentetraeders, oder, was dasselbe sagt, der linearen Transformation von Punkt- oder Ebenencoordinaten entsprechen*).

Diese Transformationsformeln werden *linear*. Sie würden ihren linearen Charakter verlieren, wenn statt der sechs homogenen Coordinaten, welche eine Bedingungsgleichung befriedigen, deren nur fünf unabhängige genommen worden wären, wie sie zur Bestimmung einer geraden Linie ausreichen. — Wir gelangen zu dem Resultate, *dass die in Rede stehenden linearen Substitutionen die allgemeinen sind, durch welche der Ausdruck:*

$$P = \sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3}$$

in ein Multiplum seiner selbst übergeführt wird.

Der vorstehende Satz bedarf noch der folgenden Bestimmung.

---

*) Man vergleiche die beiden Aufsätze von Battaglini:

Intorno ai sistemi di rette di primo ordine; Rendiconto della R. Accademia di Napoli, 6. Giugno 1866.

Intorno ai sistemi di rette di secondo grado; Atti della R. Accademia di Napoli, III, 1866.

Beide Aufsätze finden sich wieder abgedruckt: Giornale di Matematiche, Napoli. Anno VI, 1868.

Es sei eine lineare Substitution gegeben, welche den Ausdruck P in ein Multiplum seiner selbst überführt. Unter den sechs neuen Veränderlichen können wir diejenige frei auswählen, welcher wir den Namen p_1 geben wollen. Dann ist die Veränderliche p_4 zugleich mit bestimmt. Wir können ferner p_2 ohne Weiteres unter den noch übrigen vier Veränderlichen annehmen; dann ist p_5 gegeben. Welche von den zwei noch übrigen Variabeln p_3 und welche p_6 zu nennen sei, bleibt aber nicht mehr willkürlich. Denn diejenige Kante des neuen Tetraeders, auf welche sich das neue p_3 bezieht, schneidet die beiden Kanten, welche den neuen p_1 und p_2 entsprechen, in einem Punkte und ist also eindeutig bestimmt. (*n.* 3). Nur unter der Voraussetzung, dass p_3 demgemäss ausgewählt sei, gelten die Ausdrücke der Liniencoordinaten in den Coordinaten zweier Punkte, bez. zweier Ebenen, wie sie unter (1) und (3) gegeben worden sind.

Es sei, unter $x_\varkappa$, $y_\varkappa$ Punktcoordinaten verstanden,

$$(7) \quad \begin{cases} x_\varkappa = \sum_\varkappa \alpha_{\varkappa,\lambda} \cdot x'_\lambda, \\ y_\varkappa = \sum_\varkappa \alpha_{\varkappa,\lambda} \cdot y'_\lambda, \end{cases}$$

eine allgemeine lineare Substitution, wie sie einer beliebigen Verwandlung des Coordinatentetraeders entspricht. Die Substitutionscoëfficienten $\alpha_{\varkappa,\lambda}$ stellen dabei die Coordinaten der Seitenflächen des früheren Tetraeders mit Bezug auf das neue dar; wie sich ergiebt, wenn wir $x_\varkappa (y_\varkappa)$ verschwinden lassen.

Durch Einsetzen dieser Werthe für $x_\varkappa$, $y_\varkappa$ in die durch (1) gegebenen Ausdrücke für die Liniencoordinaten p erhalten wir die gesuchten Formeln. Die in dieselben eingehenden Substitutionscoëfficienten erhalten die Determinantenform:

$$\alpha_{\varkappa,\mu} \cdot \alpha_{\lambda,\nu} - \alpha_{\varkappa,\nu} \cdot \alpha_{\lambda,\mu}$$

und stellen also, geometrisch gedeutet, die *Coordinaten der Kanten des früheren Tetraeders mit Bezug auf das neue* dar, in einer solchen Grösse genommen, wie sich dieselben unter Zugrundelegung der Formeln (3) aus den Coordinaten $\alpha_{\varkappa,\lambda}$ der Seitenflächen des früheren Tetraeders mit Bezug auf das neue ergeben. Indem wir dieselben mit $a_{\varkappa,\lambda}$ bezeichnen, je nachdem sie zu einer Kante $P_\varkappa$ gehören und unter den Coordinaten dieser Kante, wenn wir dieselben in der unter (1) festgesetzten Reihenfolge schreiben, die λte Stelle einnehmen, werden die gesuchten Transformationsformeln:

$$(8) \qquad p_\varkappa = \sum_\lambda a_{\varkappa+3,\lambda+3} \cdot p'_\lambda.$$

Denn verlangen wir, dass $p_\varkappa$ verschwinde, das heisst, dass die gerade

Linie (p, p') die Kante P_{x+3} schneide, so ist dafür, nach der vierten Nummer, das Verschwinden des Ausdrucks:

$$\sum_{\lambda} a_{x+3,\lambda+3} \cdot p'_{\lambda}$$

die Bedingung.

7. Durch die Substitution (8) wird der identisch verschwindende Ausdruck:

$$P \equiv \sum_{x} p_x \cdot p_{x+3}$$

in ein Multiplum des entsprechenden:

$$P' \equiv \sum_{x} p'_x \cdot p'_{x+3}$$

übergeführt. Wenn wir den ersten Ausdruck aus (8) bilden und mit dem zweiten vergleichen, so erhalten wir eine Reihe von Relationen für die Coëfficienten a, welcher dieselben, vermöge ihrer Darstellung durch die Coëfficienten α, identisch genügen.

Die wirkliche Entwicklung des Ausdruckes P nach den p' liefert in diesen Variabeln ein Polynom des zweiten Grades mit 21 Gliedern. Die Coëfficienten von 18 dieser Glieder müssen verschwinden, die der übrigen drei unter sich gleich werden. Die 36 Grössen a sind somit 20 Bedingungen unterworfen und desshalb durch die 16 Grössen α independent darstellbar. Nach diesen Zahlenverhältnissen kommt es auf dasselbe hinaus, ob wir den Ausdruck der Liniencoordinaten durch Punkt- (oder Ebenen-) Coordinaten zu Grunde legen und diese letzteren linear transformiren, oder ob wir die Liniencoordinaten selbst unmittelbar linear transformiren und bedingen, dass dabei der Ausdruck:

$$P \equiv \sum_{x} p_x \cdot p_{x+3}$$

in ein Vielfaches seiner selbst übergehe. Die volle Bestätigung dieser Aussage finden wir in der geometrischen Deutung der Bedingungen, welchen die Substitutionscoëfficienten a zufolge der letzten Beschränkung unterworfen sind. Nur in der Benennung der neuen Veränderlichen muss, nach der vorigen Nummer, eine feste Regel beobachtet werden.

8. Sei also:

$$p_x = \sum_{\lambda} b_{x+3,\lambda+3} \cdot p'_{\lambda} \tag{9}$$

eine lineare Substitution, durch welche der Ausdruck:

$$P \equiv \sum_{x} p_x \cdot p_{x+3}$$

in ein Multiplum seiner selbst übergeführt wird. Dann gelten für die Coëfficienten b zunächst die folgenden Relationen:

$$(10) \qquad \sum_{\varkappa} b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot b_{\varkappa,\lambda+\mu} = 0 \ (\mu = 1, 2, 4, 5, 6),$$

$$(11) \qquad \sum_{\varkappa} b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot b_{\varkappa,\lambda+3} = d,$$

wo d eine willkürlich zu bestimmende Constante bezeichnet.

Zu Folge der Beziehungen (10) verschwinden die folgenden beiden Producte:

$$\sum \pm b_{11} b_{22} b_{33} \cdot \sum \pm b_{41} b_{52} b_{63}$$

und

$$\sum \pm b_{14} b_{25} b_{36} \cdot \sum \pm b_{44} b_{55} b_{66}.$$

Denn die Entwicklung dieser Producte nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten liefert eine neue dreigliedrige Determinante, für deren Elemente $(\varkappa, \lambda)$ das Gesetz gilt:

$$(\varkappa, \lambda) + (\lambda, \varkappa) = 0.$$

Wir fügen nun den Bedingungen (10) und (11) die weitere hinzu, dass die beiden vorstehenden Producte darum verschwinden, weil die beiden Factoren:

$$\sum \pm b_{41} b_{52} b_{63}, \qquad \sum \pm b_{14} b_{25} b_{36}$$

gleich Null sind. Und dem entsprechend sollen die ähnlich gebildeten Determinanten verschwinden, welche sich aus den vorstehenden durch Vertauschung von jedesmal zwei der ersten oder zweiten Indices 1, 2, 3 mit den entsprechenden 4, 5, 6 ergeben. Diese Bedingungen beschränken durchaus nicht die relative Grösse der Coëfficienten b, sondern nur die Willkürlichkeit in deren Reihenfolge.

Die Auflösung der Substitutionen (9) wird unter Zuziehung der Bedingungsgleichungen (10) die folgende:

$$(12) \qquad \sum_{\varkappa} b_{\varkappa,\lambda+3} \cdot b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot p'_\lambda = \sum_{\varkappa} b_{\varkappa,\lambda} \cdot p_\varkappa,$$

oder, unter Berücksichtigung der Gleichungen (11):

$$(13) \qquad d \cdot p'_\lambda = \sum_{\varkappa} b_{\varkappa,\lambda} \cdot p_\varkappa.$$

Indem wir von (13) zu (9) zurückgehen, ergeben sich, den Formeln (10) entsprechend, die folgenden:

$$(14) \qquad \sum_{\lambda} b_{\varkappa,\lambda+3} \cdot b_{\varkappa+\mu,\lambda} = 0. \quad (\mu = 1, 2, 4, 5, 6).$$

Wenn wir die Substitutionsdeterminante $\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \cdots b_{6,6}$ mit D, die einem beliebigen Elemente $b_{\varkappa,\lambda}$ zugehörige Unterdetermi-

nanten derselben, wie überhaupt im Folgenden die Unterdeterminanten, durch die beiden Indices $\varkappa$, λ ($D_{\varkappa,\lambda}$) bezeichnen und dabei das Vorzeichen richtig bestimmen: $((-1)^{(\varkappa+\lambda)})$, so folgt aus den Auflösungen (12) der Gleichungen (9):

$$D_{\varkappa,\lambda+3} \cdot \sum_{\varkappa} b_{\varkappa,\lambda+3} \cdot b_{\varkappa+3,\lambda} = b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot D.$$

Diese Formel bleibt für jeden Index $\varkappa$ und jeden Index λ gültig. Es findet sich also, bis auf einen Factor:

$$D = \prod_{(\lambda=1,2,3)} \sum_{\varkappa} b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot b_{\varkappa,\lambda+3}, \tag{15}$$

oder, in Folge von (11):

$$D = d^3. \tag{16}$$

Der Vergleich zweier Glieder der Entwicklung von D und des in (15) eingehenden Productes giebt den Beweis, dass der fragliche Factor der Einheit gleich sei.

Aus den Gleichungen (10) folgt, dass die Verticalreihen der Substitutionscoefficienten (9) die Liniencoordinaten der Kanten eines neuen Tetraeders mit Bezug auf das frühere darstellen. Denn diese Gleichung sagt aus, einmal, wenn wir $\mu = 6$ setzen, dass die Coefficienten einer Verticalreihe der Substitutionen (9) die Bedeutung von Liniencoordinaten haben, dann den vier anderen Werthen von μ entsprechend, dass eine jede der durch die Substitutionscoefficienten bestimmten sechs Linien vier der fünf übrigen schneidet, dass also die sechs dargestellten geraden Linien ein Tetraeder bilden.

Wir wollen die sechs Kanten dieses Tetraeders, den Coordinaten $b_{\varkappa,\lambda}$ entsprechend, mit P'_λ bezeichnen. Dann sagen die Bedingungen, welche wir den Gleichungen (10) und (11) über die Reihenfolge der Coefficienten $b_{\varkappa,\lambda}$ hinzugefügt haben, nichts anderes aus, als dass sich die drei Kanten P_1', P_2', P_3' in einem Punkte schneiden und die drei Kanten P_4', P_5', P_6' in einer Ebene liegen. Ausgeschlossen ist durch jene Bedingungen (falls die Substitutionsdeterminante $\Sigma \pm b_{1,1} \cdots b_{6,6}$ nicht verschwindet), dass P_1', P_2', P_3' in einer Ebene enthalten sind und P_4', P_5', P_6' durch einen Punkt gehen. Eine dieser beiden Möglichkeiten muss stattfinden. Im Verein mit diesen Bedingungen besagen die drei Gleichungen (11), dass die Verhältnisse der Coordinaten dieser sechs geraden Linien unter sich in einer solchen Grösse gewählt seien, wie sie sich aus den Coordinaten der vier Eckpunkte (Seitenflächen) des von ihnen gebildeten Tetraeders unter Zugrundelegung der Formeln (1), (3) ergeben.

Damit ist der vollständige Nachweis geführt, dass die gewählte Transformation der Verwandlung des gegebenen Coordinatentetraeders in ein anderes entspricht.

9. Wir denken uns die Substitutionscoefficienten b independent durch die Coefficienten β einer derselben Coordinatenverwandlung entsprechenden linearen Transformation von Punktcoordinaten:

$$x_\varkappa = \sum_\lambda \beta_{\varkappa,\lambda} x'_\varkappa \tag{17}$$

dargestellt. Dann erhalten wir die folgende Relation:

$$d = \sum \pm \beta_{1,1} \cdots \beta_{4,4}. \tag{18}$$

Von der Richtigkeit derselben überzeugen wir uns einmal durch directe Ausrechnung, indem wir von einer der Formeln (11) ausgehen, dann aber auch durch die Bemerkung, dass die Determinante D, als gebildet aus den zweiten Unterdeterminanten der viergliedrigen Determinante $\Sigma \pm \beta_{1,1} \cdots \beta_{4,4}$ gleich ist der dritten Potenz dieser Determinante.

Die Constante d kann jeden positiven oder negativen Werth annehmen, nur darf sie nicht verschwinden. Denn dann würden sich, in Folge der Gleichungen (11), die gegenüberliegenden Kanten des neuen Tetraeders schneiden und damit die Coordinatenbestimmung unmöglich werden. Dem entspräche, dass die vier Eckpunkte oder die vier Seitenflächen des Tetraeders zusammenfielen, was seinen Ausdruck in dem Verschwinden der Determinante $\Sigma \pm \beta_{1,1} \cdots \beta_{4,4}$ findet.

In dem Folgenden nehmen wir die Constante d gleich der positiven Einheit an, so dass also durch die lineare Substitution, in welche dann nur noch 15 unabhängige Coefficienten eingehen, der Ausdruck P in sich selbst übergeführt wird.

Der Uebergang von der Substitution (9) zu der Substitution (17) gestaltet sich folgendermassen. Wir können uns aus drei Horizontal- und drei Verticalreihen der Coefficienten b in einer solchen Weise auswählen, dass, wenn wir uns in b die Grössen β eingeführt denken und wir mit λ einen laufenden Index, mit $\varkappa, \mu$ zwei in jedem einzelnen Falle bestimmte Indices bezeichnen, weder Glieder von der Form $\beta_{\varkappa,\lambda}$ noch von der Form $\beta_{\lambda,\mu}$ vorkommen Die Determinante aus den so gewählten Coefficienten b ist dann aus den Unterdeterminanten der Determinante $d_{\varkappa,\mu}$ zusammengesetzt und hat folglich den absoluten Werth $d^2_{\varkappa,\mu}$. Die so bestimmten Determinanten $d_{\varkappa,\mu}$ sind gerade diejenigen Coefficienten, welche in die Auflösungen der Gleichungen (17) eingehen.

10. Die Aufgabe, einen gegebenen Ausdruck in Liniencoordinaten durch eine lineare Substitution auf eine bestimmte Gestalt zu transformiren, kann zu imaginären Substitutionscoefficienten und damit zu Tetraedern mit imaginären Kanten führen. Wir mögen ein solches Tetraeder einfach *ein imaginäres Tetraeder* nennen.

Im Allgemeinen gehört zu einem imaginären Tetraeder ein conjugirtes. Dann werden beide Tetraeder immer gemeinsam auftreten.

Insbesondere aber können die imaginären Kanten desselben imaginären Tetraeders einander conjugirt sein. Wenn dann sämmtliche Seitenflächen (Eckpunkte) imaginär sind, so besitzt das Tetraeder zwei reelle, sich nicht schneidende Kanten, während die vier übrigen Kanten weder einen reellen Punkt noch eine reelle Ebene enthalten und die gegenüberstehenden paarweise conjugirt sind.

Sind dagegen nur zwei Seitenflächen (Eckpunkte) imaginär, so sind, wie im vorhergehenden Falle, nur zwei gegenüberstehende Kanten reell; aber längs der einen schneiden sich zwei reelle Ebenen des Tetraeders, auf der anderen liegen, als Durchschnittspunkte mit diesen Seitenflächen, zwei reelle Eckpunkte desselben. Die übrigen vier Kanten des Tetraeders sind paarweise conjugirt. Je zwei conjugirte verlaufen innerhalb einer der reellen Seitenflächen und schneiden sich in derselben in dem entsprechenden reellen Eckpunkte. Solche zwei imaginäre gerade Linien sind von der am Schlusse der fünften Nummer betrachteten Art.

Wenn also die imaginären Kanten eines Tetraeders conjugirt sind, sind immer zwei gegenüberstehende reell, und wir haben es mit einem Tetraeder der einen oder anderen Art zu thun, je nachdem von den vier übrigen Kanten sich die conjugirten schneiden oder nicht. — Tetraeder von der einen wie von der andern Art können isolirt auftreten, insofern sie sich selbst conjugirt sind.

Auch solche imaginäre Tetraeder, die nicht in sich conjugirt sind, können zwei reelle, einander gegenüberstehende Kanten besitzen. Dann sind dieselben dem gegebenen und dem conjugirten Tetraeder gemeinsam.

III.

Ueber Liniencomplexe im Allgemeinen.

11. Eine homogene Gleichung zwischen Liniencoordinaten bestimmt ein dreifach unendliches System von geraden Linien. Solch' ein Gebilde heisst, nach Plücker, ein *Liniencomplex**). Indem wir in die Gleichung eines Complexes des n. Grades für die Liniencoordinaten die Ausdrücke (1) oder (3) einsetzen, erhalten wir die folgenden beiden, unter sich identischen, geometrischen Definitionen eines solchen Complexes**):

*) Der allgemeine Begriff des *Liniencomplexes* gehört, wie es scheint, durchaus Pluecker an. Nur der lineare Complex wurde schon vorher ausführlich untersucht, zuerst wohl von Moebius in seiner berühmten Abhandlung: Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse im Raume (Crelle's Journal t. X, 1833).

[Januar 1884.]

**) Pluecker, „Neue Geometrie," n. 19.

In einem Complexe des n. Grades bilden diejenigen geraden Linien, welche durch einen festen Punkt gehen, einen Kegel der n. Ordnung;

In einem Complexe des n. Grades bilden diejenigen geraden Linien, welche in einer festen Ebene liegen, eine Curve der n. Classe.

Ist also insbesondere der Complex linear, so entspricht jedem Punkte eine Ebene die durch ihn hindurch geht, jeder Ebene ein Punkt, der in ihr liegt. Einen derartigen Complex bildet die Gesammtheit aller geraden Linien, welche eine gegebene gerade Linie schneiden (n. 4).

Als ausgezeichneter Fall der Complexe des $n(n-1)$. Grades kann die Gesammtheit der Tangenten einer Fläche der n. Ordnung oder Classe angesehen werden. Wenn sich die Fläche dahin particularisirt, dass sie in eine abwickelbare Fläche mit zugehöriger Rückkehrkante ausartet, so umfasst der Complex alle diejenigen geraden Linien, welche die erste berühren oder die zweite schneiden.

12. Die allgemeine Gleichung des n. Grades umfasst $(n+5)_5$ verschiedene Glieder. Allein der Complex hängt, sobald $n > 1$, von einer geringeren als der um 1 verminderten Anzahl unabhängiger Constanten ab, indem es frei steht, aus seiner Gleichung eine Reihe von Gliedern vermöge der Relation:

$$P \equiv \sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3} = 0$$

zu entfernen. Wir können, ohne den gegebenen Complex zu ändern, zu seiner Gleichung P, mit einer beliebigen Function des $(n-2)$. Grades multiplicirt, addiren. Eine derartige Function enthält $(n+3)_5$ unbestimmte Constanten. Eine gleiche Anzahl von Constanten dürfen wir also auch in der Gleichung des Complexes beliebig annehmen, nur müssen dieselben mit solchen Gliedern verbunden sein, welche einen der drei Factoren:

$$p_1 p_4,\ p_2 p_5,\ p_3 p_6$$

besitzen, und, abgesehen von diesen Factoren, alle von einander verschieden sind.

Die Erniedrigung in der Anzahl der unabhängigen Constanten fällt fort, sobald wir die Gleichung des Complexes nicht in den sechs Coordinaten $p_\varkappa$, sondern in $6n$ Coordinaten

$$p'_\varkappa,\ p''_\varkappa,\ \cdots,\ p^{(n)}_\varkappa$$

n.fach linear schreiben. Denn der Ausdruck P schreibt sich bilinear:

$$\sum_{\varkappa} p'_\varkappa \cdot p''_{\varkappa+3}$$

und ist dann, ausser wenn die beiden geraden Linien (p') und (p')

sich schneiden, nicht mehr gleich Null, so dass er nicht mehr ohne Weiteres der Gleichung des gegebenen Complexes zugefügt werden kann.

Nach dem Vorstehenden hängt *ein Complex des zweiten Grades* nicht von $21 - 1 = 20$, sondern nur von 19 unabhängigen Constanten ab. Dagegen giebt es eine einfach unendliche Schaar zugehöriger Polarsysteme (bilinearer Formen), deren jedes durch 20 Constanten bestimmt wird. In einem solchen Polarsysteme entspricht einer beliebig angenommenen geraden Linie ein linearer Complex*). Diejenigen Linien, welche sich selbst entsprechen, sind in allen Polarsystemen dieselben: die Linien des zugehörigen Complexes zweiten Grades.

Es ist die Theorie der Complexe durchaus analog der Theorie der Curven, welche auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegen, oder der Theorie der abwickelbaren Flächen, welche eine Fläche der zweiten Classe umhüllen. Die *einzelne* Fläche, welche durch ihren Durchschnitt mit der gegebenen Fläche der zweiten Ordnung eine Curve bestimmt, kommt bei der Discussion dieser Durchschnittscurve gar nicht in Betracht, sondern nur die durch sie und die gegebene Fläche der zweiten Ordnung bestimmte Schaar. Dagegen ist einem Punkte der gegebenen Fläche zweiten Grades in Bezug auf die fragliche Durchschnittscurve ein anderes auf dieser Fläche liegendes Gebilde zugeordnet, je nach der Wahl der zweiten die Curve bestimmenden Fläche.

Diejenigen geraden Linien, welche zwei Complexen gemeinsam sind, bilden eine *Congruenz*. Die Congruenz heisst vom Grade mn, wenn die beiden sie bestimmenden Complexe bezüglich vom Grade m und n sind. Alle Linien einer linearen Congruenz schneiden zwei feste gerade Linien, die reell oder imaginär sein können: die *Directricen* der Congruenz.

Diejenigen geraden Linien, welche drei Complexen, die bezüglich vom Grade m, n, p sind, zugleich angehören, bilden eine *Linienfläche* (windschiefe Fläche) von der Ordnung und Classe $2mnp$. Insbesondere bestimmen drei lineare Complexe eine Fläche des zweiten Grades durch die Linien der einen Erzeugung derselben**).

---

*) Pluecker a. a. O. — Es ist hier nicht der Ort, die im Texte angedeutete Reciprocität zwischen geraden Linien und Complexen des ersten Grades, die, bei consequenter Behandlungsweise, dazu führt, den Complexen ersten Grades sechs homogene, unabhängige Coordinaten zu ertheilen, weiter zu verfolgen. (Pluecker's „Neue Geometrie", *n.* 19). Die gerade Linie erscheint in dieser Auffassungsweise als ein linearer Complex, dessen Coordinaten die Gleichung:

$$P = 0$$

befriedigen (*n.* 4).

**) Vgl. Plueckers Neue Geometrie, a. a. O.

IV.

Transformation der Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form.

13. Es sei

$$\Omega = 0 \tag{19}$$

die allgemeine Gleichung der Complexe des zweiten Grades;

$$P = 0$$

bezeichne die Bedingung

$$\sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3} = 0.$$

Unsere Aufgabe ist, ein Tetraeder zu bestimmen, welches zu dem Complex (19) in einer ausgezeichneten Beziehung steht, und die Form anzugeben, welche die Gleichung des Complexes annimmt, wenn derselbe auf dieses Tetraeder als Coordinatentetraeder bezogen wird.

Diese Aufgabe behandelt sich algebraisch als die lineare simultane Transformation der Form P in sich selbst und der Form Ω auf eine canonische Gestalt. Wir definiren dabei die canonische Gestalt der Form Ω als die einfachste, auf welche sich dieselbe durch eine derartige Transformation umformen lässt. Es wird in der Auswahl dieser canonischen Gestalt immer eine gewisse Willkür herrschen, und der Weg, auf welchem wir in der Folge zu einer solchen gelangen, ist kein nothwendiger, sondern ein nach Belieben ausgewählter. — Die algebraische Fassung dieses Problems ist insofern allgemeiner als die geometrische, als in derselben P und Ω als individuelle Formen auftreten, während bei der geometrischen Untersuchung neben P nur die zweigliedrige Gruppe

$$\Omega + \lambda P,$$

wo λ eine willkürliche Constante bedeutet, in Betracht kommt*).

Indem wir bei der linearen Transformation der Form P in sich selbst noch über 15 willkürliche Constanten verfügen können, wird die canonische Gestalt der Form Ω noch 6 Constanten enthalten. Wenn wir durch eine derselben durchdividiren und den Ausdruck P, mit einer geeigneten Constante multiplicirt, hinzuaddiren, können wir noch 2 Constanten aus derselben fortschaffen. Die canonische Form der Complexgleichung enthält somit nur noch 4 wesentliche Constante.

*) Die algebraische Behandlungsweise knüpft sich an die oben erwähnte Erweiterung der geometrischen Deutung von sechs Veränderlichen. Einer Verwandlung des Coordinatentetraeders entsprechend, transformiren sich die Coordinaten eines Complexes ersten Grades linear in einer solchen Weise, dass der Ausdruck P, welcher nicht verschwindet, in sich selbst übergeht.

Es erfordert eine Particularisation des Complexes, wenn in seiner Gleichung weniger als 4 Constanten vorkommen sollen, oder wenn es möglich sein soll, denselben auf unendlichfach verschiedene Weise auf dieselbe Form mit 4 Constanten zu transformiren.

Wir beginnen, im Anschluss an die neueste Arbeit von Weierstrass über die quadratischen Formen*), mit einer eigenthümlichen Umgestaltung der beiden Formen P und Ω, welche in unserem Falle *immer* anwendbar ist. Dieselbe schliesst als besonderen Fall die Transformation der beiden Formen P und Ω auf solche zwei in sich, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten, eine Transformation, die bekanntlich nicht in allen Fällen möglich ist.

Durch die in Rede stehende Umgestaltung werden P und Ω in zwei neue Formen P' und Ω' übergeführt. Wir gehen sodann durch eine einfache lineare Substitution von P' zu P zurück und transformiren dadurch Ω' in eine neue Form Ω'', welche wir als *canonische* bezeichnen. Wir gelangen so, durch Benutzung der in der angeführten Abhandlung gewonnenen Ergebnisse, auf dem kürzesten Wege zur Aufstellung der jedem Falle entsprechenden canonischen Form und damit zur Eintheilung der Complexe des zweiten Grades.

Wir wiederholen zunächst die Ergebnisse, zu denen Weierstrass in dem oben citirten Aufsatze gelangt, in einer Form, wie sie dem hier vorliegenden Falle entspricht. Weierstrass betrachtet die simultane Transformation zweier beliebig gegegebener quadratischer (oder bilinearer) Formen, und muss, dem Falle entsprechend, dass die Determinante einer jeden der beiden Formen verschwindet, besondere Vorsichtsmassregeln treffen. In unserm Falle ist die eine Form, P, gegeben und hat die nicht verschwindende Determinante (-1).

14. Es mögen

$$\Phi, \Psi$$

zwei quadratische Formen derselben n. Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen. Wir machen die Voraussetzung, dass die Determinante von Φ nicht verschwindet. Dann ist die Determinante der Form

$$s\Phi + \Psi,$$

die wir kurz mit S bezeichnen wollen, eine ganze Function des n.

---

*) Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen; Monatsberichte d. Berl. Acad. Mai 1868, p. 310—338. Vergl. einen früheren Aufsatz über denselben Gegenstand, Monatsberichte, 1858, p. 207—220. (Das im Folgenden zur Verwendung kommende Princip der *Elementartheiler* ist wohl zuerst von Sylvester erkannt worden, siehe dessen Aufsatz: Enumeration of the Contacts of Lines and Surfaces of the Second Ordre im Philosophical Magazine von 1851, t. 1, p. 119—140 [Jan. 1884]).

Grades von s, und kann immer als Product von n. Factoren, die lineare Functionen von s sind, dargestellt werden.

Es sei, unter der Voraussetzung, dass der Coefficient der höchsten in S enthaltenen Potenz von s der Einheit gleich, oder dass er als constanter Factor aus dem Producte jener n. linearen Factoren herausgezogen sei, $(s - c)$ irgend einer dieser Factoren. Mit l bezeichnen wir den Exponenten der höchsten in S aufgehenden Potenz desselben. Ferner bedeute $l^{(x)}$ den Exponenten der höchsten Potenz von $(s - c)$, durch welche *alle* aus den Elementen von S gebildeten partiellen Determinanten $(n-x)^{\text{ter}}$ Ordnung theilbar sind. Dann gelten, wie Weierstrass zeigt, die folgenden Ungleichheiten:

$$l > l' > l'' > \cdots > l^{(\nu-1)} > 0,$$

$$l^{(x-1)} - l^{(x)} \geq l^{(x)} - l^{(x+1)}.$$

Setzt man daher:

$$e = l - l',\ e' = l' - l'', \ldots, e^{(\nu-1)} = l^{(\nu-1)},$$

so sind $e, e', \ldots, e^{(\nu-1)}$ positive Zahlen, welche nach ihrer Grösse geordnet sind, so dass:

$$e^{(x)} \geq e^{(x+1)}.$$

Jeder einzelne der so definirten ν Factoren von $(s - c)^l$:

$$(s-c)^e,\ (s-c)^{e'}, \ldots, (s-c)^{e^{(\nu-1)}}$$

heisse *ein Elementartheiler der Determinante* S*). Wir nennen einen Elementartheiler, je nach dem Grade e der höchsten in ihm enthaltenen Potenz von s, von der e^{ten} Ordnung.

Es gilt zunächst der allgemeine Satz, dass wie auch die beiden Formen Φ, Ψ durch lineare Substitution in andere Formen Φ', Ψ' transformirt werden mögen, die zugehörigen Elementartheiler dieselben bleiben. Und umgekehrt, wenn zwei Formenpaare, Φ, Ψ und Φ', Ψ', dieselben Elementartheiler besitzen, so lassen sie sich durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante in einander überführen**).

Wir bezeichnen nun durch $S^{(x)}$ diejenige Unterdeterminante der Determinante S, welche aus derselben durch Weglassung der x ersten Horizontal- und Verticalreihen entsteht. Ferner bedeute

$$(-1)^{\alpha+\beta} \underset{\alpha\beta}{S^{(x)}},$$

*) Die Elementartheiler, zu welchen die beiden Formen Φ, $\lambda\Phi + \Psi$ führen, sind von den Elementartheilern, die zu den Formen Φ, Ψ zugehören, nur dadurch verschieden, dass s in denselben durch $s + \lambda$ ersetzt ist.

**) Wir bemerken, dass dieser Satz nur dann allgemein gilt, wenn man auch solche lineare Substitutionen zulässt, deren Substitutionscoefficienten imaginäre, nicht einander conjugirte Werthe besitzen.

unter der Voraussetzung, dass α, β beide grösser als $\varkappa$ sind, die Determinante $(n-\varkappa-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Elementensystem aus dem von $S^{(\varkappa)}$ durch Weglassung der $(\alpha-\varkappa)^{\text{ten}}$ Horizontal- und der $(\beta-\varkappa)^{\text{ten}}$ Verticalreihe hervorgeht, — werde aber gleich Null gesetzt, wenn eine der beiden Zahlen $\alpha, \beta \leq \varkappa$ ist.

Die Functionen:

$$S,\ S',\ S'',\ \ldots$$

sind bezüglich durch

$$(s-c)^{l},\ (s-c)^{l'},\ (s-c)^{l''},\ \ldots$$

theilbar. Wir nehmen an, dass in keiner dieser Functionen eine höhere Potenz von $(s-c)$ als die angegebene als Factor enthalten sei. Sollte dieses doch der Fall sein, so sei in der Reihe der Functionen:

$$S,\ S',\ S'',\ \ldots$$

$S^{(\nu)}$ die erste, welche eine höhere Potenz von $(s-c)$ als die $l^{(\nu)\text{te}}$ enthält. Dann können wir vorab eine lineare Transformation von der Gestalt:

$$\bar{x}_\nu = x_\nu + h_{\nu+1}x_{\nu+1} + \cdots + h_n x_n,$$
$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha, \quad \text{wenn} \quad \alpha \gtrless \nu,$$

eintreten lassen und über die Constanten $h_{\nu+1}, \ldots, h_n$ derart verfügen, dass das neue $\bar{S}^{(\nu)}$ nur noch die $l^{(\nu)\text{te}}$ Potenz von $(s-c)$ enthält. Indem die vorstehende Substitution die Determinante $(+1)$ hat, sind durch dieselben die Functionen:

$$S,\ S',\ S'',\ \ldots,\ S^{(\nu-1)}$$

ungeändert geblieben. Wir können also, in der angegebenen Weise fortfahrend, es immer dahin bringen, dass von den Determinanten $S^{(\varkappa)}$ keine eine höhere Potenz von $(s-c)$ enthält, als die $l^{(\varkappa)\text{te}}$.

Diese Hülfstransformation vorausgesetzt, sei:

$$(20)\qquad \begin{cases} X = S_{11}\dfrac{d\Phi}{dx_1} + S_{12}\dfrac{d\Phi}{dx_2} + \cdots + S_{1n}\dfrac{d\Phi}{dx_n}, \\ X' = \qquad S'_{22}\dfrac{d\Phi}{dx_2} + \cdots + S'_{2n}\dfrac{d\Phi}{dx_n}, \\ X'' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ferner bezeichne e_λ in der Reihe der zu dem Theiler $(s-c)$ gehörigen Zahlen e die $\varkappa^{\text{te}}$. Wir mögen zugleich c_λ statt c schreiben, so dass dieselbe Wurzel c der Gleichung $S=0$, den verschiedenen ihr zugehörigen Elementartheilern entsprechend, verschiedene Indices bekommt. Man entwickle sodann die Functionen:

$$\frac{X^{(\varkappa-1)}}{\sqrt{S^{(\varkappa-1)}\cdot S^{(\varkappa)}}}.$$

nach aufsteigenden Potenzen von $(s-c_\lambda)$. Die Entwicklung beginnt mit der Potenz $-\frac{e_\lambda}{2}$ von $(s-c_\lambda)$ und hat die Gestalt:

$$\sum_{\mu=0,1,\ldots,\infty} X_{\lambda\mu}\cdot(s-c_\lambda)^{\mu-\frac{e_\lambda}{2}}.$$

Dabei ist:

$$X_{\lambda\mu}=\frac{1}{\sqrt{C_\lambda}}\left(C_{\varkappa\lambda\mu}\frac{d\Phi}{dx_\varkappa}+\cdots+C_{n\lambda\mu}\frac{d\Phi}{dx_n}\right), \tag{21}$$

wo C_λ und sämmtliche Coefficienten der Grössen $\frac{d\Phi}{dx}$ ganze Functionen von c_λ und den Coefficienten der Formen Φ, Ψ sind.

Der Coefficient C_λ, auf dessen Vorzeichen in dem Falle Gewicht zu legen ist, dass c_λ eine reelle Grösse ist, schreibt sich entwickelt:

$$C_\lambda=\left\{\frac{(s-c_\lambda)^{2l_\lambda^{(\varkappa)}+e_\lambda}}{S^{(\varkappa-1)}\cdot S^{(\varkappa)}}\right\},\quad s=c_\lambda \tag{22}$$

wo $l_\lambda^{(\varkappa)}$ die früher $l^{(\varkappa)}$ gegebene Bedeutung hat, und der Index λ nur auf die Zusammengehörigkeit mit e_λ, c_λ hinweist.

Man bezeichne nun, wenn e eine beliebige ganze Zahl bedeutet:

$$\sum X_{\lambda\mu}\cdot X_{\lambda\nu}\quad\text{mit}\quad (X_\lambda X_\lambda)_e,$$
$$(\mu+\nu=e-1).$$

Dann erhält man die folgenden Umformungen:

$$\begin{cases}\Phi=\sum_\lambda{}'(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda},\\ \Psi=\sum_\lambda c_\lambda(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda}+(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda-1},\end{cases} \tag{23}$$

wo die Summation sich über die den verschiedenen Elementartheilern entsprechenden λ zu erstrecken hat und $(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda-1}$ gleich Null zu setzen ist, wenn e_λ den Werth 1 hat.

Dies sind die fraglichen Umgestaltungen der Formen Φ, Ψ. Es lässt sich nachweisen, dass die neuen n. Variabeln:

$$X_{1,0},\ X_{1,1},\ \ldots,\ X_{1,e_1-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{\lambda,0},\ X_{\lambda,1},\ \ldots,\ X_{\lambda,e_\lambda-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

durch welche Φ und Ψ vorstehend ausgedrückt sind, aus den Variabeln X (20) und damit aus den ursprünglichen Variabeln x durch eine

Substitution hergeleitet worden sind, deren Determinante nicht verschwindet.

Einem gegebenen Systeme von Elementartheilern entsprechend, können wir, nach den Formeln (23), ohne Weiteres ein System zweier Formen hinschreiben. Sind insbesondere alle Elementartheiler von der ersten Ordnung, so stellen sich Φ und Ψ dar durch die Quadrate der neuen Variabeln.

15. Ehe wir zur Anwendung der vorstehenden Umgestaltung auf die beiden uns gegebenen Formen P, Ω übergehen, mögen wir untersuchen, in wie weit sich die unter (21) eingeführten Variabeln $X_{\lambda,\mu}$ durch andre, gleichberechtigte, ersetzen lassen, in denen sich Φ und Ψ ebenfalls unter der Form (23) darstellen.

Von den Elementartheilern der Determinante S seien μ_ν mal ν einander gleich. Dann ist es möglich, eine lineare Substitution anzugeben, welche

$$\sum_\nu \mu_\nu \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}$$

willkürliche Constante enthält und die Eigenschaft besitzt, Φ *und* Ψ *in der unter* (23) *gegebenen Gestalt in sich selbst zu transformiren*

Es seien ν unter sich gleiche Elementartheiler der e^{ten} Ordnung gegeben, und es sei zunächst $e > 1$. Wir bezeichnen die Theiler der Reihe nach mit den Indices $1, 2, \ldots, \nu$, allgemein durch den Index α. Einem jeden dieser Elementartheiler entspricht, in der unter (23) gegebenen Darstellung der Formen Φ und Ψ, in Φ eine Function der e Variabeln:

$$X_{\alpha,0},\ X_{\alpha,1},\ \ldots,\ X_{\alpha,e_\alpha-1},$$

die wir mit $(X_\alpha X_\alpha)_{e_\alpha}$ bezeichnet haben, und in Ψ dieselbe Function derselben e Variabeln, multiplicirt mit einer von dem Index α unabhängigen Constanten, vermehrt um eine Function, $((X_\alpha X_\alpha)_{e_\alpha-1})$, allein der $(e-1)$ Variabeln;

$$X_{\alpha,0},\ X_{\alpha,1},\ \ldots,\ X_{\alpha,e_\alpha-2}.$$

Die Variabeln $X_{\alpha,e_\alpha-1}$ kommen nur in der ersten Function und in derselben, gemäss der Bedeutung des Symbols $(X_\alpha X_\alpha)_{e_\alpha}$, nur in der Verbindung:

$$2\,X_{\alpha,0}\,X_{\alpha,e_\alpha-1}.$$

in Φ und Ψ also nur in dem folgenden Ausdruck vor:

$$2\,X_{1,0}\cdot X_{1,e_1-1} + 2\,X_{2,0}\cdot X_{2,e_2-1} + \cdots + 2\,X_{\nu,0}\cdot X_{\nu,e_\nu-1}.$$

Die Form von Φ und Ψ bleibt also ungeändert, wenn wir die Variabeln $X_{\alpha,e_\alpha-1}$ durch eine folgende lineare Substitution:

$$X_{\alpha,e_\alpha-1} = X_{\alpha,e_\alpha-1},$$

vermehrt um eine lineare Function von

$$X_{1,0}, \ldots, X_{\nu,0},$$

transformiren und dabei bedingen, dass durch diese Substitution der Ausdruck

$$X_{1,0} \cdot X_{1,e_1-1} + X_{2,0} \cdot X_{2,e_2-1} + \cdots + X_{\nu,0} \cdot X_{\nu,e_\nu-1}$$

in sich selbst übergehe. Bei einer derartigen Substitution haben wir über ν^2 Constante zu verfügen und $\frac{\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2}$ Bedingungen zu befriedigen. Es bleiben also noch

$$\nu^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2} = \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2}$$

Constanten willkürlich.

Die gleiche Zahl ergiebt sich, wenn wir $e = 1$ annehmen. Denn dann ist die Function:

$$X_{1,0}^2 + X_{2,0}^2 + \cdots + X_{\nu,0}^2$$

in sich selbst zu transformiren.

Auf diese Weise können wir mit jedem in der Reihe der Elementartheiler der Determinante S enthaltenen System gleicher Theiler verfahren und erhalten so die oben angegebene Zahl:

$$\sum_{\nu} \mu_\nu \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2}.$$

Es bezeichnet diese Zahl den Werth, den das den Formen (23) zu Grunde gelegte System von Variabeln für diese Formen besitzt.

16. Eine weitere Untersuchung knüpft sich an das Vorzeichen der durch die Gleichung (22) bestimmten Constante C_λ.

Man theilt bekanntlich die quadratischen Formen von n Variabeln mit nicht verschwindender Determinante in Classen ein, je nach dem Ueberschuss, den die Anzahl der positiven Quadrate über die Anzahl der negativen Quadrate ergiebt, wenn man die gegebene Form durch irgend eine *reelle* lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante auf eine Form transformirt, die nur die Quadrate der Variabeln enthält. Es bezeichne m den Ueberschuss, welcher zu der gegebenen Function Φ gehört. Dann gilt der folgende Satz, unabhängig von der Wahl der Form Ψ:

Wenn man die Constanten C_λ, welche zu reellen Elementartheilern einer ungeraden Ordnung gehören, nach ihrem Vorzeichen in zwei Gruppen theilt, *so enthält die Gruppe der positiven C_λ m Glieder mehr als die der negativen.*

Und daraus folgt der Satz, dass die Determinante S, unabhängig

von der Wahl der Form Ψ, *mindestens m reelle Elementartheiler ungerader Ordnung besitzen muss.**)

Wenn $(s-c)^{e_\lambda}$ einen reellen Elementartheiler und ε_λ die positive oder negative Einheit bezeichnet, je nachdem C_λ positiv oder negativ ist, wollen wir (mit Weierstrass)

$$X_{\lambda_\mu} = + \sqrt{\varepsilon_\lambda} \cdot \mathfrak{X}_{\lambda_\mu}$$

und also:

$$(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} = \varepsilon_\lambda (\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}$$

setzen. Dann sind die $\mathfrak{X}_{\lambda\mu}$ lineare Functionen der ursprünglichen Veränderlichen x mit *reellen* Coefficienten. Ist dagegen $(S-c_\lambda)^{e_\lambda}$ ein imaginärer Elementartheiler, so findet sich ein zweiter, ihm conjugirter, $(s-c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}}$, wo $e_\lambda = e_{\lambda'}$. Indem wir dann den Wurzelgrössen $\sqrt{C_\lambda}, \sqrt{C_{\lambda'}}$ conjugirte Werthe ertheilen und

$$X_{\lambda\mu} = \mathfrak{X}_{\lambda\mu} + i\mathfrak{X}'_{\lambda\mu},$$
$$X_{\lambda'\mu} = \mathfrak{X}_{\lambda'\mu} - i\mathfrak{X}'_{\lambda\mu}$$

setzen, werden $\mathfrak{X}_{\lambda\mu}$, $\mathfrak{X}'_{\lambda\mu}$ lineare Functionen der Variabeln x ebenfalls mit reellen Coefficienten; und man hat:

$$(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + (X_{\lambda'} X_{\lambda'})_{e_{\lambda'}} = 2(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda} - 2(\mathfrak{X}'_\lambda \mathfrak{X}'_\lambda)_{e_\lambda}.$$

Nach diesen Substitutionen ist Φ dargestellt durch n reelle Variable. Wir haben Φ jetzt durch irgend eine reelle Substitution auf die Quadrate n neuer Veränderlicher zu transformiren. Dann muss der Ueberschuss der positiven über die Anzahl der negativen Quadrate m betragen.

Je zwei conjugirt imaginäre Elementartheiler liefern offenbar keinen Beitrag zu diesem Ueberschusse m. Denn $(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}$ liefert ebenso viele Quadrate des einen Zeichens, wie $(\mathfrak{X}'_\lambda \mathfrak{X}'_\lambda)_{e_\lambda}$.

Der einem ungeraden reellen Elementartheiler entsprechende Ausdruck liefert den Ueberschuss eines Quadrates mit dem Zeichen ε_λ. Denn der entsprechende Ausdruck $(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}$ enthält ein Quadrat und $\frac{e_\lambda - 1}{2}$ Producte von jedesmal zwei Variabeln. Solch' ein Product vertritt ein positives und ein negatives Quadrat.

Ist dagegen der reelle Elementartheiler von einer geraden Ordnung, so umfasst der Ausdruck $(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}$ nur Producte der Variabeln

*) Ich möchte auf diesen allgemeinen Satz, der bisher wenig beachtet zu sein scheint, besonders aufmerksam machen. In die gewöhnliche Ausdrucksweise übersetzt, besagt er, dass von den Wurzeln der Gleichung $|sa_{ix} - b_{ix}| = 0$ *mindestens m* reell sind, wenn $\Sigma a_{ix} x_i x_x$ oder $\Sigma b_{ix} x_i x_x$, in eine Summe reeller Quadrate verwandelt, von Quadraten des einen Vorzeichens m mehr aufweist als von denen des anderen. Stimmt diese Zahl m mit der Zahl der Variabelen x überein, so kommt der Satz natürlich auf ein wohlbekanntes Theorem zurück.

[Jan. 1884].

zu zwei und liefert somit eine gleiche Anzahl positiver und negativer Quadrate.

Damit sind die vorstehenden beiden Sätze bewiesen. Umgekehrt ist aus den Formeln (21) klar, dass man, bei gegebenem Φ, einem beliebigen Systeme von Elementartheilern entsprechend, eine Form Ψ mit reellen Coefficienten bestimmen kann, sobald unter den Quadraten, welche in der Darstellung (21) von Φ den ungeraden reellen Theilern entsprechen, m positive mehr als negative angenommen werden. Denn man denke sich Φ durch irgend eine reelle lineare Substitution auf eine Form transformirt, welche nur die Quadrate der Variabeln enthält. Es lassen sich dann, unter der gemachten Voraussetzung, immer lineare Substitutionen angeben, welche Φ von dieser Form zu der unten (23) gegebenen überführen, wobei die neuen Variabeln entweder sich reell durch die früheren ausdrücken oder paarweise imaginär conjugirt sind, je nach der Art des Elementartheilers, welchem sie entsprechen. Es genügt dann in (23) Ψ mit solchen Coefficienten zu versehen, wie sie den verschiedenen Elementartheilern zugehören. Dann führt die Rücksubstitution zu einer Form Ψ in den ursprünglichen Variabeln mit reellen Coefficienten. Es giebt das das Mittel, bei gegebenem Φ ohne Weiteres alle Fälle hinzuschreiben, welche bei der Transformation der Formen Φ, Ψ auf die Gestalt (23) auftreten können.

17. Wir kehren zu den uns gegebenen Formen P und Ω zurück. Indem wir P als Form mit nicht verschwindender Determinante an die Stelle von Φ, Ω an die von Ψ treten lassen, erhalten wir aus (23) die folgende Darstellung der Formen P und Ω:

$$(24)\qquad \begin{cases} P = \sum_{\lambda} (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda}, \\ \Omega = \sum_{\lambda} c_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1}. \end{cases}$$

Die neuen Variabeln bestimmen sich, wie in dem allgemeinen Falle, durch die Formeln (20), (21), (22). Es ist in denselben die Zahl n der Variabeln überall durch 6 zu ersetzen. Wir bemerken nur, dass diese Formeln sich bei der gegebenen Form von P dadurch vereinfachen, dass an die Stellen der Grössen $\frac{d\Phi}{dx}$ die Variabeln x selbst, nur in veränderter Reihenfolge, treten.

Auch die Erörterungen der 15. Nummer über die Multiplicität der Transformation auf die Form (23) behalten ihre Gültigkeit. Wir mögen desswegen die Bezeichnung μ_ν der Anzahl der Systeme von ν Elementartheilern, die unter sich gleich sind, beibehalten.

Die in der 16. Nummer gegebenen Sätze über die Anzahl der in der Darstellung (23) der Form Φ enthaltenen positiven und negativen

reellen Quadrate modificiren sich, der besonderen Gestalt von P entsprechend, folgendermassen.

Wenn wir die Form P durch irgend eine reelle Substitution mit nicht verschwindender Determinante auf eine Form transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthält, so finden sich unter diesen Quadraten *gleich viele* positive und negative. Die Zahl m also, welche in dem allgemeinen Falle den Ueberschuss der positiven über die negativen Quadrate angab, wird in dem Falle der Form P gleich Null.

Es werden sich also in der Darstellung (24) der Form P immer *eine gleiche Anzahl positiver und negativer reeller Quadrate vorfinden.* Wir mögen diese Anzahl mit σ bezeichnen. Dann ist 2σ die Zahl der reellen Elementartheiler einer ungeraden Ordnung. — In dem allgemeinen Falle der Form Φ sind wenigstens m solcher Elementartheiler vorhanden, während die Zahl der reellen Elementartheiler einer geraden Ordnung willkürlich ist. Umgekehrt lässt sich die Form Ψ so wählen, dass überhaupt nur m reelle Elementartheiler und zwar ungerader Ordnung vorhanden sind. Weil m für die Form P den Werth Null hat, können also, je nach der Wahl der Form Ω, *beliebig viele Elementartheiler der Determinante der Form* $sp + \Omega$ *imaginär werden.* — Die Anzahl der Elementartheiler einer ungeraden Ordnung mögen wir in der Folge mit 2ϱ bezeichnen.

Das Vorstehende liefert das vollständige Material zu einer *Eintheilung der Complexe des zweiten Grades.* Nach der Ordnung der Ω zugehörigen Elementartheiler bestimmt sich die Gestalt der Formen (24). Indem wir die Zahlen zusammenstellen, welche die Ordnungen der einzelnen Elementartheiler angeben, erhalten wir in dem folgenden Schema eine Eintheilung sämmtlicher Complexe zweiten Grades in *elf* unterschiedene Arten:

	Ordnung der Elementartheiler.
I	1, 1, 1, 1, 1, 1,
II	1, 1, 1, 1, 2,
III	1, 1, 1, 3,
IV	1, 1, 2, 2,
V	1, 1, 4,
VI	1, 2, 3,
VII	2, 2, 2,
VIII	1, 5,
IX	2, 4,
X	3, 3,
XI.	6.

Es bezeichnet die Zahl 11 die Anzahl der Möglichkeiten der Zerlegung der Zahl der Veränderlichen, 6, in Summanden.

Weitere Eintheilungsgründe giebt die Zahl der gleichen und die Zahl der imaginären Elementartheiler; dann das Vorzeichen der, reellen Elementartheilern in der Darstellung (24) von P entsprechenden Glieder.— Wir unterlassen es, die verschiedenen Fälle, welche sonach stattfinden können, einzeln aufzuzählen, oder nachzuweisen, wie sich dieselben continuirlich als Uebergangsfälle zwischen extremen Gliedern an einander reihen lassen.

18. Wir wollen die unter (24) gegebene Gestalt der Form P noch folgendermassen transformiren. Alle diejenigen Glieder, welche imaginären Elementartheilern entsprechen, lassen wir unverändert. Dagegen führen wir statt der Variabeln $X_{\lambda,0} \cdots X_{\lambda,e_\lambda-1}$, welche einem reellen Elementartheiler zugehören, je nach dem Vorzeichen der Constante C_λ (22), neue Variabeln ein. In dem Falle, dass C_λ positiv ist, behalten wir die ursprünglichen Veränderlichen bei. In dem entgegengesetzten Falle setzen wir:

$$X_{\lambda\beta} = \pm i\mathfrak{X}_{\lambda\beta},$$

und bestimmen dabei das Vorzeichen der Quadratwurzel in einer solchen Weise, dass ein jedes der doppelten Producte $2X_{\lambda,\beta} \cdot X_{\lambda,e_\lambda-\beta-1}$ als $2\mathfrak{X}_{\lambda,\beta} \cdot \mathfrak{X}_{\lambda,e_\lambda-\beta-1}$ mit dem positiven Vorzeichen in die neue Darstellung der Form P eingeht.

Dann ist die Form P dargestellt durch die Quadrate von 2ϱ Variabeln, unter denen sich 2σ reelle finden, und $(3-\varrho)$ doppelte Producte von jedesmal 2 der übrigen $6-2\varrho$ Veränderlichen. Dabei haben diejenigen doppelten Producte, in welche reelle Variabeln eingehen, das positive Vorzeichen. Von dieser Darstellung der Form P müssen wir durch eine neue lineare Substitution zu der ursprünglich gegebenen Gestalt:

$$\sum_x p_x \cdot p_{x+3},$$

in welcher nur doppelte Producte von jedesmal zwei der sechs Veränderlichen vorkommen, die alle das positive Vorzeichen haben, zurückgehen.

Zu diesem Zwecke werden wir diejenigen $6-2\varrho$ Variabeln, die in der gegebenen Darstellung der Form bereits zu doppelten Producten von je zwei verbunden sind, ohne Weiteres beibehalten. Dagegen werden wir die 2ϱ Quadrate in ϱ Gruppen von jedesmal 2 eintheilen und jede einzelne Gruppe in das doppelte Product zweier neuer Variabeln auflösen. Wir zerlegen so

$$Y_\alpha^2 + Y_\beta^2,$$

wo Y_α^2, Y_β^2 zwei derartige Quadrate bedeuten, in das Product der beiden linearen Factoren:

$$\lambda \cdot \frac{Y_\alpha + iY_\beta}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{Y_\alpha - iY_\beta}{\sqrt{2}},$$

wo λ eine noch willkürliche Constante bedeutet. Sind Y_α, Y_β nicht einander conjugirt imaginär, so ist es vortheilhaft, λ einfach der positiven Einheit gleich zu setzen. Im entgegengesetzten Falle wählen wir λ gleich $1 - i$ und erhalten dadurch neue Veränderliche, die sich aus den reellen und imaginären Bestandtheilen der Y_α, Y_β bez. als Summe und Differenz zusammensetzen.

Die Art und Weise der Eintheilung der 2ϱ Quadrate in ϱ Gruppen von 2 ist eine willkürliche. So lange die Elementartheiler, welche den einzelnen Quadraten entsprechen, sämmtlich verschieden sind, hat jedes System neuer Variabeln, welches durch eine beliebige Gruppirung der 2ϱ Quadrate gewonnen wird, eine gleiche Berechtigung. Wir haben dann die Wahl zwischen

$$(2\varrho - 1)(2\varrho - 3) \cdots$$

verschiedenen Systemen. Denn dieses ist die Anzahl der Möglichkeiten einer verschiedenen Gruppirung von 2ϱ Elementen zu 2. Diese Zahl nimmt für die in der vorigen Nummer aufgezählten 11 Fälle bezüglich die folgenden Werthe an:

$$15, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.$$

Anders ist es, wenn sich unter den Elementartheilern, welche den 2ϱ Quadraten zugehören, gleiche befinden. Wir werden sodann immer solche Quadrate zunächst zu zwei gruppiren, welche gleichen Elementartheilern entsprechen. Und mit dem Reste der Quadrate, welcher bei dieser Operation zurückbleibt, werden wir in derselben Weise vorgehen, wie eben mit den überhaupt vorhandenen 2ϱ Quadraten.

In der 15. Nummer haben wir mit μ_ν diejenige Zahl bezeichnet, welche angiebt, wie oft sich unter den Elementartheilern ν gleiche befinden. Dem entsprechend bezeichnen wir mit $\mu'_{2\nu}$, bezüglich $\mu'_{2\nu+1}$ diejenigen Zahlen, welche ausdrücken, wie oft sich 2ν, bezüglich $2\nu + 1$ gleiche unter den Elementartheilern einer ungeraden Ordnung befinden. Endlich führen wir die Bezeichnung μ''_ν für die Summe $\mu'_{2\nu} + \mu'_{2\nu+1}$ ein.

Eine jede Abtheilung von 2ν zusammengehörigen (gleichen Elementartheilern entsprechenden) Quadraten liefert

$$(2\nu - 1)(2\nu - 3) \cdots$$

verschiedene Systeme neuer Variabeln.

Aus jeder Abtheilung von $2\nu + 1$ zusammengehörigen Quadraten müssen wir zunächst beliebig ein Quadrat aussondern, was auf

$(2\nu + 1)$ fache Weise geschehen kann, und haben dann die übrigen 2ν zu 2 zu combiniren. Wir erhalten also die Zahl:

$$(2\nu + 1)(2\nu - 1)(2\nu - 3)\cdots.$$

So bleiben schliesslich noch $\Sigma\mu'_{2\nu+1}$ Einzelquadrate übrig. Dieselben lassen

$$\left(\sum \mu'_{2\nu+1} - 1\right)\left(\sum \mu'_{2\nu+1} - 3\right)\cdots$$

verschiedene Gruppirungen zu.

Als Totalanzahl der Systeme gleichberechtigter Variabeln erhalten wir somit das Product:

$$R = \left(\sum \mu'_{2\nu+1} - 1\right)\left(\sum \mu'_{2\nu+1} - 3\right)\cdots$$
$$\cdot \prod_{\nu} (2\nu + 1)^{\mu'_{2\nu+1}} \cdot [(2\nu - 1)(2\nu - 3)\cdots]^{\mu''_{\nu}}.$$

In diesem allgemeinen Ausdrucke ist der oben abgeleitete:

$$(2\varrho - 1)(2\varrho - 3)\cdots$$

als besonderer Fall enthalten.

Den so bestimmten sechs neuen Veränderlichen geben wir, indem P durch ihre Einführung seine frühere Gestalt wieder angenommen hat, *die Bedeutung von Liniencoordinaten*. Durch Substitution derselben in die Form Ω (24) geht dieselbe in eine neue Form über, *welche wir als canonische bezeichnen*. Dieselbe erhält, je nach Zahl und Ordnung der Elementartheiler, eine verschiedene Gestalt. Wir unterlassen es, dieselbe den vorstehend unterschiedenen elf Arten von Complexen entsprechend hinzuschreiben. Wenn unter den Elementartheilern ungerader Ordnung gleiche auftreten, erhält eine Anzahl der in die zugehörige canonische Form eingehenden Constanten den Werth Null.

19. Die Transformation der Form Ω auf die canonische Gestalt ist eine *mehrdeutige*. Die in der vorigen Nummer gegebene Zahl R bestimmt den Grad dieser Mehrdeutigkeit. Wir untersuchen jetzt, inwieweit sich unter diesen verschiedenen Transformationen solche finden, die zu *reellen* neuen Variabeln führen.

Dazu ist zunächst die Bedingung zu erfüllen, dass sich unter den mehrfachen Wurzeln der Gleichung in s, welche ausdrückt, dass die Determinante S der Form $sP + \Omega$ verschwindet (*n.* 13), keine imaginären finden. Denn solchen Wurzeln entspricht entweder eine Reihe gleicher Elementartheiler, oder, wenn dieses nicht der Fall ist, zum Mindesten ein Elementartheiler von einer höheren als der ersten Ordnung. In beiden Fällen erhalten wir unter den canonischen Variabeln imaginäre. Weiter verlangt die Annahme, dass ein System reeller canonischer Variabeln möglich sei, die Bedingung, dass unter den 2ν,

bezüglich $2\nu + 1$ Quadraten, die zu gleichen Elementartheilern gehören, ν positive und ν negative vorkommen. Wenn diese Bedingung durchgängig für Werthe von ν, die grösser als 0 sind, erfüllt ist und wir nur Quadrate von entgegengesetztem Zeichen zu zwei combiniren, finden sich, nach den Erörterungen der 17. Nummer, unter den schliesslich übrigbleibenden Einzelquadraten gleich viele positive und negative. — Wir erhalten unter den vorstehenden Voraussetzungen die folgende Anzahl reeller Transformationen. Eine jede Gruppe von 2ν, bezüglich $2\nu + 1$ zusammengehörigen Quadraten gibt $\nu!$, bezüglich $(\nu + 1)!$ verschiedene Systeme neuer reeller Variabeln. Denn aus der Anzahl der $2\nu + 1$ Quadrate muss ein Quadrat ausgesondert werden, welches ein derartiges Vorzeichen hat, wie ausser ihm noch ν andere. Es ist das auf $(\nu + 1)$ fache Weise möglich, Und dann sind ν positive Elemente mit ν negativen so zu 2 zu combiniren, dass jede Gruppe ein positives und ein negatives Element enthält. Solcher Combinationen giebt es $\nu!$. Schliesslich sind noch $\Sigma\mu'_{2\nu+1}$ Einzelquadrate zu gruppiren. Wir haben oben angenommen, dass die Anzahl aller reeller Quadrate in der Darstellung von Φ 2σ betrage. Nun haben wir schon über $2\Sigma\nu\cdot\mu''_\nu$ reelle Quadrate verfügt. Es bleiben also unter den Einzelquadraten noch

$$2\left(\sigma - \sum \nu\cdot\mu''_\nu\right)$$

reelle übrig. Indem wir sodann die conjugirt imaginären unter den Einzelquadraten zusammen nehmen, und unter den reellen Quadraten jedesmal ein positives mit einem negativen verbinden, erhalten wir $(\sigma - \Sigma\nu\cdot\mu''_\nu)!$ Systeme reeller Variabeln. Eine reelle Transformation der gegebenen Form Ω auf die canonische Form ist demnach auf R' fache Weise möglich, wo R' das folgende Product bezeichnet:

$$R' = \left(\sigma - \sum \nu\cdot\mu''_\nu\right)!\cdot \prod_\nu (\nu+1)^{\mu'_{2\nu+1}}\cdot (\nu!)^{\mu''_\nu}.$$

Sind insbesondere alle Elementartheiler verschieden, so ist diese Zahl gleich $\sigma!$. Beispielsweise können in dem oben mit I bezeichneten Falle

$$0,\ 2,\ 4,\ 6$$

der Elementartheiler imaginär werden, und danach sind von den 15 verschiedenen Systemen linearer Substitutionen, welche Ω unter der Voraussetzung verschiedener Theiler in diesem Falle auf die canonische Form transformiren, bezüglich

$$6,\ 2,\ 1,\ 1,$$

reell.

Auch in solchen Fällen, in denen alle Systeme canonischer Variabeln imaginär ausfallen, ist es selbstverständlich möglich, Ω durch

eine reelle Substitution auf eine einfache Form zu transformiren, etwa indem wir die reellen und imaginären Theile der in Rede stehenden imaginären Variabeln als neue Veränderliche betrachten; aber wir dürfen eine solche Form nicht als canonische bezeichnen, weil sie nach einem anderen Modus, als demjenigen, der in allen übrigen Fällen angewandt ist, aus der Darstellung (24) der Form Ω sich ableitet.

25. Wenn wir zusammenfassen, sind wir zu dem folgenden Resultate gelangt:

Es sei ein Complex des zweiten Grades gegeben:

$$\Omega = 0,$$

und es bezeichne:

$$P = 0$$

die Bedingungsgleichung zweiten Grades, welcher die Liniencoordinaten genügen müssen.

Es sei ferner $(s - c_\lambda)^{e_\lambda}$ *ein beliebiger Elementartheiler der Determinante der Form* $sP + \Omega$, *und es bedeute* μ_ν *die Zahl, welche angiebt, wie oft sich unter den Elementartheilern* ν *gleiche befinden.* $\mu'_{2\nu}$ *und* $\mu'_{2\nu+1}$ *mögen diejenigen Zahlen bezeichnen, welche ausdrücken, wie oft unter den Elementartheilern ungerader Ordnung bezüglich* 2ν *und* $2\nu + 1$ *gleiche vorkommen,* μ''_ν *bedeute die Summe* $\mu'_{2\nu} + \mu'_{2\nu+1}$. *Endlich sei* 2σ *die Anzahl der reellen unter den Elementartheilern einer ungeraden Ordnung.*

Dann lassen sich P *und* Ω *durch eine Substitution mit nicht verschwindender Determinante, welche noch*

$$\sum_\nu \mu_\nu \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2}$$

willkürliche Constanten enthält, simultan auf die folgende Gestalt transformiren:

$$P = \sum_\lambda \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-1)} X_{\lambda\mu} \cdot X_{\lambda\nu},$$

$$\Omega = \sum_\lambda \left\{ c_\lambda \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-1)} X_{\lambda\mu} \cdot X_{\lambda\nu} + \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-2)} X_{\lambda\mu} \cdot X_{\lambda\nu} \right\},$$

wo $X_{\lambda,0} \cdots X_{\lambda,e_\lambda-1}$ *die neuen Variabeln bedeuten, und die Summe*

$$\sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-2)} X_{\lambda\mu} \cdot X_{\lambda\nu}$$

gleich Null zu setzen ist, wenn e_λ *den Werth der Einheit hat.*

Von dieser Darstellung der Form Ω *können wir durch*

$$R = \left(\sum \mu'_{2\nu+1} - 1\right)\left(\sum \mu'_{2\nu+1} - 3\right) \cdots$$
$$\cdot \prod_{\nu} (2\nu+1)^{\mu_{2\nu+1}} \cdot [(2\nu-1)(2\nu-3)\cdots]^{\mu''_\nu}$$

verschiedene Systeme linearer Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante zu der canonischen Gestalt derselben übergehen. Im günstigen Falle lässt sich das System der neuen Variabeln auf

$$R' = \left[\sigma - \sum \nu \cdot \mu''_\nu\right]! \cdot \prod_{\nu} (\nu+1)^{\mu'_{2\nu+1}} \cdot (\nu!)^{\mu''_\nu}$$

fach verschiedene Weise so auswählen, dass die Transformation eine reelle wird. Dazu ist erforderlich, einmal, dass sich unter den Wurzeln der gleich Null gesetzten Determinante von $sP + \Omega$ keine mehrfachen imaginären finden; dann, dass die Anzahl reeller positiver Quadrate, welche zu gleichen Elementartheilern in der vorhin gegebenen Form von P gehören, von der Anzahl der reellen negativen höchstens um 1 verschieden sei.

V.

Geometrische Deutung der Transformation auf die canonische Form, insbesondere in dem Falle, dass alle Elementartheiler linear und verschieden sind.

21. Die Coefficienten der Substitution, durch welche Ω auf die canonische Gestalt transformirt wird, geben, nach der 8. Nummer, unmittelbar die Kanten des ausgezeichneten Coordinatentetraeders, mit Bezug auf welches sich die Gleichung des Complexes unter canonischer Form schreibt. Den verschiedenen Substitutionen entsprechend, erhalten wir eine

$$\sum_{\nu} \mu_\nu \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} \cdot \text{fach}$$

unendliche Schaar von jedesmal R Coordinatentetraedern, unter welchen R' reelle vorkommen. Diese Tetraeder stehen sämmtlich in derselben ausgezeichneten Beziehung zum Complex.

Wir verstehen dabei unter einer einfach, zweifach, $\cdots m$ fach unendlichen Schaar von Coordinatentetraedern die Gesammtheit aller derjenigen, welche Kanten besitzen, deren Coordinaten sich aus den Coordinaten der Kanten eines derselben unter Zuhülfenahme von $1, 2, \cdots, m$ willkürlichen Constanten ableiten lassen. Wenn wir also, unter $P_\varkappa$, $P_{\varkappa+3}$ zwei gegenüberstehende Kanten des Coordinatentetraeders verstanden, die Transformation:

$$p_x = \lambda p'_x, \quad p'_{x+3} = \lambda p_{x+3}$$

anwenden, durch welche die Kanten selbst und damit das Tetraeder nicht verändert werden und nur der dem Coordinatensystem zu Grunde gelegte Massstab ein anderer wird, so müssen wir consequenterweise, den verschiedenen Werthen der willkürlichen Constante λ entsprechend, von einer einfach unendlichen Schaar von Tetraedern sprechen.

22. Wir beschränken uns in dem Folgenden auf die geometrische Discussion des gewonnenen Resultates allein in dem Falle, dass alle Elementartheiler linear und verschieden sind. In diesem Falle sind P und Ω unter (24) durch die folgenden Formen dargestellt:

$$(25) \qquad \begin{cases} P = \sum_{\lambda}' X_\lambda^2, \\ \Omega = \sum_{\lambda}' c_\lambda X_\lambda^2, \end{cases}$$

wo die Summation von 1 bis 6 zu gehen hat, und $c_1 \cdots c_6$ von einander verschiedene Grössen bedeuten. Auf 15 verschiedene Arten können wir Ω, von dieser Darstellung ausgehend, auf die canonische Form transformiren. Jenachdem

$$0,\ 2,\ 4,\ 6$$

der Elementartheiler imaginär sind, sind von den 15 ausgezeichneten Tetraedern bezüglich

$$6,\ 2,\ 1,\ 1$$

reell. *Mit Bezug auf ein beliebiges dieser letzten Tetraeder schreibt sich die Form Ω unter der folgenden Gestalt:*

$$(26) \qquad \begin{aligned} \Omega = {} & A_{1,4}(p_1^2 \pm p_4^2) + 2B_{1,4}\, p_1\, p_4 \\ & + A_{2,5}(p_2^2 \pm p_5^2) + 2B_{2,5}\, p_2\, p_5 \\ & + A_{3,6}(p_3^2 \pm p_6^2) + 2B_{3,6}\, p_3\, p_6, \end{aligned}$$

wo $p_1 \cdots p_6$ die neuen reellen Variabeln und A die Coefficienten der einen, B die der anderen Gruppe bezeichnen (*n.* 12). Von den drei unbestimmt gebliebenen Vorzeichen ist einem jeden Paare imaginärer Elementartheiler entsprechend eins negativ zu wählen.

Dies ist in dem Falle linearer und verschiedener Elementartheiler die canonische Gestalt der Form Ω, deren Ableitung unsere Aufgabe war.

23. Es beschäftigt uns zunächst die Gruppirung der 15 ausgezeichneten Tetraeder unter sich. Wir mögen dieselben kurz als die *Fundamentaltetraeder* des Complexes bezeichnen.

Zwei gegenüberstehende Kanten eines der fünfzehn Fundamentaltetraeder sind ihm mit zwei anderen gemeinsam. Denn wenn wir von den sechs Quadraten, durch welche P unter (23) dargestellt wird,

zwei beliebige auswählen, so lassen sich die vier übrigen noch dreimal in zwei Gruppen von zwei theilen. Das System der fünfzehn Fundamentaltetraeder umfasst sonach 30 Kanten. Die 60 Seitenflächen derselben schneiden sich zu 6 nach diesen Kanten, und die 60 Eckpunkte derselben sind ebenfalls zu 6 auf dieselben vertheilt. Es schneidet also eine jede der 30 Kanten 12 der übrigen. Dieselben 12 Kanten werden von einer zweiten Kante geschnitten, die zu der ersten in einer ausschliesslichen Beziehung steht. Danach sondern sich die 30 Kanten in 15 Gruppen von 2, die zusammengehören.

Die in (25) eingehenden Variabeln X_λ stellen, einzeln gleich Null gesetzt, lineare Complexe dar. Wenn wir zwei derselben, X_1, X_2, beliebig auswählen, so stellen die beiden Gleichungen:

$$X_1 + iX_2 = 0, \quad X_1 - iX_2 = 0$$

zwei zusammengehörige der 30 Kanten der Fundamentaltetraeder dar. Alle geraden Linien, welche die eine und die andere dieser beiden Kanten schneiden, befriedigen die vorstehenden beiden Gleichungen und gehören somit den beiden Complexen X_1, X_2 an. Es sind also die in Rede stehenden beiden Kanten die Directricen der von den beiden Complexen X_1, X_2 gebildeten Congruenz (*n.* 12). Es giebt das die geometrische Deutung der Variabeln X_λ aus dem System der Fundamentaltetraeder.

Drei unter den Complexen X_λ, etwa X_1, X_2, X_3, bestimmen eine Fläche des zweiten Grades (Hyperboloid) als windschiefe Fläche (*n.* 12). Dieser Fläche gehören, als Directricen der Congruenzen je zweier der drei Complexe*), die folgenden sechs aus dem System der Kanten Fundamentaltetraeder als Linien einer Erzeugung derselben an:

$$\begin{aligned} X_1 + iX_2 = 0, \quad X_2 + iX_3 = 0, \quad X_3 + iX_1 = 0, \\ X_1 - iX_2 = 0, \quad X_2 - iX_3 = 0, \quad X_3 - iX_1 = 0. \end{aligned}$$

Und weil die 30 fraglichen Kanten zu Tetraedern gruppirt sind, sind die folgenden sechs Kanten:

$$\begin{aligned} X_4 + iX_5 = 0, \quad X_5 + iX_6 = 0, \quad X_6 + iX_4 = 0, \\ X_4 - iX_5 = 0, \quad X_5 - iX_6 = 0, \quad X_6 - iX_4 = 0 \end{aligned}$$

Linien der anderen Erzeugung.

Die sechs Symbole X_λ lassen sich auf $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ fache Weise zu drei combiniren. Die 30 Kanten der Fundamentaltetraeder sondern sich also in 20 Gruppen von jedesmal 6, die paarweise zusammengehören. Die sechs Kanten einer Gruppe sind Linien derselben Erzeugung einer Fläche des zweiten Grades, die sechs Kanten der zu-

*) Vergl. Pluecker's „Neue Geometrie", n. 101.

gehörigen Gruppe Linien der anderen Erzeugung derselben Fläche. Das System der 30 Kanten steht also zu 10 verschiedenen Flächen zweiten Grades, von denen sich jedesmal vier nach einer Kante schneiden, in einer ausgezeichneten Beziehung.

24. Wenn sämmtliche Elementartheiler reell sind, werden sechs der fünfzehn Fundamentaltetraeder reell. Die übrigen neun Tetraeder sind von der Art, dass sie zwei reelle, gegenüberstehende Kanten besitzen, und von den übrigen Kanten die gegenüberstehenden conjugirt sind. Zwei zusammengehörige reelle Kanten sind zwei reellen und einem imaginären Tetraeder gemeinsam. Von den 30 Kanten der 15 Tetraeder sind also 18 reell und die 12 anderen imaginär, so zwar, dass die conjugirt imaginären zusammengehören.

Wenn zwei der sechs Elementartheiler imaginär sind, so sind nur zwei der fünfzehn Tetraeder reell. Eins ist, wie die neun Tetraeder in dem vorigen Falle, in sich conjugirt. Die übrigen 12 imaginären Tetraeder sind einander paarweise conjugirt. Von den 30 Kanten werden nur 10 reell, die übrigen 20 imaginär. Von diesen 20 Kanten sind zweimal zwei Kanten conjugirt und zugleich zusammengehörig, während sich die übrigen 16 Kanten in zwei Gruppen theilen, welche conjugirt sind, und deren jede 8 solche Kanten enthält, die paarweise zusammengehören.

In dem dritten und vierten Falle endlich, dass vier oder sechs der Elementartheiler imaginär werden, ist nur eins der fünfzehn Tetraeder reell. Von den 30 Kanten sind 6 reell, die übrigen 24 imaginär. Sie theilen sich in zwei, einander conjugirte Gruppen, deren jede 12 solche Kanten umfasst, welche paarweise zusammengehören. Unter den imaginären Fundamentaltetraedern kommt keins mit nur zwei imaginären Eckpunkten vor. (*n.* 10).

In dem Falle, dass sechs der fünfzehn Fundamentaltetraeder reell sind, gelangen wir von einem der reellen Tetraeder zu einem zweiten, und zwar zu demjenigen, welches mit dem angenommenen die beiden Kanten P_3, P_6 gemein hat, wenn wir setzen:

$$p_1 + p_4 = x_1, \quad p_2 + p_5 = x_2,$$
$$p_1 - p_4 = ix_4, \quad p_2 - p_5 = ix_5,$$

und:

$$x_1 - ix_5 = 2p_1', \quad x_2 + ix_4 = 2p_2',$$
$$x_1 + ix_5 = 2p_4', \quad x_2 - ix_4 = 2p_5'.$$

Es kommt dies auf die directe Transformation hinaus:

$$2p_1' = p_1 + p_4 - p_2 + p_5,$$
$$2p_4' = p_1 + p_4 + p_2 - p_5,$$
$$2p_2' = p_1 - p_4 + p_2 + p_5,$$

$$2p_5' = -p_1 + p_4 + p_2 + p_5,$$
$$2p_3' = 2p_3,$$
$$2p_6' = 2p_6,$$

und dieser entspricht die folgende Transformation der Punktcoordinaten $(z_1 \cdots z_4)$:

$$\sqrt{2}z_1' = z_1 + z_4, \quad \sqrt{2}z_2' = z_2 - z_3,$$
$$\sqrt{2}z_4' = -z_1 + z_4, \quad \sqrt{2}z_3' = z_2 + z_3.$$

Indem wir auch in dem Falle imaginärer Tetraeder ganz dieselben Umformungen anwenden können, erhalten wir den Satz, dass die vier Seitenebenen zweier Fundamentaltetraeder, welche sich nach einer Kante schneiden, so wie die vier Eckpunkte, welche auf einer Kante liegen, einander harmonisch conjugirt sind.

25. Wir gehen dazu über, die geometrische Bedeutung der Gleichungsform (26) zu untersuchen. Wir nehmen dabei der Einfachheit wegen an, dass alle Elementartheiler reell sind, dass also in (26) nur positive Zeichen vorkommen.

Es sei eine Linie des Complexes bekannt, deren Coordinaten sind:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6.$$

Dann gehören demselben Complexe eine Reihe anderer gerader Linien an, deren Coordinaten durch dieselben sechs Grössen zunächst nur in anderer Reihenfolge, gegeben werden. Wir können p_1 mit p_4, p_2 mit p_5, und p_3 mit p_6 vertauschen. So erhalten wir sieben neue gerade Linien, welche ebenfalls Linien des Complexes sind:

$$p_4, p_2, p_3, p_1, p_5, p_6,$$
$$p_1, p_5, p_6, p_4, p_2, p_3,$$
$$p_4, p_5, p_6, p_1, p_2, p_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Wir erhalten weitere Linien des Complexes, wenn wir die Vorzeichen von p_1 und p_4, von p_2 und p_5, von p_3 und p_6 ändern. So bekommen wir, einer jeden der vorstehenden acht Linien entsprechend, drei neue, die ebenfalls dem Complexe angehören. Im Ganzen also sind, wenn *eine* Linie gegeben ist, damit 32 bestimmt.

Diese Zahl leitet sich, wie folgt, unmittelbar ab. An die Stelle von $+p_1$ kann $+p_4$, $-p_1$, $-p_4$ treten; ebenso an die von $+p_2$ und $+p_3$ bezüglich $+p_5$, $-p_2$, $-p_5$ und $+p_6$, $-p_3$, $-p_6$. Wir erhalten also

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Combinationen und dem entsprechend $\frac{64}{2} = 32$ gerade Linien, weil

ein Wechsel der Vorzeichen aller Coordinaten die durch dieselbe dargestellte gerade Linie nicht ändert.

Die Beziehung zwischen diesen 32 geraden Linien ist eine gegenseitige. Sie lässt sich geometrisch durch diejenigen 10 Flächen des zweiten Grades vermitteln, deren jede 12 Kanten des Systemes der 30 Kanten der Fundamentaltetraeder enthält (*n.* 23). Eine beliebige dieser Flächen ist mit Bezug auf ein passend gewähltes Fundamentaltetraeder dargestellt durch die Gleichung:

$$z_1 z_2 + z_3 z_4 = 0,$$

wo $z_1 \ldots z_4$ Punktcoordinaten bedeuten mögen. Dann entspricht der willkürlich angenommenen geraden Linie mit den Coordinaten:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6,$$

in Bezug auf diese Fläche eine zweite als Polare, deren Coordinaten sind:

$$p_4, p_2, -p_3, p_1, p_5, -p_6;$$

und dies ist eine der vorstehend aufgeführten 32 geraden Linien. So liefert jede dieser 32 Linien in Bezug auf jede der 10 Flächen eine gerade Linie als Polare, welche selbst in der Reihe der 32 Linien enthalten ist.

Wir können sagen, *dass mit Bezug auf jede dieser zehn Flächen zweiten Grades der gegebene Complex sich selbst reciprok ist*, das heisst: einer jeden Linie des Complexes entspricht in Beziehung auf jede dieser Flächen eine andere Linie desselben als Polare, oder mit andern Worten: dem von Complexlinien, die durch einen festen Punkt gehen, gebildeten Kegel entspricht mit Bezug auf jede der vorstehend genannten Flächen eine ebene Curve, die selbst wieder von Linien des Complexes umhüllt wird.

Die Bestimmung dieser zehn Flächen ist unabhängig von den in die Gleichung (26) eingehenden Constanten.

26. Die Gleichungsform (26) giebt eine geometrische Construction der Complexe des zweiten Grades. Wir können zunächst diese Form auf die folgende Gestalt bringen:

$$2P_1P_4 + 2P_2P_5 + 2P_3P_6 = 0, \tag{27}$$

wo $P_1 \ldots P_6$ lineare Complexe bezeichnen. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur jedesmal das Aggregat der Glieder:

$$A_{x,x+3}(p_x^2 + p_{x+3}^2) + 2B_{x,x+3}p_x \cdot p_{x+3}$$

in das Product der beiden Linearfactoren:

$$2(\alpha p_x + \beta p_{x+3}) \cdot (\beta p_x + \alpha p_{x+3})$$

aufzulösen, wo α, β sich durch die Gleichungen bestimmen:

$$2\alpha\beta = A_{x,x+3}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = B_{x,x+3}.$$

Die Complexe $P_1 \ldots P_6$ lassen sich vermöge des Coordinatentetraeders und jedesmal einer ihnen angehörigen geraden Linie, oder allgemeiner, durch fünf ihrer Linien linear construiren*).

Man bestimme die sechs Ebenen, welche einem beliebigen Punkte des Raumes in Bezug auf diese sechs linearen Complexe entsprechen. Wir mögen diese Ebenen ebenfalls mit dem Symbole $P_1, \ldots, P_6$ bezeichnen. Dann lassen sich diejenigen beiden Kanten, nach welchen der Kegel zweiter Ordnung, welcher von den Linien des gesuchten Complexes in dem angenommenen Punkte gebildet wird, eine beliebige dieser Ebenen, etwa P_1, schneidet, als Durchschnitt dieser Ebene mit dem Kegel:

$$P_2 P_5 + P_3 P_6 = 0,$$

welcher durch zwei projectivische Ebenenbüschel, etwa:

$$P_2 + \lambda P_6, \quad P_3 - \lambda P_5,$$

gegeben ist, construiren. Eine dreimalige Wiederholung dieser Construction liefert sechs Kanten des fraglichen Complexkegels. Fünf derselben reichen hin, um denselben zu bestimmen.

27. Wir mögen zum Schlusse die Art der ausgezeichneten Beziehung untersuchen, in welcher die Fundamentaltetraeder zu dem Complexe stehen.

Einer beliebigen geraden Linie ist, mit Bezug auf einen Complex des zweiten Grades, nach Pluecker, eine zweite als Polare zugeordnet**). Dieselbe steht zu der ersten in der doppelten Beziehung, dass sie einmal der geometrische Ort ist für die Pole der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Curven, die in den durch sie hindurch gelegten Ebenen von Linien des Complexes umhüllt werden; dann, dass sie umhüllt wird von den Polarebenen der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Kegel, die in den Punkten derselben von Linien des Complexes gebildet werden. Dieses Verhältniss zwischen den beiden Linien ist indess kein gegenseitiges. Zu der zweiten Linie gehört eine dritte, u. s. f. Abgesehen von den Linien des Complexes, die sich selbst conjugirt sind, wird es nur eine endliche Anzahl von geraden Linien geben, die selbst wieder die Polaren ihrer Polaren sind.

Wenn wir in der Gleichung (26) beliebig solche drei Coordinaten

---

*) Pluecker's „Neue Geometrie" n. 29.

**) Pluecker's „Neue Geometrie", n. 172. — Das Verhältniss einer geraden Linie zu ihrer Polaren lässt sich auch mit Hülfe der in der 12. Nummer erwähnten einfach unendlichen Schaar linearer Polarsysteme darstellen, welche der angenommenen geraden Linie in Bezug auf den gegebenen Complex des zweiten Grades entsprechen. Die angenommene gerade Linie und ihre Polare sind die Directricen der durch die *eingliedrige* Gruppe der linearen Polarcomplexe bestimmten Congruenz. (Pluecker, a. a. O.).

verschwinden lassen, welche sich auf drei, sich in einem Punkte schneidende oder in einer Ebene liegende Kanten des Fundamentaltetraeders beziehen, so erhalten wir zur Darstellung des von dem Eckpunkte ausgehenden Kegels, bezüglich der in der Seitenfläche liegenden Curve eine Gleichung, die nur die Quadrate der übrigen drei Variabeln enthält. Kegel und Curve sind also bezüglich auf ein in Bezug auf dieselben sich selbst conjugirtes Dreikant und Dreieck bezogen. Daraus folgt, dass die im Complexe einer beliebigen Kante eines Fundamentaltetraeders zugeordnete Polare die gegenüberstehende Kante desselben Fundamentaltetraeders ist, dass also die Fundamentaltetraeder in einer solchen Weise ausgewählt sind, *dass je zwei gegenüberstehende Kanten derselben gegenseitig mit Bezug auf den Complex conjugirt sind.*

28. Nun lässt sich zeigen, dass ausser den dreissig Kanten der fünfzehn Fundamentaltetraeder keinen anderen Linien mehr die Eigenschaft zukommt, sich gegenseitig in Bezug auf den gegebenen Complex zu entsprechen.

Denn es seien zwei derartige Linien gegeben. Wir wählen sie zu gegenüberstehenden Kanten eines Coordinatentetraeders und beziehen den Complex auf dasselbe. Dann fehlen in seiner Gleichung, wenn wir die beiden gegebenen Kanten mit P_1 und P_4 bezeichnen, die acht Glieder mit den doppelten Producten:

$$p_1 p_2,\ p_1 p_3,\ p_1 p_5,\ p_1 p_6,$$
$$p_4 p_2,\ p_4 p_3,\ p_4 p_5,\ p_4 p_6,$$

und es treten also p_1 und p_4 nur in der Verbindung:

$$a_{11} p_1^2 + 2 a_{14} p_1 p_4 + a_{44} p_4^2$$

auf. Wenn wir also die beiden Formen:

$$P = \sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3}$$

und:

$$\Omega (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),$$

wie wir statt Ω schreiben wollen, den Gleichungen (25) entsprechend, auf zwei Formen transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten, so wird es gestattet sein, diese Transformation mit den beiden Formenpaaren:

$$2 p_1 p_4 \text{ und } a_{11} p_1^2 + 2 a_{14} p_1 p_4 + a_{44} p_4^2$$

und:

$$2 p_2 p_5 + 2 p_3 p_6 \text{ und } \Omega (0, p_2, p_3\ 0, p_5, p_6)$$

einzeln vorzunehmen. Damit ist der Beweis geführt, dass die Kanten P_1, P_4 des angenommenen Coordinatentetraeders zu dem System der

30 Kanten der Fundamentaltetraeder gehören. Und somit haben wir den Satz:

Es sei ein Complex gegeben, dessen zugehörige Elementartheiler sämmtlich linear und von einander verschieden sind. Dann giebt es 30 *gerade Linien, welche einander mit Bezug auf den Complex gegenseitig conjugirt sind. Je nachdem von den linearen Elementartheilern* 0, *oder* 2, *oder mehr imaginär ausfallen, sind von diesen* 30 *geraden Linien bezüglich* 18, *oder* 10, *oder* 6 *reell.**)

*) An meine Dissertation schliessen sich als Fortsetzung derselben zunächst meine eigenen Arbeiten in Bd. II dieser Annalen (p. 198 ff. und 366 ff., 1869).

Weiterhin wolle man etwa folgende Publicationen vergleichen:

Zunächst, was *lineare Transformation der Liniencoordinaten* betrifft: eine Mittheilung von Hemming in der Züricher Vierteljahrsschrift, Bd. 16 (1871), dann insbesondere die darstellende Geometrie von Fiedler (2. Aufl. 1875) oder desselben Verfassers Bearbeitung der Salmon'schen Raumgeometrie (Bd. I, 3. Aufl. 1879),

Ferner, was *Classification der Complexe zweiten Grades* angeht: die Abhandlung von Weiler im VII. Bande der mathem. Annalen (1873), sodann die neueren Untersuchungen von Segre (Memorie della R. Accademia di Torino, ser. II, t. 36, 1883). Hieran schliessen sich die specielleren Arbeiten von Hirst (Collectanea mathematica in memoriam Chelini, 1881, oder Proceedings of the London Mathematical Society, t. 10, 1879), und von Segre und Loria, bez. von Segre im XXIII. Bande dieser Annalen (1883).

Endlich, *geometrische Erzeugung der Complexe zweiten Grades* betreffend: die Doctordissertation von Schur (Berlin 1879, oder auch Mathem. Annalen, Bd. XV), Fiedler im 24. Bande der Züricher Vierteljahrsschrift (1879) oder im 2. Bande der Salmon'schen Raumgeometrie (3. Aufl. 1880), W. Stahl im 93. Bande des Journals für Mathem. (1882), Weiler im 27. Bande der Zeitschrift für Math. und Physik (1882) sowie im 95. Bande des Journals für Math. (1883). Speciell die *Polarentheorie* der Complexe zweiten Grades ist unter geometrischen Gesichtspunkten von Bertini (Giornale di matematiche, vol. 17, 1879), sodann von W. Stahl behandelt worden (Journal für Math., Bd. 94, 1883).

Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten*).

Von

Sophus Lie in Christiania

und

Felix Klein in Leipzig.

Die Kummer'sche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten ist bekanntlich**) für einfach unendlich viele Complexe des zweiten Grades Singularitätenfläche, d. h. diejenige Fläche, welche der geometrische Ort ist für solche Punkte, deren Complexkegel in zwei Ebenen zerfallen ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die umhüllt wird von solchen Ebenen, deren Complexcurve sich in zwei Punkte aufgelöst hat. Die Betrachtung dieser Complexe zweiten Grades führt fast unmittelbar zu der Bestimmung der Haupttangentencurven der Fläche, wie im Nachstehenden gezeigt werden soll.

1. Aus der einfach unendlichen Zahl der zu der Fläche gehörigen Complexe zweiten Grades heben wir einen heraus.

Die demselben innerhalb einer Tangentialebene der Fläche entsprechende Complexcurve hat sich in zwei Punkte aufgelöst. Diese beiden Punkte sind diejenigen, in denen die in der Tangentialebene enthaltene Durchschnittscurve vierter Ordnung mit der Fläche von einer bestimmten, durch den Berührungspunkt gehenden Geraden, die dessen zugeordnete singuläre Linie genannt wird, noch ausser in diesem Berührungspunkte geschnitten wird.

Man kann nun nach denjenigen Punkten der Fläche fragen, deren zugeordnete singuläre Linie eine Haupttangente der Fläche ist. Die übrigen Tangenten der Fläche in einem solchen Punkte gehören offenbar

*) Der Berliner Academie am 15. December 1870 vorgelegt durch Herrn Kummer.

**) cf. Pluecker: Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. (B. G. Teubner 1868, 69.) n. 310 ff. Vergl. auch, hier und im Folgenden, Klein: Zur Theorie der Complexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. II, 2.

auch dem Complexe an. Andererseits sind diese Complexgeraden die einzigen, welche die Fläche berühren, ohne zugleich singuläre Linien des Complexes zu sein. Betrachten wir nun in einer beliebigen Ebene den Complexkegelschnitt und die Durchschnittscurve vierter Ordnung mit der Fläche. Dieselben berühren sich in vier Punkten, und die Tangenten in diesen Punkten sind die in der Ebene gelegenen singulären Linien*). Ausser diesen doppelt zu zählenden Tangenten haben die beiden Curven, als bez. von der 2ten und 12ten Classe, noch 16 Tangenten gemein. Die Berührungspunkte derselben mit der Durchschnittscurve vierter Ordnung sind Punkte der gesuchten Beschaffenheit.

Die Punkte der Kummer'schen Fläche, deren zugeordnete singuläre Linien Haupttangenten der Fläche sind, bilden also eine Curve der 16ten Ordnung.

2. *Die so bestimmte Curve ist nun eine Haupttangentencurve der Fläche.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass zwischen den durch eine Complexlinie, — welche nur keine singuläre Linie sein darf, — hindurchgelegten Ebenen und den Berührungspunkten der in denselben enthaltenen Complexcurven mit der Linie projectivisches Entsprechen stattfindet. Hieraus schliesst man, dass einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes auf der Linie eine Drehung der Ebene entspricht, deren Grösse von derselben Ordnung des Unendlich-Kleinen ist.

Nun ist die Verbindungslinie zweier consecutiver Punkte der eben bestimmten Curve eine Complexlinie, ohne zugleich singuläre Linie desselben zu sein. Die beiden Tangentialebenen in den beiden Punkten enthalten dem Complexe angehörige Strahlbüschel, deren Scheitel diese Punkte sind. Die beiden Tangentialebenen sind also zwei Ebenen, deren Complexcurven die angenommene Tangente in zwei consecutiven Punkten berühren. Hieraus folgt, nach der vorstehenden Bemerkung, dass, wenn man auf der Curve fortschreitet, die Tangentialebene der Fläche sich um die Tangente der Curve dreht.

Das aber ist die charakteristische Eigenschaft der Haupttangentencurven einer Fläche; unsere Behauptung ist also erwiesen.

Da der Begriff der Haupttangentencurve, sowie der des Complexes, sich selbst dualistisch ist, folgt, dass die dualistisch entgegenstehenden Singularitäten der Curve einander gleich sind. Insbesondere *ist ihre Classe gleich ihrer Ordnung, also gleich* 16.

Da ferner die Curve sich selbst dualistisch in einziger Weise durch den Complex bestimmt ist, geht sie, wie dieser, durch ein System linearer, sowie reciproker Transformationen in sich über**). Man

*) Pluecker: Neue Geometrie. n. 318.

**) cf. die bereits citirte Abhandlung: Zur Theorie etc. n. 13.

schliesst hieraus eine Reihe von Eigenschaften derselben, die wir hier nicht weiter verfolgen können.

3. Auf die auseinandergesetzte Weise erhalten wir einem jeden der einfach unendlich vielen Complexe zweiten Grades, die zu derselben Kummer'schen Fläche gehören, entsprechend eine Haupttangentencurve. Hiermit hat man aber *alle* Haupttangentencurven, wofern nicht etwa Umhüllungscurven derselben existiren, da man für jeden Punkt der Fläche einen der Complexe angeben kann, der die eine oder die andere der beiden Haupttangenten in demselben zur singulären Linie hat.

Unter den zu der Fläche gehörigen Complexen zweiten Grades befinden sich sechs, doppelt zu zählende, lineare Complexe. Als die singulären Linien derselben sind die Doppeltangenten der Fläche anzusehen, so zwar, dass jedem der sechs Complexe eines der sechs von den Doppeltangenten gebildeten Systeme angehört. *Entsprechend diesen Complexen giebt es sechs ausgezeichnete Haupttangentencurven.* Dieselben sind, wie sich durch dieselben Betrachtungen ergiebt, durch die wir Ordnung und Classe der allgemeinen Curve bestimmt haben, nur noch von der 8ten Ordnung und der 8ten Classe.

3. Wir gehen jetzt dazu über, die Singularitäten der Haupttangentencurven zu bestimmen. Hierzu gelangen wir, indem wir der allgemeinen Theorie solcher Curven die folgenden Sätze entlehnen.

Die Haupttangentencurven einer beliebigen Fläche haben in den Knotenpunkten derselben Spitzen.

Ueberhaupt haben sie Spitzen in den Punkten der parabolischen Curve, vorausgesetzt, dass diese nicht selbst Haupttangentencurve ist. In dem letzteren Falle ist sie Umhüllungscurve für die übrigen Haupttangentencurven. Dies gilt besonders, wenn die parabolische Curve aus ebenen Berührungscurven besteht.

Ferner haben die Haupttangentencurven in den Durchschnittspunkten mit der Curve vierpunktiger Berührung stationäre Tangenten, wofern die Curve vierpunktiger Berührung nicht zugleich parabolische Curve ist, was eine besondere Betrachtung verschiedener Fälle verlangt, die wir hier nicht nöthig haben.

Endlich können die Haupttangentencurven ausser in den angegebenen Fällen keine Spitzen und keine stationären Tangenten haben.

In unserem Falle hat man 16 Knotenpunkte, in denen also die Haupttangentencurven Spitzen haben.

Die parabolische Curve, welche von der 32ten Ordnung sein muss, besteht aus den 16 Berührungskegelschnitten in den 16 Doppeltangentialebenen der Fläche. Sie ist also Umhüllungscurve der Haupttangentencurven. Die 16 Ebenen sind dabei stationäre Ebenen dieser Curven, wie dies überhaupt die Ebenen ebener Berührungscurven sind.

Man überzeugt sich nun leicht, dass die Haupttangentencurven in jedem Knotenpunkte nur eine Spitze haben und nur je einmal die Doppeltangentialebenen stationär berühren. Die Curve kann nämlich mit der Doppeltangentialebene nur 16 Punkte gemein haben; 4 davon kommen auf die stationäre Berührung, und 12 auf die 6 Spitzen in den 6 in der Ebene liegenden Knotenpunkten.

Die Haupttangentencurven haben hiernach 16 (*in die Knotenpunkte der Fläche fallende*) *Spitzen und* 16 (*mit den Doppeltangentialebenen derselben identische*) *stationäre Ebenen.*

Die Curve vierpunktiger Berührung besteht in unserem Falle einmal aus den 16 Berührungskegelschnitten, die hier nicht weiter in Betracht kommen, da sie schon erledigt sind. Andererseits besteht sie aus den sechs ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung, die den 6 linearen Complexen angehören. Es geht dies daraus hervor, dass die singulären Linien dieser Complexe, wie schon angeführt, Doppeltangenten der Fläche sind. Weitere Curven umfasst die Curve vierpunktiger Berührung nicht, da die aufgezählten zusammen die richtige Ordnung, 80, besitzen.

Wir müssen jetzt die Zahl der Durchschnittspunkte einer Haupttangentencurve mit den 6 ausgezeichneten bestimmen.

Diese Durchschnittspunkte sind dadurch charakterisirt, dass die vierpunktig berührende Haupttangente eine Linie des Complexes zweiten Grades ist, dem die gegebene Haupttangentencurve zugehört. Die in den Punkten einer der 6 Curven vierpunktig berührenden Haupttangenten bilden aber eine Linienfläche von der 8ten Ordnung, da der vollständige Durchschnitt derselben mit der Kummer'schen Fläche aus der gewählten Curve besteht, welche vierfach zählt. Mit einer solchen Fläche hat aber der Complex zweiten Grades 16 Linien gemein. Man erhält also, jeder der 6 Curven entsprechend, 16 Durchschnittspunkte. Wir haben somit den Satz:

Die Haupttangentencurven haben $6 \cdot 16 = 96$ *stationäre Tangenten.*

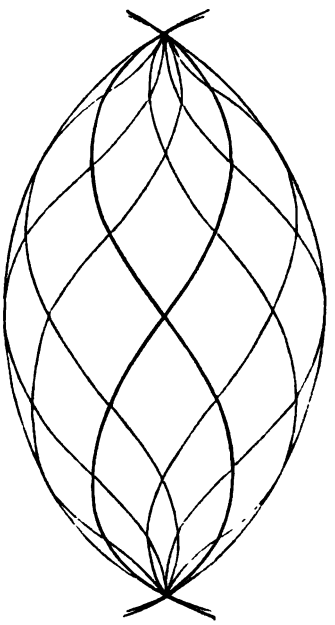
Fügen wir noch hinzu, dass die Haupttangentencurven keinen wirklichen Doppelpunkt und also auch keine wirkliche Doppel-Osculationsebene besitzen können, da in keinem Punkte der Kummer'schen Fläche, der nicht auf der parabolischen Curve liegt, die beiden Haupttangenten demselben Complexe als singuläre Linien angehören, so können wir die sämmtlichen Singularitäten derselben, von denen die dualistisch entgegenstehenden gleich sind, ohne Weiteres bestimmen. Insbesondere finden wir: den Rang $= 48$, die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte $= 72$, die Ordnung der Doppelcurve der Developpable $= 952$, das Geschlecht $= 17$.

5. Für die 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven wird die Zahl der Spitzen und stationären Osculationsebenen gleich Null. Eine solche

Curve geht nämlich durch jeden der Doppelpunkte einfach hindurch und hat in ihm eine der 6 ihn enthaltenden Doppeltangentialebenen zur Osculationsebene. Man hat sich den stetigen Uebergang zwischen den allgemeinen Curven und diesen besonderen so vorzustellen, dass die letzteren doppelt zählen und aus der Vereinigung je zweier in einer Spitze zusammenstossender Zweige der übrigen entstanden sind. Darum sinkt Ordnung und Classe auf die Hälfte. Hiernach müsste auch der Rang halb so gross sein, wie der der anderen, also gleich 24. Das aber findet man auch, wenn man die Zahl der stationären Tangenten berechnet. Für dieselbe kommt nämlich jetzt 40, indem die Curve jede der anderen nicht mehr 16mal, sondern, weil sie 2mal zählt, nur 8mal schneidet, und das nicht 6mal, sondern nur 5mal geschieht.

Wir finden weiter: die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte gleich 16, die Ordnung der Doppelcurve der Developpable gleich 200, das Geschlecht gleich 5.

6. Wie man sich die Aufeinanderfolge der Haupttangentencurven zu denken hat, ist in der nebenstehenden Zeichnung für den Fall, dass die 6 zugehörigen linearen Complexe reell sind, schematisch dargestellt.



In diesem Falle haben nämlich die Theile der Fläche, für welche die Haupttangenten reell werden, die Gestalt eines von zwei Kegelschnittstücken begrenzten Segmentes, das sich von einem Knotenpunkte nach einem anderen hinzieht. Die beiden begrenzenden Curvenstücke gehören den Berührungskegelschnitten in denjenigen beiden Doppeltangentialebenen der Fläche an, welche beide Knotenpunkte zugleich enthalten.

Innerhalb eines solchen Segmentes verlaufen nun zunächst zwei der sechs ausgezeichneten Haupttangentencurven. Dieselben gehören denjenigen zwei der sechs linearen Complexe an, denen in den zwei Knotenpunkten, zwischen denen sich das Segment erstreckt, die beiden dasselbe begrenzenden Doppeltangentialebenen entsprechen. Die betreffenden Curven sind in der Figur stärker ausgezogen. Dieselben haben eine Sförmige Gestalt. Sie ziehen sich von dem einen Knotenpunkte zu dem anderen hin, indem sie in jedem

eine der beiden Begrenzungscurven berühren. Ausser in den beiden Knotenpunkten schneiden sich dieselben in einem beiden gemeinsamen Wendepunkte, der den Mittelpunkt der Zeichnung bildet. — Uebrigens setzen sich diese Curven über die beiden Knotenpunkte hinaus auf weitere, ähnlich gestaltete Segmente der Fläche fort.

Von den übrigen Haupttangentencurven, deren drei gezeichnet sind, weiss man, dass sie in den Knotenpunkten eine Spitze haben, dass sie jeden der beiden begrenzenden Kegelschnitte einmal berühren, und dass sie dort, wo sie, ausser in den beiden Knotenpunkten, die beiden ausgezeichneten Curven treffen, einen Wendepunkt besitzen. Hiernach wird es leicht sein, ihrem Verlaufe in der Figur zu folgen*).

---

7. Die im Vorstehenden gegebene Bestimmung der Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche, welche wir an die Betrachtung der zugehörigen Complexe zweiten Grades geknüpft haben, kann noch unter einem anderen Gesichtspunkte gefasst werden, indem man von einem der sechs unter denselben befindlichen linearen Complexe ausgeht. Die Fläche ist nämlich Brennfläche eines diesem Complexe angehörigen Strahlensystems: des einen Systems ihrer Doppeltangenten. Wir wollen nun zeigen, *dass das Problem: die Haupttangentencurven auf der Brennfläche eines einem linearen Complexe angehörigen Strahlensystems zu bestimmen, identisch ist mit dem anderen: die Krümmungscurven einer gewissen Fläche zu finden.* In unserem Falle wird diese Fläche die Fläche vierter Ordnung, welche den unendlich weit entfernten imaginären Kreis doppelt enthält; und da man deren Krümmungscurven kennt, so erhält man eine Bestimmung der Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche, die natürlich mit der oben gegebenen übereinstimmt.

Man beziehe nämlich die Linien des gegebenen linearen Complexes eindeutig auf die Punkte des Raumes, indem man, vermöge der gegebenen linearen Gleichung und der zwischen den Liniencoordinaten bestehenden Identität zwei der sechs Liniencoordinaten, die sich auf zwei sich schneidende Kanten des Tetraëders beziehen, als Functionen

---

*) Man vergleiche hierzu die weitergehenden Untersuchungen von Hrn. Rohn im XVIII. Bande dieser Annalen (p. 99 ff.: die Gestalten der Kummer'schen Fläche, 1881), sowie auch den früheren Aufsatz desselben Verfassers im XV. Bande daselbst (p. 315 ff.: Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche, 1879). Die Haupttangentencurven haben, wie Hr. Rohn ausführlich zeigt, für die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen eine specifische Bedeutung.

[Januar 1884.]

der vier übrigen auffasst und diese letzten als Punktcoordinaten interpretirt*).

Man findet, dass dann allen Linien des Complexes, welche durch einen Punkt hindurchgehen, die Punkte einer geraden Linie entsprechen, und dass diese gerade Linie einen festen Kegelschnitt schneidet, der für die Abbildung fundamental ist. Das Strahlensystem, welches dem linearen Complexe mit einem Complexe $n$ten Grades gemein ist, bildet sich ab als Fläche $2n$ten Grades, welche den Kegelschnitt $n$fach enthält. Insbesondere ist das Bild einer geraden Linie, d. h. der dieselbe schneidenden Complexlinien, eine Fläche zweiten Grades, die durch den Kegelschnitt geht.

Wir wollen fortan für den fundamentalen Kegelschnitt den unendlich weit entfernten imaginären Kreis wählen, so dass also das Bild einer geraden Linie eine Kugel wird.

Sei jetzt eine beliebige Fläche gegeben und auf derselben eine Krümmungscurve. Die Fläche ist das Bild eines dem linearen Complexe angehörigen Strahlensystems, die Curve das Bild einer in demselben enthaltenen geradlinigen Fläche. Wir behaupten, *dass diese geradlinige Fläche die Brennfläche des Strahlensystems nach einer Haupttangentencurve berührt.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass, rückwärts, das Bild dieser Brennfläche dasjenige Strahlensystem ist, dessen Linien gleichzeitig die gegebene Fläche berühren und den unendlich weit entfernten imaginären Kreis schneiden. Einer jeden geraden Linie, welche die Brennfläche berührt, entspricht hiernach eine die gegebene Fläche berührende Kugel. Insbesondere entspricht einer Haupttangente eine stationär berührende Kugel.

Eine der beiden in einem beliebigen Punkte der Krümmungscurve stationär berührenden Kugeln enthält aber drei consecutive Punkte der Krümmungscurve. Also schneidet eine der beiden Haupttangenten der Brennfläche in einem Berührungspunkte mit der umgeschriebenen Linienfläche drei consecutive Erzeugende derselben, mit anderen Worten, ist eine Haupttangente auch der letzteren.

Man hat aber allgemein den Satz: Wenn zwei Flächen sich nach einer Curve berühren und in jedem Punkte dieser Curve ist ihnen eine Haupttangente gemeinsam, so ist die Curve eine Haupttangentencurve.

Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Wenn man nun insbesondere für die gegebene Fläche eine Fläche vierter Ordnung nimmt, die den unendlich weit entfernten imaginären

*) Dieses Abbildungsverfahren ist bereits gelegentlich von Hrn. Nöther angegeben worden: Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Veränderlichen. Gött. Nachrichten 1869.

Kreis doppelt enthält, — eine solche ist das Bild eines dem linearen Complexe angehörigen Strahlensystems zweiter Ordnung und Classe, — so erhält man auf diesem Wege die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche, welche die Brennfläche eines solchen Strahlensystems ist*).

Die in der letzten Nummer enthaltenen Betrachtungen sind es gewesen, durch die der Eine von uns (Lie)**) zuerst zu der Bemerkung geführt wurde, dass die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche algebraische Curven der 16ten Ordnung sind; hierauf fand der Andere (Klein) die Beziehung dieser Curven zu den Complexen zweiten Grades, die zu der Kummer'schen Fläche gehören, und bestimmte, wie im Vorstehenden auseinandergesetzt ist, ihre Singularitäten.

---

*) Die hier im Texte angedeuteten Entwickelungen sind später von Hrn. Lie in dessen grosser Abhandlung in Bd. V der Annalen (p. 145 ff., 1871) ausführlich und im Zusammenhange mit allgemeineren Betrachtungen dargelegt worden. Uebrigens wolle man auch meine eigenen dort folgenden Abhandlungen vergleichen (Bd. V, p. 257 ff., p. 278 ff., 1871), insofern dieselben verschiedene auf die Integration der Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche bezügliche Bemerkungen enthalten (siehe insbesondere p. 277, 297). Ich gebe diese beiden Citate um so lieber, als die vorstehend in Nr. 2 und 7 des Textes entwickelten Beweise des Hauptsatzes, trotzdem sie materiell richtig sind, vielleicht in formaler Hinsicht unbefriedigend scheinen können.

[Januar 1884.]

**) Vergl. Lie: Ueber eine Classe geometrischer Transformationen, Berichte der Academie zu Christiania, 1870, oder auch: Sur une transformation géométrique, in den Comptes rendus de l'Académie des Sciences von demselben Jahre (t. 71).

Ueber gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung.*)

Von

F. Klein in Leipzig.

Die Theorie der elliptischen Functionen hat bekanntlich einen doppelten Eingang, indem man entweder mit den *doppeltperiodischen Functionen* oder mit den *Integralen* beginnen kann. Genau dasselbe gilt von gewissen neueren functionentheoretischen Untersuchungen, auf die ich mich hier zu beziehen habe. Einmal handelt es sich dabei um solche Functionen z einer Unabhängigen η, welche ungeändert bleiben, wenn man η einem gewissen discontinuirlichen Systeme linearer Substitutionen unterwirft**); das andere Mal mag man das einzelne z als independente Variable betrachten und η durch die Differentialgleichung dritter Ordnung definiren, der es in Bezug auf z genügt. Diese Differentialgleichung hat die übrigens wohlbekannte Gestalt:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = f(z), \tag{1}$$

die dadurch definirt ist, dass sich die allgemeine Lösung aus einer beliebigen Particularlösung η als willkürliche lineare Function $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ zusammensetzt. Der so bezeichnete Zusammenhang zwischen allgemeiner und particulärer Lösung überträgt sich natürlich auf die verschiedenen Zweige einer und derselben η-Function. Lässt man also z in seinem complexen Gebiete einen geschlossenen Weg beschreiben, d. h. einen solchen Weg, bei dem z selber, wie auch $f(z)$ die rechte Seite von (1), ihren ursprünglichen Werth wiedergewinnen, so wird η diesem Wege entsprechend eine gewisse lineare Substitution erfahren. Das Integral $\int f(z)\cdot dz$ wäre auf diesem Wege um einen Periodicitätsmodul gewachsen. Man kann das Wesen der neuen Functionen geradezu

*) Aus den Sitzungsberichten der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 29. Januar 1883.

**) Man vergl. etwa meinen neuerdings publicirten Aufsatz: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie", Mathematische Annalen Bd. XXI, wo auch die anderweitige Literatur ausführlich angegeben ist.

unter dem Gesichtspunkte betrachten, dass man durchweg die Periodicitätsmoduln der Integrale und jene charakteristischen linearen Substitutionen der η-Function parallelisirt.

Ich habe mich nun gefragt, ob man die hiermit angedeutete Vergleichung nicht noch einen Schritt weiter treiben kann. Schreiben wir

$$d\eta = f(z) \cdot dz, \tag{2}$$

so heisst dies, dass η jedem Incremente dz von z entsprechend um eine bestimmte unendlich kleine Grösse vermehrt wird. Wir lösen die Differentialgleichung (2), indem wir von bestimmter unterer Grenze ausgehend den hiermit bezeichneten Process unendlich oft wiederholen; eben Dieses und nichts Anderes besagt das bestimmte Integral

$$\eta = \int_{z_0}^{z} f(z) \cdot dz + \eta_0 . \tag{3}$$

Der Periodicitätsmodul aber, den η auf geschlossenem Wege erhält, ist nur ein specieller Werth dieses Integrals. — Genau entsprechend versuche ich im Folgenden die Differentialgleichung (1) aufzufassen. Und zwar werde ich zunächst zeigen, dass man dieselbe so interpretiren kann, als definire sie einem jeden Differential dz entsprechend eine auf η bezügliche unendlich kleine *lineare Transformation*. Reiht man sodann mehrere Differentiale dz aneinander, so setzen sich die entsprechenden linearen Transformationen als auf einander folgende Operationen zusammen, und *es erwächst also die allgemeine Lösung der Differentialgleichung* (1), *indem man von einer willkürlichen linearen Function beginnend die letztere mit unendlich vielen durch* (1) *bestimmten infinitesimalen linearen Transformationen componirt.* Die charakteristischen linearen Substitutionen von η aber, die geschlossenen Wegen entsprechen, sind wieder nur ein specielles Ergebniss des allgemeinen Lösungsprocesses.

Um die hiermit angedeuteten Anschauungen zu präcisiren, bedürfen wir zunächst, unter η eine beliebige Function von z verstanden, des Begriffs *der im Punkte $z = z_\nu$ osculirenden linearen Function.* Ich verstehe darunter diejenige lineare Function von z:

$$A_\nu(z) = \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu}, \tag{4}$$

die im Punkte $z = z_\nu$ mit η sowohl dem Werthe nach, als auch im ersten und zweiten Differentialquotienten übereinstimmt. Offenbar hat man (wie man durch Reihenentwickelung nach Potenzen von $(z - z_\nu)$ sofort verificirt):

$$A_\nu(z) = \eta_\nu + \frac{2\eta_\nu'^2 (z - z_\nu)}{2\eta_\nu' - \eta_\nu'' (z - z_\nu)} . \tag{5}$$

Wir bilden uns ferner den Begriff der auf zwei aufeinander folgende Punkte, z_ν und $z_{\nu+1}$, bezüglichen *Uebergangssubstitution*. Ich definire als solche diejenige lineare Substitution, welche entsteht, wenn man in

$$A_\nu^{-1}(z) = \frac{-d_\nu z + b_\nu}{c_\nu z - a_\nu}$$

statt z den Werth

$$A_{\nu+1}(z) = \frac{a_{\nu+1} z + b_{\nu+1}}{c_{\nu+1} z + d_{\nu+1}}$$

einträgt, also in Formel:

$$S_{\nu,\nu+1} = A_\nu^{-1} \cdot A_{\nu+1}. \tag{6}$$

Wir mögen insbesondere die beiden Werthe z_ν und $z_{\nu+1}$, wie es im Folgenden immer geschehen soll, *consecutiv* nehmen, also

$$z_{\nu+1} = z_\nu + dz_\nu \tag{7}$$

setzen. Ich bezeichne dann die betreffende Uebergangssubstitution, die ich in der Weise berechne, dass ich höhere Potenzen von dz_ν vernachlässige, schlechthin mit dem Buchstaben S_ν und nenne sie die zu dem Werthe z_ν gehörige *infinitesimale* Uebergangssubstitution.

Dies vorausgeschickt sage ich nun zunächst, *dass die Differentialgleichung* (1) *für jeden Punkt z_ν die zu diesem Punkte gehörige infinitesimale Uebergangssubstitution der Function η bestimmt.*

Zum Beweise wolle man vor Allem beachten, dass eine Uebergangssubstitution ungeändert bleibt, wenn man η, die zu Grunde liegende Function, durch irgend eine lineare Function von η, $T(\eta)$, ersetzt. Denn die beiden osculirenden linearen Functionen $A_\nu(z)$, $A_{\nu+1}(z)$ verwandeln sich dann in $T \cdot A_\nu(z)$, $T \cdot A_{\nu+1}(z)$ und $S_{\nu,\nu+1}$ in $(A_\nu^{-1} \cdot T^{-1}) \cdot (T \cdot A_{\nu+1})$, was aber nichts Anderes ist, als das alte $S_{\nu,\nu+1}$.

Nun hängen alle Lösungen von (1), wie wir wissen, linear von einander ab. Sie ergeben also alle dieselben Uebergangssubstitutionen und insbesondere dieselben infinitesimalen Uebergangssubstitutionen. Letztere müssen sich also a priori bestimmen lassen. In der That, die infinitesimale Uebergangssubstitution hängt nach dem Früheren von z_ν, dz_ν, η_ν, η'_ν, η''_ν und η'''_ν ab, indem wir nämlich, der Gleichung (7) entsprechend, setzen:

$$\begin{cases} \eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \eta'_\nu \cdot dz_\nu, \\ \eta'_{\nu+1} = \eta'_\nu + \eta''_\nu \cdot dz_\nu, \\ \eta''_{\nu+1} = \eta''_\nu + \eta'''_\nu \cdot dz_\nu, \end{cases} \tag{8}$$

Nun giebt es aber keinen anderen aus η_ν, η'_ν, η''_ν, η'''_ν zusammengesetzten Ausdruck, der bei allen linearen Umänderungen von η ungeändert bliebe, als

(9) $$\frac{\eta_\nu'''}{\eta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}\right)^2,$$

die linke Seite unserer Differentialgleichung (1). *Die infinitesimale Uebergangssubstitution kann also jedenfalls* (ev. nach geeigneter Zufügung eines Factors im Zähler und Nenner) *so geschrieben werden, dass sie nur von z_ν, dz_ν und dem Ausdrucke* (9) *abhängt.* Dass heisst aber ohne Weiteres, dass sie für die durch (1) bestimmte η-Function von Vornherein bekannt ist, was zu beweisen war.

Ich vervollständige diese Ueberlegung durch wirkliche Berechnung der Uebergangssubstitution. Am leichtesten dürfte sich dieselbe so gestalten, dass wir unter allen Lösungen von (1) diejenige, ζ, vorab herausgreifen, für welche die an der Stelle z_ν osculirende lineare Function mit z selbst zusammenfällt, für welche also

(10) $$\zeta_\nu = z_\nu, \quad \zeta_\nu' = 1, \quad \zeta_\nu'' = 0$$

ist. Da allgemein

$$\frac{\zeta_\nu'''}{\zeta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta_\nu''}{\zeta_\nu'}\right)^2 = \frac{\eta_\nu'''}{\eta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}\right)^2,$$

so wird

$$\zeta_\nu''' = \frac{\eta_\nu'''}{\eta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}\right)^2$$

zu setzen sein. Wir berechnen jetzt für ζ die im Punkte $z_{\nu+1} = z_\nu + dz_\nu$ osculirende lineare Function. Dieselbe ist nach (5) und (7):

$$= \zeta_{\nu+1} + \frac{2\zeta_{\nu+1}'^2 (z - z_\nu - dz_\nu)}{2\zeta_{\nu+1}' - \zeta_{\nu+1}''(z - z_\nu - dz_\nu)},$$

und also nach (8) unter Berücksichtigung der besonderen Werthe von ζ_ν, ζ_ν', ζ_ν'':

$$(z_\nu + dz_\nu) + \frac{2(z - z_\nu - dz_\nu)}{2 - \zeta_\nu''' dz_\nu (z - z_\nu - dz_\nu)},$$

oder, unter Wegwerfung höherer Potenzen von dz_ν:

(11) $$\frac{(2 - \zeta_\nu''' z_\nu dz_\nu) z + (\zeta_\nu''' z_\nu^2 dz_\nu)}{(-\zeta_\nu''' dz_\nu) \cdot z + (2 + \zeta_\nu''' z_\nu dz_\nu)}.$$

Dieser Ausdruck ist aber an sich mit der gesuchten Uebergangssubstitution identisch. Denn da $S_\nu = A_\nu^{-1} \cdot A_{\nu+1}$, für unser ζ aber A_ν mit z zusammenfällt, so stimmt S_ν ohne Weiteres mit dem bezüglichen $A_{\nu+1}$ überein. Tragen wir nun noch für ζ_ν''' seinen oben bestimmten Werth ein, *so haben wir als Definition der Uebergangssubstitution S_ν die allgemeine Formel:*

(12) $$S_\nu = \frac{\left(2 - \left(\frac{\eta_\nu'''}{\eta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}\right)^2\right) z_\nu dz_\nu\right) z + \left(\frac{\eta_\nu'''}{\eta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}\right)^2\right) z_\nu^2 dz_\nu}{-\left(\frac{\eta_\nu'''}{\eta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}\right)^2\right) dz_\nu \cdot z + \left(2 + \left(\frac{\eta_\nu'''}{\eta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}\right)^2\right) z_\nu dz_\nu\right)}.$$

Was jetzt die *Lösung* unserer Differentialgleichung (1) auf Grund der hiermit entwickelten Formeln angeht, so denke man sich eine Reihenfolge von Punkten $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots, z_n$ fixirt, die wir allmählich unter Festhaltung der Endpunkte immer dichter werden lassen, indem wir n grösser und grösser nehmen. Sei $A_0(z)$ eine beliebige lineare Function von z, von der wir annehmen, dass sie im Punkte $z = z_0$ die zu berechnende η-Function osculirt, eine Annahme, welche die drei willkürlichen Constanten fixirt, die in der allgemeinen Lösung von (1) enthalten sind. Dann haben wir der Reihe nach vermöge (6):

$$(13)\qquad \begin{cases} A_1(z) = A_0 \cdot S_{0,1}, \\ A_2(z) = A_1 \cdot S_{0,1} \cdot S_{1,2}, \\ - - - - - - - \end{cases}$$

schliesslich:

$$(14)\qquad A_n(z) = A_0 \cdot S_{0,1} \cdot S_{1,2} \cdots S_{n-1,n},$$

oder auch, indem wir n unendlich werden lassen und also die einzelnen Uebergangssubstitutionen $S_{\nu,\nu+1}$ durch die *infinitesimalen* S_ν ersetzen:

$$(15)\qquad A_n(z) = A_0 \cdot S_0 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdots S_n. \qquad (\lim n = \infty)$$

Dies ist die gesuchte Lösung. Denn unsere Formel lässt uns $A_n(z)$, jene lineare Function, welche η an einer beliebig vorgegebenen Stelle $z = z_n$ osculirt, aus dem willkürlich angenommenen, auf $z = z_0$ bezüglichen $A_0(z)$, durch Aneinanderreihung von unendlich vielen unendlich kleinen linearen Transformationen berechnen.

Ich komme nicht noch einmal auf den Vergleich dieser Formel mit der Begriffsbestimmung des bestimmten Integrals, der auf der Hand liegt, zurück. So wie man den Integrationsweg im complexen Gebiete in hohem Maasse abändern kann, ohne den Werth des Integrals zu ändern, so in (15) die Reihenfolge der zwischen z_0 und z_n eingeschalteten Punkte. Und wie das Integral über einen geschlossenen Weg erstreckt einen Periodicitätsmodul liefert, so Formel (15) die auf unsere η-Function bezügliche, dem geschlossenen Wege entsprechende charakteristische lineare Substitution.

Was die *Convergenz* unseres Verfahrens angeht, so braucht dieselbe kaum besonders erläutert zu werden. Denn *materiell* unterscheidet sich unser Verfahren nur unwesentlich von dem gewöhnlichen, eine Differentialgleichung dritter Ordnung zu integriren. Indem wir aus A_ν vermittelst der Uebergangssubstitution S_ν das $A_{\nu+1}$ berechnen, erreichen wir ja, von Termen höherer Ordnung in dz_ν abgesehen, jedesmal dasselbe, als wenn wir den Formeln (8) entsprechend

$$\eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \eta'_\nu \cdot dz_\nu, \quad \eta'_{\nu+1} = \eta_\nu + \eta''_\nu \cdot dz_\nu,$$
$$\eta''_{\nu+1} = \eta''_\nu + \eta'''_\nu \cdot dz_\nu$$

setzen. Es ist nur die *Form* unserer Lösung und die in ihr liegende Auffassung von der *Bedeutung* der Differentialgleichungen (1), welche, wenn überhaupt, einigen Werth beanspruchen dürfte.

Anhang.*)

Ich lasse hier noch einige Bemerkungen folgen, welche bestimmt sind, die vorstehenden Erläuterungen mit anderweitigen Untersuchungen in Verbindung zu setzen und Gesichtspunkte anzudeuten, die mir einen gewissen Werth zu besitzen scheinen.

Wird vermöge der gerade entwickelten Betrachtungen die Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = f(z) \tag{16}$$

mit der unmittelbar integrirbaren Differentialgleichung:

$$\eta' = f(z) \tag{17}$$

zusammengeordnet, so giebt es noch eine dritte Differentialgleichung, welche bei analoger Auffassungsweise mit den genannten beiden zusammengehört.

Nach den Untersuchungen von Lie nämlich**) lassen sich alle Transformatiosgruppen, welche neben einer einzelnen Variabelen continuirlich veränderliche Parameter in endlicher Zahl enthalten, auf einen der drei Typen zurückführen:

$$\eta_1 = \eta + C, \tag{18}$$

$$\eta_1 = a\eta + b, \tag{19}$$

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}. \tag{20}$$

Eliminiren wir hier bei (18) oder bei (20) zwischen η und seinen successiven Differentialquotienten auf möglichst einfache Weise die vorkommenden Constanten, so werden wir gerade zu den Differentialausdrücken

$$\eta' \quad \text{und} \quad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$$

geführt, welche in den linken Seiten von (17) und (16) auftreten. *Entsprechend erwächst die neue hier in Betracht zu ziehende Art von Differentialgleichungen, indem wir aus* (19) *und den beiden Gleichungen, die sich aus* (19) *durch Differentiation ergeben, die beiden Constanten a, b eliminiren.* Auf solche Weise entsteht:

---

*) [Zugefügt Jan. 1884].

**) Siehe etwa Math. Annalen Bd. XVI (1880): *Theorie der Transformationsgruppen*, insbesondere p. 455 daselbst.

$$\frac{\eta_1''}{\eta_1'} = \frac{\eta''}{\eta'};$$

die neuen Differentialgleichungen lauten also:

$$\frac{\eta''}{\eta'} = f(z). \tag{21}$$

Natürlich ist eine solche Differentialgleichung durch zweifache Quadratur vermöge der Formel:

$$\eta = \int dz\, e^{\int f(z)\, dz} \tag{22}$$

aufzulösen. An gegenwärtiger Stelle aber werden wir uns die betreffende Lösung in ähnlicher Weise durch Aufeinanderfolge unendlich vieler unendlich kleiner Operationen (19) construirt denken, wie wir dies betreffs der Gleichungen (16) mit Bezug auf unendlich kleine Substitutionen (20) vorstehend erläutert haben. Wir werden also zunächst für eine beliebige Function η von z an beliebiger Stelle z_ν eine Contactfunction:

$$\eta = A + B(z - z_\nu) \tag{23}$$

construiren (wo A offenbar $= \eta_\nu$, $B = \eta_\nu'$ ist) und nun die *infinitesimale Uebergangstransformation* vom Typus (19) suchen, welche diese Contactfunction in die dem Punkte $z_\nu + dz_\nu$ entsprechende überführt. Diese Uebergangstransformation kann nur von $\frac{\eta''}{\eta'}$ abhängen, in der That finden wir dieselbe:

$$S_\nu = z + \frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}(z - z_\nu)\, dz_\nu. \tag{24}$$

Die Bedeutung einer Differentialgleichung (21) *ist also diese, dass für die durch sie definirte η-Function besagte infinitesimale Uebergangstransformation a priori bekannt ist.* Und nun construiren wir uns die Lösung von (21), indem wir nach dem Schema (15) (siehe oben) unendlich viele derartige unendlich kleine Transformationen an einander reihen.

Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, dass die rechte Seite $f(z)$ unserer Differentialgleichungen eine *algebraische* Function von z sei. Indem wir uns sodann die zugehörige Riemann'sche Fläche (über der z-Ebene) construiren, erhalten wir auf dieser dreierlei η-Functionen, welche die Eigenschaft haben, sich nach Durchlaufung eines beliebigen geschlossenen Weges je nachdem entweder in der Gestalt (18), oder (19), oder (20), zu reproduciren. Die Functionen ersterer Art sind wohlbekannt, es sind die *Integrale algebraischer Functionen* oder kurz gesagt: *die Abel'schen Integrale.* Von den Functionen dritter Art habe ich in meiner schon cititirten Arbeit*) einen be-

*) Mathem. Ann. XXI: *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*, insbesondere p. 182—185.

stimmten einfachen Typus betrachtet, der auf der Riemann'schen Fläche keine anderen Singularitäten, als algebraische, bez. logarithmische Verzweigungen darbietet. Ich bezeichnete eine solche Function dementsprechend mit der *Signatur* (p, n, l_k), wo p das Geschlecht der Riemann'schen Fläche, n die Zahl der Verzweigungspunkte, l_k den Exponenten der einzelnen Verzweigungspunkte angab. In den parallellaufenden Untersuchungen von Poincaré treten noch allgemeinere Fälle dieser Functionen dritter Art auf*). *Aber auch die Functionen zweiter Art sind bereits verschiedentlich behandelt worden.* Hierher gehören die sogenannten *Wurzelfunctionen*, auf welche Riemann im zweiten Theile seiner Abel'schen Functionen (Nr. 26, 27) eingeht, d. h. algebraische Functionen des Ortes, welche sich bei Durchlaufung eines beliebigen auf der Riemann'schen Fläche geschlossenen Weges mit einer Einheitswurzel multipliciren. Allgemein und unter principiellen Gesichtspunkten, die ich sogleich zur Sprache bringen muss, hat die Functionen zweiter Art sodann Hr. Prym in Betracht gezogen (Borchardt's Journal Bd. 70: *Zur Integration der gleichseitigen Differentialgleichungen* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$). Neuerdings endlich hat sich Hr. Appell mit diesen Functionen wiederholt beschäftigt (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences vom 18. April 1881 und vom 23. Oktober 1882, Journal des Mathématiques pures et appliquées, 3. sér., t. 9 (1883): *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce*).

Was die principiellen Gesichtspunkte von Hrn. Prym angeht, so beziehen sich dieselben auf Folgendes. Bekanntlich hat Riemann gefunden, dass man das einzelne Abel'sche Integral auf gegebener Riemann'scher Fläche durch seine Unendlichkeitspunkte und die reellen Theile seiner Periodicitätsmoduln im Wesentlichen (d. h. von der Integrationsconstante abgesehen) vollständig bestimmen könne. Hr. Prym giebt nun (leider ohne Beweis) für solche η-Functionen zweiter Art, deren beliebigen geschlossenen Wegen entsprechende Multiplicatoren jeweils den absoluten Betrag 1 haben, analoge transcendente Bestimmungsstücke an.

Wir werden fragen, ob eine entsprechende transcendente Bestimmungsweise nicht auch bei den η-Functionen dritter Art, insbesondere bei denjenigen von der Signatur (p, n, l_k) möglich sei? Eine solche η-Function enthält, wie ich l. c. zeigte, sofern man die Riemann'sche Fläche und die n Verzweigungspunkte auf ihr als gegeben ansieht,

*) Man vergl. neben den schon in Bd. XXI citirten Publicationen von Poincaré dessen in der Zwischenzeit in den Acta Mathematica erschienene Abhandlungen, sowie verschiedene neue Noten in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

von den Integrationsconstanten abgesehen, noch $(3p - 3 + n)$ willkürliche Constante*). Es ist leicht zu sehen, dass dieselben in der rechten Seite der Differentialgleichung (16) linear auftreten. Andererseits bieten jene „erzeugenden" Substitutionen:

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

welche den Querschnitten der Riemann'schen Fläche und den Umkreisungen der Verzweigungspunkte entsprechen, mit Rücksicht auf die zwischen ihnen bestehende „Fundamentalrelation" und die im Ausgangswerthe η enthaltenen drei willkürlichen Constanten ihrerseits $6p + 2n - 6$ disponible Substitutionscoefficienten dar. *Wir werden fragen, ob man für diese* $6p + 2n - 6$ *Coefficienten in einfacher Weise derart* $(3p + n - 3)$ *Bedingungen aufstellen kann, dass auf gegebener Riemann'scher Fläche bei gegebenen Verzweigungspunkten diesen Bedingungen entsprechend von den Integrationsconstanten abgesehen immer gerade eine* η*-Function* (p, n, l_k) *existirt.*

Es ist mir, wenn es sich um die *allgemeinsten* derartigen Bedingungen handeln soll, bisher nicht gelungen, eine bestimmte Antwort auf diese Frage zu finden. Wohl aber kann man unendlich viele directe Fälle derartiger Bedingungssysteme aufstellen. In der That ist die Bedeutung des l. c. gegebenen „Fundamentaltheorems"**) im Zusammenhange der hier vorgetragenen Betrachtungen gerade diese, uns mit unendlich vielen Fällen brauchbarer Bedingungssysteme bekannt zu machen. Dasselbe besagt z. B., dass auf gegebener Riemann'scher Fläche etc. immer *eine* eindeutig umkehrbare η-Function (p, n, l_k) existirt, welche lauter *reelle* Substitutionscoefficienten darbietet, was in der That, da es sich um das Null-Sein von $(6p + 2n - 6)$ rein imaginären Theilen handelt, mit $(3p + n - 3)$ gewöhnlichen (auf complexe Zahlen bezüglichen) Bedingungen gleichwerthig ist. Aehnlich in allen anderen Fällen.

Auf die hiermit dargelegte Auffassung des Fundamentaltheorems möchte ich Gewicht legen. Denn sie nähert die Betrachtungen von Bd. XXI auf neue Weise dem Riemann'schen Ideenkreise an. Es hat nämlich Riemann in einem verwandten Falle eine Gattung transcendenter Functionen durch Periodicitätsforderungen zu bestimmen gesucht. Es geschieht dies in dem von Hrn. Weber bearbeiteten Fragmente: *Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen*

*) Hierbei sind nur die niedersten Fälle: $p = 0$, $n < 3$ und $p = 1$, $n = 0$ ausgeschlossen.

**) Cf. pag. 206 ff. daselbst. — Was den Beweis des Fundamentaltheorems angeht, so vergl. man eine neuere Mittheilung von Poincaré in den Comptes Rendus vom 21. Mai 1883 (t. 96, p. 1485–87) sowie eine in Bd. IV der Acta Mathematica erscheinende Arbeit: *Sur les groupes des équations linéaires.*

*mit algebraischen Coefficienten**), welches eine Fortsetzung zu der Abhandlung über die Gaussische Reihe**) bildet und gleich dieser aus dem Jahre 1857 stammt. Bei der Differentialgleichung der Gaussischen Reihe genügt es, nur die Art der Verzweigungspunkte zu fixiren. In den höheren Fällen aber bleiben hierüber hinaus Constante disponibel, und es fragt sich Riemann, ob man zu ihrer Fixirung nicht die Coefficienten der Periodicitätssubstitutionen benutzen könne. Der ganze Ansatz ist dem unsrigen um so ähnlicher, als man die Lösungen der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung in ganz ähnlicher Weise durch Aneinanderreihung unendlich kleiner Operationen aufbauen kann, wie wir dies bei den Differentialgleichungen (16), (17), (21) gethan haben. Man muss zu dem Zwecke statt der einen von uns betrachteten Variabelen η nur immer gleichzeitig n linear unabhängige Lösungen:

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

in Betracht ziehen und dann statt der Gruppen (18), (19), (20) die Gesammtheit der homogenen linearen Substitutionen von n Grössen verwenden.

Es ist mit diesen letzten Bemerkungen zugleich eine weitere Ausdehnung unserer Betrachtungen indicirt, indem wir nämlich überhaupt statt der Transformationsgruppen (18)—(29), die sich auf nur eine Variable beziehen, solche mit grösserer Variablenzahl zu Grunde legen und nun diejenigen Differentialgleichungen untersuchen können, welche sich durch Elimination der Parameter ergeben. Ich muss mich in diesem Betracht darauf beschränken, wiederholt auf Lie's allgemeine Untersuchungen über Transformationsgruppen, sowie auf Halphen's Theorie der Differentialinvarianten zu verweisen***).

---

*) Riemann's Werke, p. 357 ff.

**) Werke, p. 62 ff.

***) Siehe insbesondere die Arbeit: *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten*, im Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (Christiania) vom Jan. 1883, wo Lie die Stellung seiner Untersuchungen zu denen von Halphen präcisirt.

Ueber die Aufgabe, alle Elemente einer q-gliedrigen Gruppe binärer Formen zu construiren, wenn q dieser Formen gegeben sind.

Von

H. Thieme in Posen.

Die Herren Lindemann*), Schlesinger**) und Meyer***) haben auf Grund algebraischer Untersuchungen Lösungen der Aufgabe gegeben, aus q binären Formen n. O. alle Elemente der durch diese q Formen bestimmten linearen Gruppe geometrisch zu construiren. Diesen Arbeiten gegenüber ist es für die Leser dieser Zeitschrift vielleicht von Interesse, wenn ich auf eine wohl wenig bekannt gewordene von mir 1879 veröffentlichte Lösung derselben Aufgabe verweise, die nebenbei den Vorzug hat, von jeder algebraischen Grundlage frei zu sein.

Vom algebraischen Standpunkte aus ist das Problem, aus q binären Formen die Elemente der durch sie bestimmten linearen Mannigfaltigkeit zu finden, als gelöst zu betrachten, da dasselbe auf die Lösung einer Reihe von linearen Gleichungen zurückgeführt ist. Indessen dürfte eine directe Verwerthung derselben zur constructiven Lösung des Problems wohl sehr unübersichtliche Resultate liefern. Die Herren Lindemann, Schlesinger und Meyer suchen deshalb eine anschaulichere Lösung zu erhalten, indem sie die betreffenden Constructionen für die Punkte rationaler Curven im ternären, quaternären Gebiete oder in höheren linearen Mannigfaltigkeiten ausführen; dabei erfährt die Geometrie dieser Gebiete selbst neue und interessante Bereicherungen.

Meine Lösung der Aufgabe geht von wesentlich anderen Gesichtspunkten aus und benutzt durchaus andere Methoden. In der Abhandlung „die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme“†) habe ich mit Benutzung des Schlusses von n

*) Math. Ann. Bd. XXIII, p. 111 ff.

**) Math. Ann. XXII, p. 520 ff.

***) Apolarität und rationale Curven. (Tübingen, Fues, 1883).

†) Schlömilch, Ztschft. f. Math. u. Phys. XXIV, p. 221 u. 276.

auf $(n+1)$ in der Construction der Systeme erster Polaren eine Grundlage für die Behandlung der Flächen $(n+1)$. O. gegeben unter der alleinigen Voraussetzung, dass die entsprechenden Fragen für Flächen n. O. schon gelöst sind, wie dies ja auch für $n=2$ der Fall ist. Unter dieser Voraussetzung habe ich dort der Reihe nach construirt eine einzelne Fläche $(n+1)$. O. (§ 1), dann aus 2 Flächen $(n+1)$. O. das durch sie bestimmte Büschel (§ 2), aus 3 Flächen das durch sie bestimmte Bündel (§ 3), aus 4 Flächen das durch sie bestimmte Gebüsch und allgemein aus $(r+1)$ gegebenen Flächen die durch sie bestimmte lineare r-fache Mannigfaltigkeit von Flächen $(n+1)$. O. (§ 4).

Die dort durchgeführten Constructionen und Schlüsse gelten, wie ich das in der Einleitung der Arbeit betont und in späteren Theilen der Arbeit benutzt habe, ganz genau in derselben Weise für Flächen, für ebene Curven und für binäre Formen. Für binäre Formen vereinfacht sich die Sache noch, und man braucht nur einen Theil der durchgeführten Betrachtungen und zwar, wie ich für etwaige Leser meiner Arbeit angebe, § 1 bis S. 223 Z. 9, § 2 bis S. 228 Z. 7, § 3 und § 4. Man hat in diesen Abschnitten nur stets statt Fläche binäre Form zu setzen, sonst nichts zu ändern.

Die angegebenen Constructionen bieten die Möglichkeit, binäre Formen beliebigen Grades unabhängig von Algebra und der Geometrie höherer Dimensionen zu definiren und zu behandeln. Die a. a. O. gegebene Definition binärer Formen und beliebiger Mannigfaltigkeiten derselben ist nicht etwa eine blosse Nominaldefinition, sondern, wie wohl schon die kurze Skizze zeigt, eine wirkliche Construction derselben. Sie benutzt nirgends ein algebraisches Princip und baut die Construction der Formen $(n+1)$. O. auf der der Formen n. O. auf. Da die Construction quadratischer Formen eine gelöste Aufgabe ist, so kann man successive sowohl einzelne Formen als auch beliebige lineare Mannigfaltigkeiten von Formen 3., 4., . . ., n. Grades construiren.

Dies beeinträchtigt natürlich nicht den Werth der auf algebraischer Grundlage ruhenden Lösungen der vorliegenden Aufgabe. Für Formen höheren Grades würde sich meine Lösung bei der wirklichen Ausführung immer noch sehr unübersichtlich gestalten, und es ist deshalb jede neue Behandlung des Problems mit Freude zu begrüssen.

Posen, im Januar 1884.

Note zu dem Verzeichnisse von Erzeugungsarten der cubischen Fläche (Math. Ann. Bd. 23, S. 308).

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

Die im genannten Verzeichnisse unter Nr. 13) erwähnte Erzeugungsweise der cubischen Fläche hatte mir, als ich eben die Correcturbogen erhielt, Herr Schröter als eine aus den Grassmann'schen Erzeugungsweisen abgeleitete mitgetheilt. Ich hatte damals keine Zeit, Grassmann selbst nachzusehen, und möchte daher hier nachträglich hervorheben, dass sie in jene einfache Form erst durch Herrn Schröter selbst gebracht worden ist. Bei Grassmann lautet sie in der ihm eigenthümlichen Terminologie:

„Der Durchschnitt eines Ebenenbüschels zweiter Stufe (d. i. Ebenenbündels) und zweier aus ihm durch Projectivität ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine Oberfläche dritter Ordnung." (Crelle's Journal Bd. 49, S. 64, Nr. 3).

Münster, den 18. März 1884.

Ueber einige Fehler der Burckhardt'schen Factorentafeln.

Von

Meissel in Kiel.

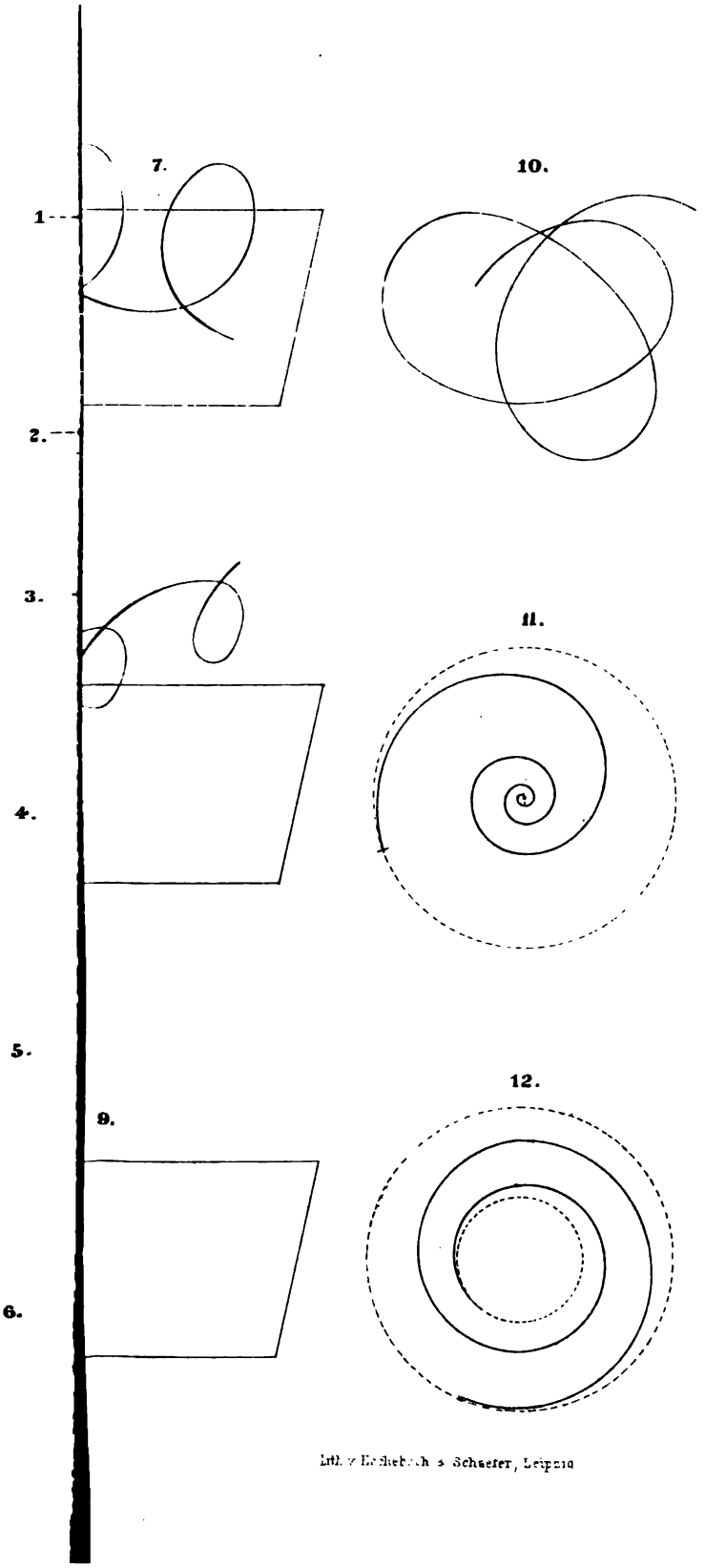
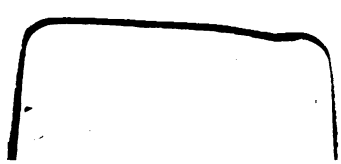
— —

Bei der Berechnung der Primzahlmenge innerhalb der ersten Milliarde fand ich mittels des im II. Bde. der Mathematischen Annalen pag. 636 angegebenen Verfahrens, dass innerhalb des Zahlenraumes 1 100 000—1 200 000 die sonst exacten Burckhardt'schen Factorentafeln eine Primzahl zu viel enthalten. Durch Grenzeinengung erhielt ich die in den Tafeln irrthümlich als Primzahl angegebene Zahl 1 138 027, welche durch 11 theilbar ist.

Zugleich erlaube ich mir auf einen zweiten unter mehreren Fehlern der Burckhardt'schen Tafeln im Intervall 1130—1300 Tausend aufmerksam zu machen.

Die Tafeln ergeben die Zahl 1270471 theilbar durch 223, während dieselbe Primzahl ist.

Kiel, im Mai 1884.



Lith. v. Eckebrecht & Schaefer, Leipzig